

基于有限元和 Duhamel 积分的 移动力问题分析方法研究*

朱丹阳, 张亚辉

(工业装备结构分析国家重点实验室(大连理工大学), 辽宁 大连 116024)

(本刊编委张亚辉来稿)

摘要: 针对桥梁在移动力作用下的动力响应问题,提出了一种基于有限元模型和 Duhamel 积分的半解析分析方法,以此为基础,推导了多个移动力作用下桥梁动力响应的共振和相消条件.该方法基于桥梁有限元模型的振型,通过单元形函数构造桥面分段连续振型,得到 Duhamel 积分在任意桥面单元内的解析表达,将时间变量从被积函数中分离出去并利用积分的可加性,使得前面时刻的积分不必重复计算,因此每一个计算时间节点仅需计算一次简单积分和一次求和,这样极大地减少了计算时间.该方法在计算中未引入任何近似,且其精度与时间积分步长无关,是有限元模型下的解析解答.在数值算例中,分别针对简支梁和三跨连续桥梁,通过与解析解和 Newmark 法的对比,验证了该方法的精确性;然后针对多个移动力问题,验证了桥梁动力响应的共振和相消条件,探讨了载荷间距对复杂结构动力响应共振和相消的影响.

关键词: 移动力; 桥梁; 有限元法; 共振和相消

中图分类号: O326 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.12.001

引 言

车桥耦合系统的动力响应问题,近百年来引起了众多学者的广泛关注,有诸多著作和文章^[1-9]对此进行了深入的研究.早期研究一般都将移动车辆简化为移动力,发现桥梁在移动力作用下的响应显著大于静力作用时的响应^[2-3].Frýba^[4]首先提出移动力问题的基本假定并推导了移动力通过简支桥梁的解析解,Olsson^[5-6]基于有限单元法研究了桥梁在移动力作用下的响应.由于移动力问题忽略了桥上车辆的惯性以及与桥梁的相互作用,为此,学者们随后逐步发展了移动质量^[10]、移动振子^[11]和更为复杂的多自由度车辆模型^[12]来研究车辆与桥梁的相互作用机理.由于车辆的运动,使得耦合系统系数矩阵大多随着车辆运动而改变.对于这类时变耦合系统的振动问题,目前主要采用以下两类分析方法:其一,将耦合系统作为一个整体,应用逐步积分方法对时变运动方程直接进行求解^[11,13];其二,对车辆和桥梁分别建立独立的运

* 收稿日期: 2014-10-08; 修订日期: 2014-10-21

基金项目: 国家自然科学基金(11172056);国家重点基础研究发展计划(973计划)(2014CB046803)

作者简介: 朱丹阳(1985—),男,湖南郴州人,博士生(E-mail: zhudy@mail.dlut.edu.cn);

张亚辉(1972—),男,河北昌黎人,教授,博士生导师(通讯作者. E-mail: zhangyh@dlut.edu.cn).

动方程,在每一时间步内通过车轮与桥梁之间的关系得到相互作用力,对响应进行反复迭代求解^[14-15]。

在第二类分析方法的求解过程中,车辆和桥梁的动力分析是分别作为非时变动力学系统进行处理,不需要像第一类方法那样在每个时间步内对结构进行修改.尤其对于大型复杂桥梁模型,不会出现由于车辆、桥梁参数差异过大而引起的系数矩阵的病态问题.但是这种方法需要在每个时间步内进行多次迭代.桥梁在移动力作用下的响应的精确计算是该类方法的核心.对于简单桥梁结构,当其振型能够解析得到时,可以通过 Duhamel 积分直接对桥梁的动力响应进行精确地求解^[8].然而,当桥梁较为复杂,且其振型不能解析得到时, Duhamel 积分方法不能直接应用.此时,通常采用有限元方法进行建模,并利用 Newmark 法、Runge-Kutta 法等数值方法进行求解.一般的数值方法,均假设在积分时间步长内对桥梁施加一个固定的荷载,亦即采用一系列在不同位置上的突加荷载来代替位置连续变化的渐进荷载.这个假设当积分步长足够小时,可以得到接近精确解的结果,然而当积分步长较大时,则会由于附加冲击效应而造成计算误差.并且由于逐步积分方法计算结果的精确性也取决于积分时间步长的选取,在缺乏参考解时将难以判断计算结果是否已满足精度要求,而减小积分步长又将进一步降低计算效率.张亚辉等^[16]采用精细积分法对该问题进行了改进,将移动载荷通过形函数分解到各个节点上,并假设其在积分步内是连续变化的.这种改进提高了计算效率,并且在选取较大的积分步长时依然可以得到较为精确的结果,但其计算精度仍依赖于积分步长的选取.

本文基于 Duhamel 积分,提出了一种在有限元模型下的半解析求解方法.该方法利用桥梁的有限元振型,通过单元形函数构造桥面分段连续振型,使得 Duhamel 积分可以在任意桥面单元内展开.在计算中将时间变量从被积函数中分离并利用积分的可加性,将整个复杂积分转化为一次简单积分和一次求和,这样极大地减少了计算时间.该方法在计算中未引入任何近似,且其精度与时间积分步长无关,是有限元模型下的解析解答.另外,本文方法还可以通过对响应解析表达式的进一步分析,准确地得到有限元模型在多个移动力共同作用下响应的共振和相消条件.在数值算例中,首先以简支桥梁为例,通过将本文方法与解析解和 Newmark 法计算结果的对比,验证了本文方法的正确性,并验证了多移动力作用下的共振和相消条件.然后以三跨连续桥梁为例,进一步验证了本文方法对于复杂有限元桥梁的有效性,探讨了满足共振和相消条件的多个移动力作用下复杂结构的响应特点.

1 移动力作用下的桥梁动力响应的传统分析方法

Euler-Bernoulli 梁在移动力作用下的运动方程可以表示为

$$\bar{m} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} = \sum_{j=1}^m \delta(x - x_j - Vt) P_j(t), \quad (1)$$

式中, $y(x, t)$ 为梁 x 位置处 t 时刻的挠度, EI 为抗弯刚度, \bar{m} 为单位长度质量, c 为阻尼系数, 假设共有 m 个力 $P_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, m$) 以速度 V 在梁上移动, x_j 为第 j 个力与第一个力之间的距离, δ 为 Dirac 函数. 方程(1)可采用振型分解法求解. 对于最简单的等截面均质简支梁, 通过 Duhamel 积分就可以得到梁的响应^[8]:

$$y(x, t) = \frac{2}{\bar{m}L} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{\omega_{di}} \sin \frac{i\pi x}{L} \times \sum_{j=1}^m \left[\int_0^t P_j(\tau) \sin \frac{i\pi(x_j + V\tau)}{L} e^{-\xi_i \omega_i(t-\tau)} \sin(\omega_{di}(t-\tau)) d\tau \right] \right\}, \quad (2)$$

其中, n 为振型数, L 为梁长, ω_i 为第 i 阶无阻尼自振频率, $\zeta_i = c/(2\bar{m}\omega_i)$ 为第 i 阶振型阻尼比, $\omega_{di} = \omega_i\sqrt{1-\zeta_i^2}$ 为第 i 阶有阻尼自振频率。

在实际分析中, 式(2)的解可根据分析精度选取振型的阶数 n 。对简支梁的中点挠度而言, 往往取第 1 阶振型就可以得到令人满意的结果。

然而, 对于图 1 所示的复杂桥梁受到移动力作用时的动力响应问题, 上述解析方法不再适用。此时可以采用有限元方法对桥梁结构进行离散, 进而得到桥梁运动方程:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F, \quad (3)$$

其中 M, C 和 K 分别是结构的质量、阻尼和刚度矩阵, \ddot{u}, \dot{u} 和 u 分别为加速度、速度和位移响应向量, F 是外荷载向量, 可以表示为

$$F(t) = \sum_{j=1}^m R_j(t) P_j, \quad (4)$$

其中, $R_j(t)$ 为第 j 个移动力与桥梁接触点处的形函数扩展矩阵^[17], 它的作用是将桥梁单元上的力转化为节点力向量。此时可以采用振型叠加法, 即

$$u(t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i q_i(t) = \psi_F q(t), \quad (5)$$

其中, $q_i(t)$ 是第 i 个模态坐标, $q(t) = \{q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)\}^T$; φ_i 是结构的第 i 阶质量归一化振型向量, $\psi_F = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]$ 是有限元方法计算得到的结构振型矩阵。在正交阻尼假定下, 方程(3)可转化为得到桥梁模态坐标下的运动方程:

$$\ddot{q}_i(t) + 2\zeta_i\omega_i\dot{q}_i(t) + \omega_i^2q_i(t) = \gamma_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (6)$$

其中, $\gamma_i(t) = \varphi_i^T F(t)$ 为第 i 阶振型参与系数。

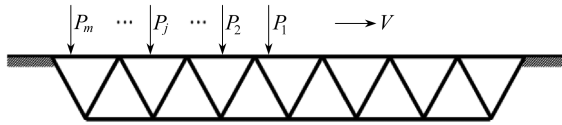


图 1 移动力作用下的桥梁模型

Fig.1 A bridge model subjected to moving loads

最后, 通过常规的逐步积分方法, 如 Newmark 法、Runge-Kutta 法等求解方程(6)得到结构模态响应, 再代入式(5)即可得到桥梁的响应。

该类数值方法在计算中通常以一系列在不同位置上的突加(跳进)荷载代替位置连续变化的移动(渐进)荷载, 当积分步长较大时, 由该假定产生的附加冲击效应将造成较大的计算误差。因此, 本文针对有限元桥梁模型在移动力作用下的动力响应问题, 结合 Duhamel 积分提出了一种半解析的计算方法。该方法不依赖于积分步长, 是有限元模型下的精确解。

2 移动力作用下桥梁动力响应的半解析方法

由于移动力仅作用在桥面单元上, 若可以得到桥面单元连续模态, 则可以通过 Duhamel 积分得到桥梁在移动力作用下响应的解析解答。因此, 本文利用有限元模型中计算得到的结构自振频率和振型, 通过形函数获得整个桥面的分段连续振型。

在此, 以梁单元受垂向作用的二维问题为例, 有限元方法计算得到的桥梁第 i 阶振型在第 k 个桥面单元两端节点位置的幅值为 $\{w_i^k \ \theta_i^k \ w_i^{k+1} \ \theta_i^{k+1}\}^T$, 其中 w 表示挠度, θ 表示转角, 此时可根据如下方式构造第 k 个单元的第 i 阶连续振型^[7]:

$$\phi_{wi}^k = N_w^k(\xi_k) \{w_i^k \ \theta_i^k \ w_i^{k+1} \ \theta_i^{k+1}\}^T, \quad (7)$$

其中, ξ_k 为单元局部坐标, 设该单元左右节点坐标分别为 x_k 和 x_{k+1} , $l_k = x_{k+1} - x_k$ 为该单元长度, 则

$$\xi_k = \frac{x - x_k}{l_k}, \quad (8)$$

其中, $x \in [x_k, x_{k+1}]$ 为该单元上的位置坐标.

$$N_w^k(\xi_k) = [N_1^k \ N_2^k \ N_3^k \ N_4^k] \quad (9)$$

为第 k 个单元在 w 方向的形函数, 其中

$$\begin{cases} N_1^k = 1 - 3\xi_k^2 + 2\xi_k^3, & N_2^k = l_k(\xi_k - 2\xi_k^2 + \xi_k^3), \\ N_3^k = 3\xi_k^2 - 2\xi_k^3, & N_4^k = l_k(\xi_k^3 - \xi_k^2). \end{cases} \quad (10)$$

因此, 第 i 阶连续振型可以表示为

$$\begin{aligned} \phi_{wi}^k(x) &= N_{wi}^k(\xi_k) \{w_i^k \ \theta_i^k \ w_i^{k+1} \ \theta_i^{k+1}\}^T = \\ & a_{1i} + a_{2i}(x - x_k) + a_{3i}(x - x_k)^2 + a_{4i}(x - x_k)^3. \end{aligned} \quad (11)$$

将式(9)和(10)代入上式, 可得到 4 个待定系数为

$$\begin{cases} a_{1i} = w_i^k, & a_{3i} = \frac{2w_i^{k+1} - 3w_i^k - 2l_k\theta_i^k - l_k\theta_i^{k+1}}{l_k^2}, \\ a_{2i} = \theta_i^k, & a_{4i} = \frac{2\theta_i^k - 2w_i^{k+1} + l_k\theta_i^k - l_k\theta_i^{k+1}}{l_k^3}. \end{cases} \quad (12)$$

因此, 可以得到整个桥面的分段连续振型:

$$\phi_{wi}(x) = \begin{cases} N_{wi}^1(x) \{w_i^1 \ \theta_i^1 \ w_i^2 \ \theta_i^2\}^T, & x \text{ 在 1 号单元上,} \\ N_{wi}^2(x) \{w_i^2 \ \theta_i^2 \ w_i^3 \ \theta_i^3\}^T, & x \text{ 在 2 号单元上,} \\ \vdots & \vdots \\ N_{wi}^k(x) \{w_i^k \ \theta_i^k \ w_i^{k+1} \ \theta_i^{k+1}\}^T, & x \text{ 在 } k \text{ 号单元上,} \\ \vdots & \vdots \end{cases} \quad (13)$$

同理, 对于空间问题, 其它方向的解析模态 ($\phi_{ui}(x)$, $\phi_{\theta_i}(x)$ 等) 亦可通过类似方法得到.

另一方面, m 个移动力 P_j 作用下桥梁的载荷项可以表示为^[9]

$$p(x, t) = \sum_{j=1}^m P_j \{ \delta[x - V(t - T_j)] [H(t - T_j) - H(t - T_j - L/V)] \}, \quad (14)$$

式中, $H(t)$ 为 Heaviside 函数, [当 $t < 0$ 时, $H(t) = 0$; 当 $t \geq 0$ 时, $H(t) = 1$]. 而 $T_j = x_j/V$ 为第 j 个力进入桥的时间; L 为桥梁总长. 显然, 第 j 个移动力是否作用在桥上是由式中函数 $H(t - T_j) - H(t - T_j - L/V)$ 来控制, 当其在桥上时由 $H(t - T_j)$ 控制, 当其下桥时由 $H(t - T_j - L/V)$ 来控制.

此时, 式(6)的振型参与系数 γ_i 可以表示成

$$\gamma_i(t) = \int_0^L p(x, t) \phi_{wi}(x) dx. \quad (15)$$

将式(14)代入式(15)可得

$$\gamma_i(t) = \sum_{j=1}^m P_j \{ \phi_{wi}(V(t - T_j)) [H(t - T_j) - H(t - T_j - L/V)] \}. \quad (16)$$

由于 $\phi_{wi}(x)$ 是分段连续函数,因此方程(6) 的解 $q_i(t)$ 可以通过 Duhamel 积分得到.将式(16)代入方程(6),沿全梁积分,可得桥梁在移动力作用下的模态响应为

$$q_i(t) = \int_0^t r_i(\tau) h(t - \tau) d\tau = \sum_{j=1}^m \int_0^t P_j \phi_{wi}(V(\tau - T_j)) [H(t - T_j) - H(t - T_j - L/V)] h_i(t - \tau) d\tau, \quad (17)$$

其中

$$h_i(t) = \frac{1}{\omega_{di}} e^{-\xi_i \omega_{di} t} \sin(\omega_{di} t) \quad (18)$$

为脉冲响应函数.为了推导方便,仅考虑一个移动力 P_j 的情况.当它在桥面上移动时, $H(t - T_j) - H(t - T_j - L/V) = 1$.设 t 时刻该作用力运行至第 r 个单元上,并将积分在每个桥面单元内展开,可得则其模态响应为

$$q_i(t) = \frac{P_j}{\omega_{di}} \int_0^t \phi_{wi}(V(\tau - T_j)) e^{-\xi_i \omega_{di}(t-\tau)} \sin(\omega_{di}(t - \tau)) d\tau = \frac{P_j}{\omega_{di}} \left\{ \sum_{k=1}^{r-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \phi_{wi}^k(V(\tau - T_j)) e^{-\xi_i \omega_{di}(t-\tau)} \sin(\omega_{di}(t - \tau)) d\tau + \int_{t_r}^t \phi_{wi}^r(V(\tau - T_j)) e^{-\xi_i \omega_{di}(t-\tau)} \sin(\omega_{di}(t - \tau)) d\tau \right\}, \quad (19)$$

其中, t_k 为力驶入第 k 个单元的时刻, t_{k+1} 为离开该单元的时刻.该参数与梁单元左边节点位置 x_k 以及移动力进入桥时的时间 T_j 有关,即

$$t_k = \frac{x_k}{V} + T_j. \quad (20)$$

对式(11)中的每个单元 k 的振型函数 $\phi_{wi}^k(x)$ 进行变量替换 $x = V(\tau - t_k)$, 可得

$$\phi_{wi}^k(\tau) = b_{0i} + b_{1i}\tau + b_{2i}\tau^2 + b_{3i}\tau^3, \quad (21)$$

其中

$$\begin{cases} b_{0i} = a_{1i} - a_{2i}Vt_k + a_{3i}V^2t_k^2 - a_{4i}V^3t_k^3, & b_{2i} = a_{3i}V^2 - 3a_{4i}V^3t_k, \\ b_{1i} = a_{2i}V - 2a_{3i}V^2t_k + 3a_{4i}V^3t_k^2, & b_{3i} = a_{4i}V^3. \end{cases} \quad (22)$$

结合式(21),式(19)中的每一项积分均可以求得其解析解答.然而由于积分式中显含时间项,每一个时刻点都需要重新计算该积分,效率低下.为了避免积分的重复计算,可以将时间变量从积分式中分离出去.以式(19)中最后一项积分为例

$$\begin{aligned} & \int_{t_r}^t \phi_{wi}^r(\tau) e^{-\xi_i \omega_{di}(t-\tau)} \sin(\omega_{di}(t - \tau)) d\tau = \\ & e^{-\xi_i \omega_{di} t} \sin(\omega_{di} t) \int_{t_r}^t e^{\xi_i \omega_{di} \tau} \cos(\omega_{di} \tau) \phi_{wi}^r(\tau - t_r) d\tau - \\ & \cos(\omega_{di} t) e^{-\xi_i \omega_{di} t} \int_{t_r}^t e^{\xi_i \omega_{di} \tau} \sin(\omega_{di} \tau) \phi_{wi}^r(\tau - t_r) d\tau = \\ & C_{Ai}^t e^{-\xi_i \omega_{di} t} \sin(\omega_{di} t) - C_{Bi}^t e^{-\xi_i \omega_{di} t} \cos(\omega_{di} t), \end{aligned} \quad (23)$$

其中

$$\begin{cases} C_{Ai}^t = \int_{t_r}^t e^{\xi_i \omega_{di} \tau} \cos(\omega_{di} \tau) \phi_{wi}^r(\tau - t_r) d\tau, \\ C_{Bi}^t = \int_{t_r}^t e^{\xi_i \omega_{di} \tau} \sin(\omega_{di} \tau) \phi_{wi}^r(\tau - t_r) d\tau. \end{cases} \quad (24)$$

将式(21)代入上式,可以得到两个系数的具体表达式,为

$$C_A^t = \int_{t_k}^t e^{\xi_i \omega_i \tau} \cos(\omega_{di} \tau) (b_{0i} + b_{1i} \tau + b_{2i} \tau^2 + b_{3i} \tau^3) d\tau = \sum_{s=0}^3 b_s \int_{t_r}^t t^s e^{\xi_i \omega_i \tau} \cos(\omega_{di} \tau) d\tau \triangleq b_{0i} r_{01}^i + b_{1i} r_{11}^i + b_{2i} r_{21}^i + b_{3i} r_{31}^i, \quad (25)$$

$$C_B^t = \int_{t_r}^t e^{\xi_i \omega_i \tau} \sin(\omega_{di} \tau) (b_{0i} + b_{1i} \tau + b_{2i} \tau^2 + b_{3i} \tau^3) d\tau = \sum_{s=0}^3 b_s \int_{t_r}^t t^s e^{\xi_i \omega_i \tau} \sin(\omega_{di} \tau) d\tau \triangleq b_{0i} r_{02}^i + b_{1i} r_{12}^i + b_{2i} r_{22}^i + b_{3i} r_{32}^i, \quad (26)$$

式中

$$r_{s1}^i = \int_{t_r}^t \tau^s e^{\xi_i \omega_i \tau} \sin(\omega_{di} \tau) d\tau, \quad (27)$$

$$r_{s2}^i = \int_{t_r}^t \tau^s e^{\xi_i \omega_i \tau} \cos(\omega_{di} \tau) d\tau, \quad (28)$$

$s = 0, 1, 2, 3$. 式(27)和(28)有解析表达式,可查询积分表.

将式(23)代入式(19),可得

$$q(t) = e^{-\xi_i \omega_i t} \left[\sin(\omega_{di} t) \left(\sum_{r=1}^{k-1} C_{Ai}^r + C_{Ai}^t \right) - \cos(\omega_{di} t) \left(\sum_{r=1}^{k-1} C_{Bi}^r + C_{Bi}^t \right) \right]. \quad (29)$$

通过上述方法,将 $[0, t]$ 时刻的积分分解为一系列独立时段内积分,每个时段的积分均有解析表达;并且对于任意时刻,均只需要计算一次向前积分(C_{Ai}^r 和 C_{Bi}^r),再利用之前已计算得到的积分结果(C_{Ai}^r 和 C_{Bi}^r)进行叠加,再乘以时间项即可得到其解答.在实际计算中可根据时间考察点的选取,首先计算并存储各单元积分式 C_{Ai}^r 和 C_{Bi}^r ,然后再采用式(29)计算各个时间考察点处的响应,此时对任意时间考察点均可通过简单的乘法和加法得到响应,而不需要重复计算各种积分,极大地提高了计算效率.

因此,将式(29)代入式(5),即可得桥梁结构的响应.通过类似推导可以求得其速度和加速度,在此不再赘述.

3 多载荷下的共振和相消条件

对于多移动力作用下桥梁的响应,可采用单移动力作用下的响应,根据线性叠加原理,得到 m 个移动力作用下结构的响应.此时,桥梁结构的响应可以表示为

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\psi}_F \sum_{j=1}^m q_i(t - T_j). \quad (30)$$

结合式(29)和式(30),整理可得多移动力下桥梁的响应为

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n e^{-\xi_i \omega_i (t - T_j)} \boldsymbol{\psi}_F \{ Q_{Ai} \sin(\omega_{di}(t - T_j)) - Q_{Bi} \cos(\omega_{di}(t - T_j)) \}, \quad (31)$$

其中

$$Q_{Ai} = \sum_{r=1}^{k-1} C_{Ai}^r + C_{Ai}^t, \quad Q_{Bi} = \sum_{r=1}^{k-1} C_{Bi}^r + C_{Bi}^t. \quad (32)$$

通过式(31)可以看出,多个移动力作用下桥梁的响应,可以通过单个力作用下的响应加上移轴变换之后的响应的叠加而得到.尽管单个移动力作用下桥梁响应幅值也随时间改变而变化,但它们没有固定的变化频率,故其振动频率主要取决于结构的固有频率 ω_{di} .因此,若两个间距为 d 的载荷满足以下条件时,波峰位置重合,此时结构振动将达最大,此即共振间距

d_{res} , 为

$$d_{res} = 2\eta \frac{\pi V}{\omega_{di}} \quad (\eta = 1, 2, \dots). \tag{33}$$

不妨设距离因子 $S_i = \pi V / \omega_{di}$, 这里 $S = 2\eta$. 此即为多移动力作用下桥梁的共振条件. 式(33)也可表示为

$$V_{cr} = \frac{d_{res} \omega_{di}}{2\pi\eta} \quad (\eta = 1, 2, \dots), \tag{34}$$

此即为桥梁在移动力作用下的临界速度^[18].

而当移动力间距满足以下条件时, 波峰、波谷将相互抵消, 振动最小. 此即振动相消间距 d_{can} , 为

$$d_{can} = (2\eta - 1) \frac{\pi V}{\omega_{di}} \quad (\eta = 1, 2, \dots). \tag{35}$$

此时, $S = 2\eta - 1$, 即为桥梁振动相消条件. 这与文献[9, 18] 中的结果一致. 当结构阻尼较小时, 可取 $\omega_{di} \approx \omega_i$.

4 数值算例

4.1 简支桥梁在单个移动力作用下的响应

算例首先选取简支梁作为研究对象. 桥总长 $L = 30$ m, 抗弯刚度 $EI = 7.48 \times 10^{10}$ N·m², 单位长度质量 $\bar{m} = 10^4$ kg/m, 各阶振型阻尼比均为 0.02. 全梁划分为 10 个有限单元, 第 1 阶自振频率为 29.99 rad/s. 分别采用本文方法、解析法和 Newmark 法进行求解, 计算中仅选取第 1 阶振型. 当力移动至桥梁中点时, 各方法在不同积分步长下中点的位移和加速度以及相对解析解的误差如表 1 所示.

表 1 不同计算方法得到的中点位移和加速度及误差

Table 1 Displacements and accelerations at the bridge middle point and their errors of different methods

method	step N	displacement u / m	error ε_u / %	acceleration a / (m/s ²)	error ε_a / %
analytical method	-	-0.007 706 54	-	0.282 612 23	-
present method	5/100	-0.007 706 55	0.000 035	0.282 609 20	0.001 082
	100	-0.007 639 93	0.864 331	0.223 761 22	20.823 943
Newmark method	500	-0.007 703 955	0.035 933	0.280 249 73	0.835 961

由表 1 可见, 本文方法的结果与积分步数无关, 且误差非常小; 而 Newmark 法结果误差较大, 积分步长越小, 结果则越精确. 进一步计算表明, Newmark 法随着积分步长的缩小, 其结果将趋近于本文方法的结果; 而本文方法结果在单元划分不变的情况下, 其结果也不会改变. 这是由于本文方法是有限元模型上的精确解答, 计算中并未引入任何误差; 误差完全来自有限元模型化, 若要提高计算结果的精度, 只能进一步提高结构单元的划分质量.

图 2 为各种方法计算的中点位移和加速度响应时程. 其中 Newmark 法取 200 个积分步, 并且所有方法均选取前 10 阶振型进行计算.

由图 2 可见, 3 种方法计算得到的桥梁中点位移基本吻合, 然而对于加速度响应, 本文方法与解析法得到的结果几乎完全一致, 而 Newmark 法的结果则差异明显. 这是由于 Newmark 法的计算精度与积分步长的选取密切相关. 因此对于参振频率较高时, 需要更小的积分步长才能够得到较为精确的加速度结果. 然而, 更小的时间积分步长必然导致更大的计算量. 本文方

法当选择的时间考核点与 Newmark 法步数(200 步)一样时,计算时间略慢于 Newmark 法(平均耗时约为其 1.5 倍),但结果更加精确;当选择 10 个时间考核点时,可以得到完全一样的精确结果,此时计算效率则远高于 Newmark 法。

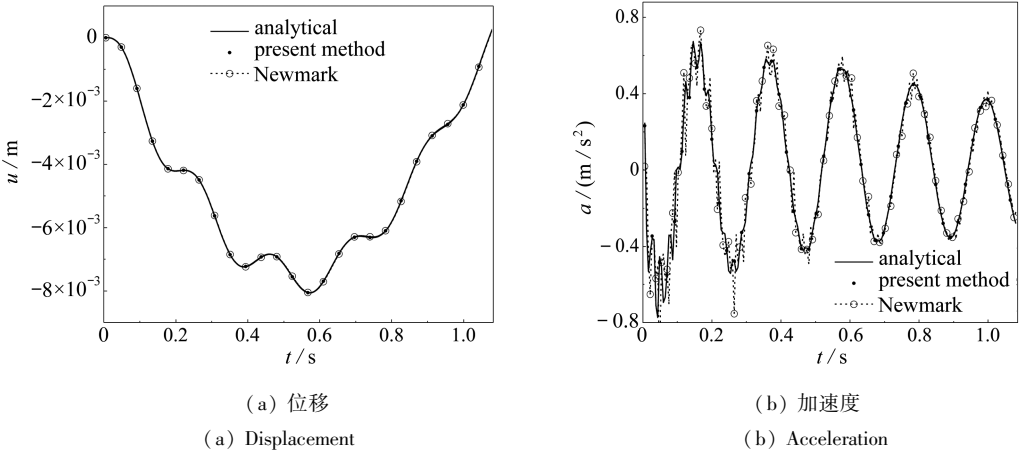


图 2 桥梁中点位移、加速度时程曲线

Fig.2 Time histories of displacement and acceleration at the bridge middle point

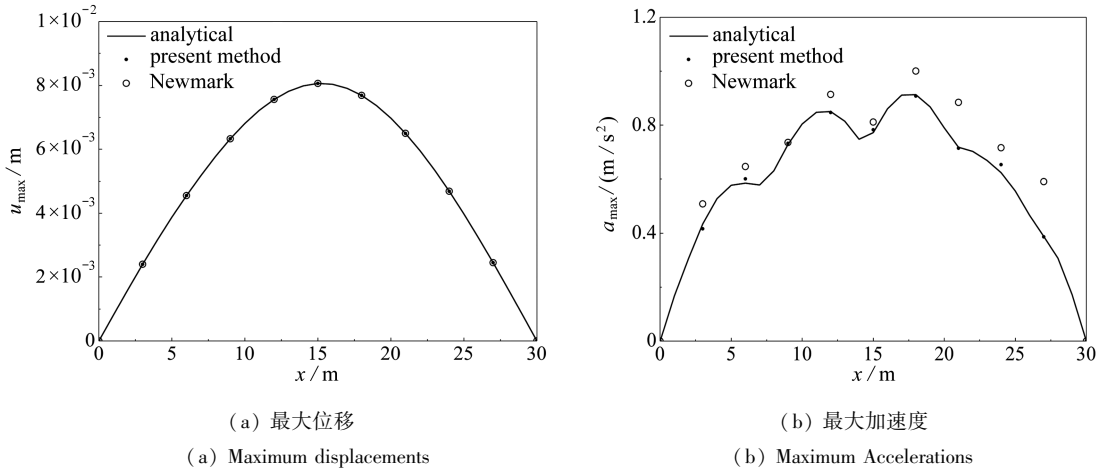


图 3 桥梁各位置最大位移和加速度

Fig.3 Maximum displacements and accelerations of the bridge

图 3 为整个时间历程内所有节点位移和加速度的最大值。由于 Newmark 方法需要非常小的积分步长才能得到较为精确的加速度结果,因此为了保证方法结果的正确性,图 3 中 Newmark 法的积分步数取为 2 000。由于本文方法及 Newmark 法采用的是有限元模型,因此仅计算了各节点处的响应。而解析方法则是所有位置的响应。

由图 3 可见,3 种方法计算得到的桥梁各节点位移最大值均非常接近,而加速度的最大值则有所差异,本文方法的结果和解析法结果吻合较好,Newmark 法的结果即使在采用了非常小的积分步长下依然有较大差异。

4.2 简支桥梁在多个移动力作用下的响应

图 4 为两个移动力通过桥梁时,桥梁中点位移、加速度响应时程曲线。在计算中,取前 10 阶模态进行计算,根据桥梁共振和相消条件的式(33)和(35),分别选取移动力距离因子 S 分

别为 1(相消)、2(共振)以及 1.5 进行计算,且仅考虑一阶弯曲频率($\eta = 1$)对应的间距。

由图 4 可见,当多载荷通过桥梁时,其中点位移幅值受移动力之间的间距的影响较小,但是加速度受到的影响非常显著。当满足共振条件 $S = 2$ 时,桥梁中点加速度幅值最大,是最危险的情况;而满足相消条件 $S = 1$ 时,桥梁的振动在载荷上桥之后两个移动力引起的桥梁振动相互抵消,其加速度幅值最小。而当 $S = 1.5$ 时,振动在二者之间。在车桥耦合系统振动研究中,桥梁加速度响应对车轮与桥梁间的相互作用以及轮轨脱离影响显著,所以桥梁加速度的精确计算尤为重要。进一步计算表明,对于更多的等间距移动力共同作用下,该结论依然成立;当各移动力的间距不同时,它们共同作用下对整个结构响应的影响则更加复杂,共振和相消效应则不会如此显著。再者,共振及相消现象在桥梁的主要参振频率(一阶弯曲频率)所对应的间距下非常显著,而非主要频率对应的间距下则不明显,几乎可以忽略。

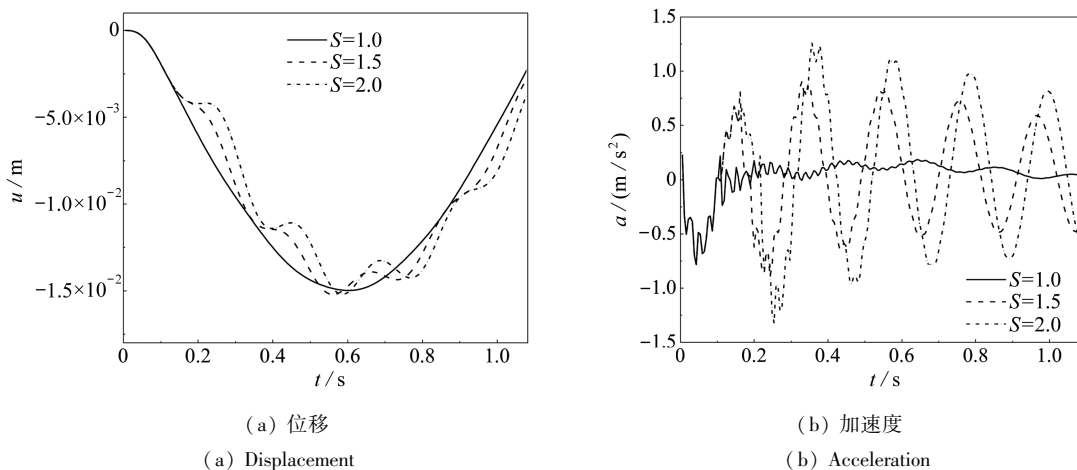


图 4 两个不同间距载荷通过桥梁时桥中点位移、加速度响应

Fig.4 Displacements and accelerations at the bridge middle point in the cases of 2 moving loads with different distances

4.3 三跨连续梁桥在移动力作用下的响应

本算例研究了移动力通过三跨连续梁桥时桥梁的响应。桥梁的弹性模量 $E = 2.0 \times 10^{10}$ N/m, 垂直惯性矩 $I_y = 4.78 \text{ m}^4$, 水平惯性矩 $I_z = 71.4 \text{ m}^4$, 扭转惯性矩 $J = 18.6 \text{ m}^4$, 单位长度密度 $\rho = 34\,088 \text{ kg/m}$, 桥每跨长 20 m, 总长 $L = 60 \text{ m}$, 设移动力仅作用于垂向, 幅值为 10^6 N , 移动速度为 $V = 27.78 \text{ m/s}$ 。

对于该三维桥梁有限元模型,由于移动力作用于垂向,因此本文方法可以仅选取垂向挠度以及转角构造垂向的分段连续振型,并选取前 10 阶振型进行计算。单个移动力通过桥梁时,中间跨中点的位移、加速度响应时程曲线如图 5 所示。

由图 5 可见,当 Newmark 法选取较小的积分时间步长时,其计算结果与本文方法的结果几乎完全一致。由于该桥梁模型较柔,第 10 阶自振频率为 131.63 rad/s ,因此不必选取过小的积分步长时 Newmark 法也可以得到较为精确的加速度计算结果。然而,当参振的振型阶数较高时,其对应自振频率亦更大,因此也就需要更小的积分步长才能得到较为精确的加速度计算结果。

图 6 为两个移动力以不同的间距通过桥梁时中间跨中点响应曲线。由图 6 可知,移动力间距对加速度的影响依然很大。当间距满足共振条件时,桥梁中点的加速度幅值最大,对桥梁也最为危险,只是由于结构更加复杂、参振振型的增多使得振动在各振型间相互影响,没有如图

4 中那样显著.进一步的计算表明,当 2 个移动力间的间距满足其它频率的共振(或相消)条件时,基本上没有明显的共振(或相消)现象.共振及相消现象依然是在桥梁的主要参振振型所对应的 S 值下的显著表现,而在非主要振型对应的 S 值下则可忽略.

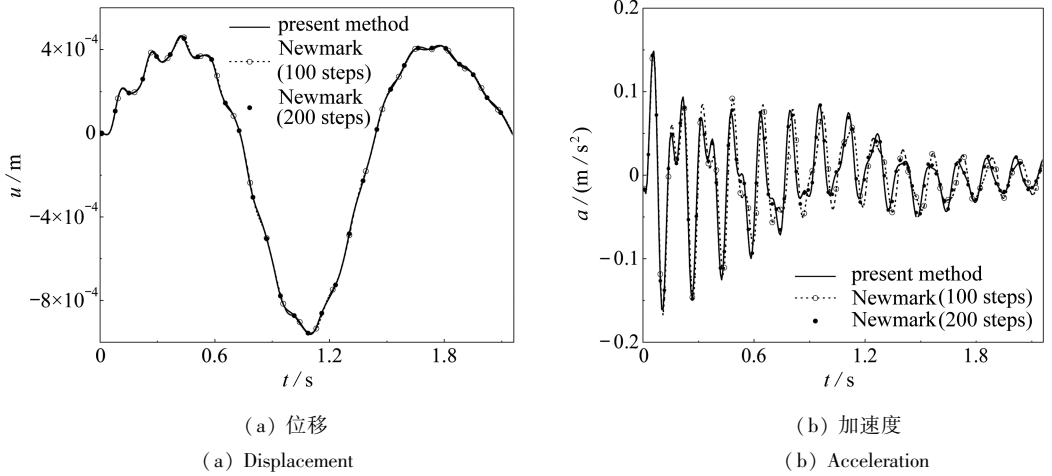


图 5 三跨桥中点的位移、加速度曲线

Fig.5 Displacements and accelerations at the bridge middle point of the 3-span continuous bridge

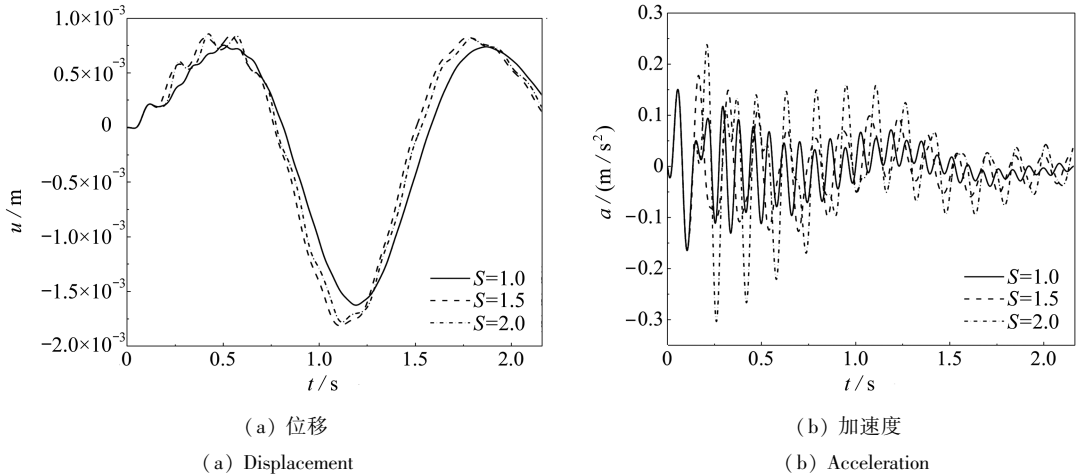


图 6 两个不同间距的移动载荷通过桥梁时桥梁中点的位移、加速度曲线

Fig.6 Displacements and accelerations at the bridge middle point of the 3-span continuous bridge subjected to 2 moving loads with different distances

5 结 论

本文针对有限元桥梁模型,提出了一种移动力问题的半解析方法.该方法通过构造桥面单元分段连续振型,使得 Duhamel 积分可以在全桥内展开,得到了基于有限元模型的精确解.相比 Newmark 法等常用的逐步积分方法,本文方法具有以下优点:首先,计算结果是建立在有限元模型上的精确解,算法未引入任何误差;其次,算法的精确性不依赖于积分步长的选择;再次,通过桥梁响应的表达式可以得到桥梁在多移动力作用下响应的共振和相消条件.本文所提供的思想存在广阔的发展空间,稍加推广便可应用于移动质量的问题中,进一步可推广于复杂的车桥耦合系统的振动问题中.

参考文献 (References) :

- [1] Stokes G G. Discussions of a differential equation relating to the breaking of railway bridges [C]//*Mathematical and Physical Papers*. Vol 2. Cambridge: Cambridge University Press, 2009: 178-220.(Original Published in 1883)
- [2] Tan C P, Shore S. Response of horizontally curved bridge to moving load[J]. *Journal of the Structural Division*, 1968, **94**(9): 2135-2151.
- [3] Ting E, Yener M. Vehicle-structure interactions in bridge dynamics[J]. *The Shock and Vibration Digest*, 1983, **15**(12): 3-9.
- [4] Frýba L. *Vibration of Solids and Structures Under Moving Loads*[M]. Netherlands: Noordhoff International Publishing, 1972.
- [5] Olsson M. Finite element, modal co-ordinate analysis of structures subjected to moving loads [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1985, **99**(1): 1-12.
- [6] Olsson M. On the fundamental moving load problem[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1991, **145**(2): 299-307.
- [7] Baeza L, Ouyang H. Vibration of a truss structure excited by a moving oscillator[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, **321**(3): 721-734.
- [8] 夏禾. 车辆与结构动力相互作用[M]. 北京: 科学出版社, 2002.(XIA He. *Interaction Dynamics Between Vehicles and Structures*[M]. Beijing: Science Press, 2002.(in Chinese))
- [9] Yang Y B, Yau J D, Hsu L C. Vibration of simple beams due to trains moving at high speeds [J]. *Engineering Structures*, 1997, **19**(11): 936-944.
- [10] Michaltsos G, Sophianopoulos D, Kounadis A N. The effect of a moving mass and other parameters on the dynamic response of a simply supported beam[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, **191**(3): 357-362.
- [11] Pesterev A V, Bergman L A. Response of elastic continuum carrying moving linear oscillator [J]. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 1997, **123**(8): 878-884.
- [12] Marchesiello S, Fasana A, Garibaldi L, Piombo B. Dynamics of multi-span continuous straight bridges subject to multi-degrees of freedom moving vehicle excitation[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, **224**(3): 541-561.
- [13] Xia H, Xu Y L, Chan T H T. Dynamic interaction of long suspension bridges with running trains[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, **237**(2): 263-280.
- [14] Green M F, Cebon D. Dynamic interaction between heavy vehicles and highway bridges[J]. *Computers & Structures*, 1997, **62**(2): 253-264.
- [15] Henchi K, Fafard M, Talbot M, Dhatt G. An efficient algorithm for dynamic analysis of bridges under moving vehicles using a coupled modal and physical components approach[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, **212**(4): 663-683.
- [16] 张亚辉, 张守云, 赵岩, 宋刚, 林家浩. 桥梁受移动荷载动力响应的一种精细积分法[J]. 计算力学学报, 2006, **23**(3): 290-294.(ZHANG Ya-hui, ZHANG Shou-yun, ZHAO Yan, SONG Gang, LIN Jia-hao. A precise integration method for bridges subjected to moving loads[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2006, **23**(4): 290-294.(in Chinese))
- [17] Zhu D Y, Zhang Y H, Kennedy D, Williams F W. Stochastic vibration of vehicle-bridge system subject to non-uniform ground motions[J]. *Vehicle System Dynamics*, 2014, **52**(3): 410-428.
- [18] OUYANG Hua-jiang. Moving-load dynamic problems: a tutorial (with a brief overview) [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2011, **25**(6): 2039-2060.

A Methodology Based on FEM and Duhamel Integration for Bridges Subjected to Moving Loads

ZHU Dan-yang, ZHANG Ya-hui

(*State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment
(Dalian University of Technology), Dalian, Liaoning 116024, P.R.China*)

(Contributed by ZHANG Ya-hui, M. AMM Editorial Board)

Abstract: Based on the finite element (FE) method and Duhamel integration, a numerical-analytical combined method for the dynamic response problem of an FE bridge under moving loads was proposed, and the conditions of resonance and cancellation for the bridge subjected to multiple moving loads were derived. The FE modes of the bridge structure were first computed and then converted into an analytical form constructed over all the elements of the bridge deck with the element shape functions. The analytical dynamic responses of the bridge were derived from Duhamel integration, and transformed into a simple integration and a summation of the previous results through elimination of the time variable from the integration, which enables the computation process more efficient. The proposed approach has the versatility of the FE method in dealing with structures of arbitrary configurations and the special efficiency and convenience of the analytical method in dealing with moving loads. In the numerical examples, the present method is verified with the Newmark method and the traditional analytical method based on a simply supported beam bridge and a 3-span continuous beam bridge. The results show that the accurate solution of the FE structures subjected to moving loads is obtained with the present method, and no approximation is introduced during the computation process. The conditions of resonance and cancellation are discussed for the problems with multiple moving load, and the influence of the load distances on the responses of the bridge is also revealed.

Key words: moving load; bridge; finite element method; resonance and cancellation

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (11172056); The National Basic Research Program of China (973 Program) (2014CB046803)