

立方非线性微结构固体中的 对称孤立波及存在条件*

那仁满都拉, 额尔敦仓

(内蒙古民族大学 物理与电子信息学院, 内蒙古 通辽 028043)

摘要: 考虑固体材料的宏观尺度立方非线性效应、微尺度立方非线性效应以及微尺度频散效应并根据修正的 Mindlin 理论,建立了一维微结构固体中纵波传播的一种新模型.用动力系统的定性分析方法,证明了适当条件下立方非线性微结构固体中可存在对称钟型孤立波和反钟型孤立波,并给出了两种孤立波的存在条件.用数值方法分析了微尺度立方非线性效应对钟型与反钟型孤立波的影响,结果显示随着微尺度非线性效应的增强(或负增强),两种孤立波的宽度变窄(或变宽)而幅度保持不变.

关键词: Mindlin 理论; 微结构固体; 孤立波; 存在条件

中图分类号: O331; O347 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.11.004

引 言

随着微晶、合金、岩石以及功能材料等微结构材料的广泛应用,人们越来越重视对微结构固体材料的研究.微结构材料由于普遍存在的孔隙、位错、颗粒及裂纹等微结构上的不均匀性,当观测尺度接近其微结构尺寸时,可表现出与经典材料很大不同的行为特征.由于经典的连续介质理论不能对这些行为给出准确的描述,近年来人们针对微结构材料,提出了若干描述理论与应用模型^[1-7],并开始研究微结构固体中孤立波的传播问题^[8-10].由于固体材料中孤立波传播时,其形状、幅度以及传播速度中携带着反映该材料内部结构特征的重要信息,所以固体中孤立波存在与传播问题的研究对固体材料的无损检测与评价具有重要意义.这有望提供一种检测与评价固体材料性能的有效方法.在文献[11]中已明确提出并严格证明了利用微结构固体中形成的孤立波所携带的信息,可以确定固体材料的微结构参数.文献[12]修正了 Mindlin 微结构理论^[1],建立了考虑宏观尺度二次非线性效应、微尺度二次非线性效应以及微尺度频散效应的一种非线性波模型,并利用此模型证明了微结构固体中可以存在一种非对称孤立波且给出了孤立波的存在条件.文献[13]借助文献[12]中建立的波模型并采用伪谱方法,详细研究了结构参数对微结构固体中所形成的孤立波的传播及相互作用性质的影响.

本文考虑宏观尺度立方非线性效应、微尺度立方非线性效应以及微尺度频散效应,将建立

* 收稿日期: 2014-05-22; 修订日期: 2014-06-22

基金项目: 国家自然科学基金(11462019; 10862003)

作者简介: 那仁满都拉(1963—),男,蒙古族,内蒙古通辽人,教授,博士,硕士生导师(通讯作者).

E-mail: nrmdtl@126.com).

微结构固体中纵波传播的一种新模型,并将用动力系统的定性分析方法,分析微结构固体中可能形成的孤立波及其存在条件与形状特征.

1 模型的建立

Engelbrecht 等^[8,12]给出的微结构固体一维运动方程为

$$\begin{cases} \rho u_{tt} = \sigma_x, \\ I\psi_{tt} = \eta_x - \tau, \end{cases} \quad (1)$$

这里 u 表示宏观位移, σ 表示宏观应力, ψ 表示微形变, η 表示相应的微应力, τ 表示相互作用力, ρ 和 I 是宏观密度和微惯性. 本文考虑各向同性且中心对称的立方非线性固体材料, 故自由能的最简单形式可写为

$$w = \frac{1}{2} a u_x^2 + \frac{1}{2} B \psi^2 + \frac{1}{2} C \psi_x^2 + D \psi u_x + \frac{1}{12} N u_x^4 + \frac{1}{12} M \psi_x^4, \quad (2)$$

这里 a, B, C, D, M 和 N 都是常量. 利用应力计算公式

$$\sigma = \frac{\partial w}{\partial u_x}, \quad \eta = \frac{\partial w}{\partial \psi_x}, \quad \tau = \frac{\partial w}{\partial \psi} \quad (3)$$

计算出应力, 并代入方程(1)可得

$$\rho u_{tt} = a u_{xx} + N u_x^2 u_{xx} + D \psi_x, \quad I \psi_{tt} = C \psi_{xx} + M \psi_x^2 \psi_{xx} - B \psi - D u_x. \quad (4)$$

引入无量纲变量 $X = x/L$, $T = t c_0/L$ ($c_0^2 = a/\rho$), $U = u/U_0$ 以及几何参数 $\delta = l^2/L^2$ 和 $\varepsilon = U_0/L$ (U_0 和 L 是初始激励波的波幅和波长, 而 l 是微结构特征尺度), 则方程(4)简化成为如下无量纲方程:

$$U_{TT} = U_{XX} + \frac{D}{\rho \varepsilon c_0^2} \psi_X + \frac{N \varepsilon^2}{\rho c_0^2} U_X^2 U_{XX}, \quad (5)$$

$$\psi = -\frac{D \varepsilon}{B} U_X + \frac{\delta}{B} \left(\frac{C}{l^2} \psi_{XX} - \frac{a I}{\rho l^2} \psi_{TT} \right) + \delta^2 \frac{M}{B l^4} \psi_X^2 \psi_{XX}. \quad (6)$$

把 ψ 展开为 δ 的幂级数, 得

$$\psi = \psi_0 + \delta \psi_1 + \delta^2 \psi_2 + \dots. \quad (7)$$

比较式(6)和(7)可确定 ψ_0, ψ_1, ψ_2 , 并利用从属原理(slaving principle)^[8,12]可得

$$\psi = -\frac{D \varepsilon}{B} U_X + \delta \frac{D \varepsilon}{B^2} \left(\frac{a I}{\rho l^2} U_{XTT} - \frac{C}{l^2} U_{XXX} \right) - \delta^2 \frac{M D^3 \varepsilon^3}{B^4 l^4} U_{XX}^2 U_{XXX}. \quad (8)$$

把式(8)代入方程(5), 并令 $v = U_X$ 可得(下式中直接把大写的 X, T 改写为小写的 x, t)

$$v_{tt} - b v_{xx} - \frac{\mu}{3} (v^3)_{xx} - \delta (\beta v_{tt} - \gamma v_{xx})_{xx} + \delta^2 \frac{\chi}{3} (v_x^3)_{xxx} = 0, \quad (9)$$

这里

$$b = 1 - D^2/(aB), \quad \mu = N \varepsilon^2/a, \quad \beta = D^2 I/(l^2 \rho B^2), \quad \gamma = D^2 C/(l^2 a B^2), \\ \chi = D^4 M \varepsilon^2/(l^4 a B^4), \quad \text{且 } 0 < b < 1, \quad \mu > 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0.$$

2 微结构固体中孤立波的存在条件

为了便于分析, 首先对方程(9)作如下变换:

$$v = \sqrt{\frac{3b}{\mu}} u', \quad x' = \frac{1}{\sqrt{\delta \beta}} x, \quad t' = \sqrt{\frac{b}{\delta \beta}} t. \quad (10)$$

代入方程(9)计算可得(下式中已把 u', x', t' 改写为 u, x, t)

$$u_{uu} - u_{xx} - (u^3)_{xx} - u_{u_{xx}} + \alpha_1 u_{xxxx} + \alpha_2 (u^3)_{xxx} = 0, \quad (11)$$

这里 $\alpha_1 = \gamma / (b\beta) > 0$, $\alpha_2 = \chi\beta^{-2} / \mu$ 都是微结构参数. 由于方程(11)是不可积的非线性波方程, 所以很难得到该方程的显示精确解. 为此, 本文用定性分析方法来分析微结构固体中可形成的孤立波及其存在条件.

为了以后的比较分析, 先给出 $\alpha_2 = 0$ 时, 波方程(11)的孤立波解, 即

$$u = \pm \sqrt{2(V^2 - 1)} \operatorname{sech}[K(x - Vt)], \quad (12)$$

这里 $K = \sqrt{(V^2 - 1)/(V^2 - \alpha_1)}$, V 是任意波速. 这是不考虑微尺度非线性效应时, 由于宏观尺度非线性效应和微尺度频散效应的平衡而形成的钟型孤立波与反钟型孤立波.

当 $\alpha_2 \neq 0$ 时, 对方程(11)作行波约化 $\xi = x - Vt$, $u = u(\xi)$, 并积分两次(积分常数取为0)可得

$$(V^2 - 1)u - u^3 - (V^2 - \alpha_1)u_{\xi\xi} + 3\alpha_2 u_{\xi}^2 u_{\xi\xi} = 0. \quad (13)$$

令 $u = x$, $x_{\xi} = y$, 则把方程(13)改写为如下平面系统:

$$\begin{cases} x_{\xi} = y, \\ y_{\xi} = \frac{(V^2 - 1)x - x^3}{(V^2 - \alpha_1) - 3\alpha_2 y^2}. \end{cases} \quad (14)$$

当 $V^2 > \alpha_1, \alpha_2 > 0$ 或 $V^2 < \alpha_1, \alpha_2 < 0$ 时, 系统(14)存在两条奇直线 $y_1 = \sqrt{(V^2 - \alpha_1)/(3\alpha_2)}$ 和 $y_1 = -\sqrt{(V^2 - \alpha_1)/(3\alpha_2)}$. 为消去这两条奇直线, 作如下变换:

$$d\xi = (V^2 - \alpha_1 - 3\alpha_2 y^2) d\tau. \quad (15)$$

在此变换下, 系统(14)变成平面 Hamilton 系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = (V^2 - \alpha_1)y - 3\alpha_2 y^3, \\ \frac{dy}{d\tau} = (V^2 - 1)x - x^3. \end{cases} \quad (16)$$

系统(16)有如下首次积分:

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(V^2 - \alpha_1)y^2 - \frac{3}{4}\alpha_2 y^4 - \frac{1}{2}(V^2 - 1)x^2 + \frac{1}{4}x^4 = h. \quad (17)$$

在拓扑意义下, 除了两条奇直线之外, 系统(14)和(16)有相同的相图. 因此, 通过分析系统(16)的相图, 可获知系统(14)的相图分布. 系统(16)最多可有如下9个平衡点:

$$\begin{aligned} & (0, 0), \left(0, \sqrt{\frac{V^2 - \alpha_1}{3\alpha_2}}\right), \left(0, -\sqrt{\frac{V^2 - \alpha_1}{3\alpha_2}}\right), (\sqrt{V^2 - 1}, 0), \\ & \left(\sqrt{V^2 - 1}, \sqrt{\frac{V^2 - \alpha_1}{3\alpha_2}}\right), \left(\sqrt{V^2 - 1}, -\sqrt{\frac{V^2 - \alpha_1}{3\alpha_2}}\right), \\ & \left(-\sqrt{V^2 - 1}, 0\right), \left(-\sqrt{V^2 - 1}, \sqrt{\frac{V^2 - \alpha_1}{3\alpha_2}}\right), \left(-\sqrt{V^2 - 1}, -\sqrt{\frac{V^2 - \alpha_1}{3\alpha_2}}\right). \end{aligned}$$

下面主要讨论正常频散(即 $\alpha_1 < 1$)^[12] 的情况, 反常频散(即 $\alpha_1 > 1$)^[12] 的情况完全类似, 故这里忽略.

1) 当 $\alpha_1 < 1, V^2 > 1, \alpha_2 > 0$ 时,

$$(0,0), \left(\sqrt{V^2 - 1}, \sqrt{\frac{V^2 - \alpha_1}{3\alpha_2}} \right), \left(-\sqrt{V^2 - 1}, \sqrt{\frac{V^2 - \alpha_1}{3\alpha_2}} \right),$$

$$\left(\sqrt{V^2 - 1}, -\sqrt{\frac{V^2 - \alpha_1}{3\alpha_2}} \right), \left(-\sqrt{V^2 - 1}, -\sqrt{\frac{V^2 - \alpha_1}{3\alpha_2}} \right)$$

是鞍点,

$$\left(0, \sqrt{\frac{V^2 - \alpha_1}{3\alpha_2}} \right), \left(0, -\sqrt{\frac{V^2 - \alpha_1}{3\alpha_2}} \right), (\sqrt{V^2 - 1}, 0), (-\sqrt{V^2 - 1}, 0)$$

是中心点,如图 1 所示.此时,在相平面上存在从鞍点 $(0, 0)$ 出发围绕中心点 $(\sqrt{V^2 - 1}, 0)$ 和 $(-\sqrt{V^2 - 1}, 0)$ 的同宿轨道.这类同宿轨道位于 y 轴的左、右两侧,在两条奇直线之间,且对 x 轴是对称的,其可无限接近于在奇直线上的其它鞍点,但不能越过它们.以此作为极限条件,由同宿轨道方程(17)(当 $h=0$ 时),计算得到参数 α_2 的极限值为

$$\alpha_2 = \frac{1}{3} \frac{(V^2 - \alpha_1)^2}{(V^2 - 1)^2}.$$

这表明,这类同宿轨道的存在条件为

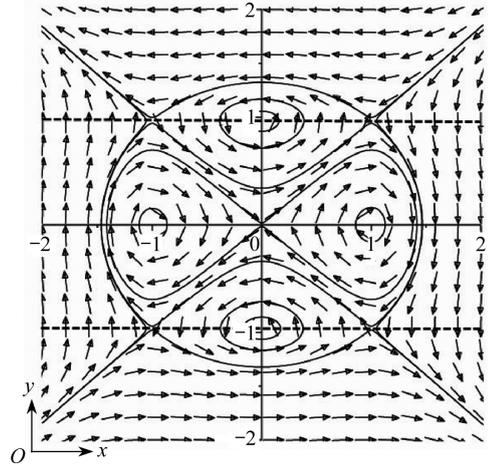
$$0 < \alpha_2 < \frac{1}{3} \frac{(V^2 - \alpha_1)^2}{(V^2 - 1)^2}.$$

因此,由动力系统的同宿轨道与偏微分方程的孤立波解之间的关系可知,此时立方非线性微结构固体中存在对称钟型孤立波和反钟型孤立波,存在条件为

$$\alpha_1 < 1, V^2 > 1, 0 < \alpha_2 < \frac{1}{3} \frac{(V^2 - \alpha_1)^2}{(V^2 - 1)^2}.$$

在图 2 中,用数值积分方法绘制了在微尺度非线性效应作用下所形成的两种孤立波,并与无微尺度非线性效应时形成的孤立波(12)进行了比较.明显看出,此时形成的是对称钟型孤立波和反钟型孤立波,并随着微尺度非线性效应的增强(即随着 α_2 的增大),两种孤立波的宽度逐渐变窄而幅度保持不变.为表征孤立波的宽度随微尺度非线性效应的定量变化关系,在图 3 中给出了孤立波的宽度增加量 $\Delta d = 2[\xi_p(u_0) - \xi_{12}(u_0)]$ (其中 $\xi_p(u_0)$ 是存在微尺度非线性效应时形成的对称孤立波在某一 u_0 处的半宽度, $\xi_{12}(u_0)$ 是孤立波(12)在 u_0 处的半宽度)随 α_2 的变化曲线.由图可见,在 α_2 的变化范围 $0 < \alpha_2 < (V^2 - \alpha_1)^2 / (3(V^2 - 1)^2)$ 内,宽度增加量 Δd 随 α_2 的增加而单调递减.这一结果推广了文献[12]的结果,证明了适当条件下微结构固体中不但可以存在非对称孤立波,还可以存在对称钟型和反钟型孤立波.

2) 当 $\alpha_1 < 1, V^2 > 1, \alpha_2 < 0$ 时, $(0,0)$ 是鞍点, $(\sqrt{V^2 - 1}, 0), (-\sqrt{V^2 - 1}, 0)$ 是中心点,其余平衡点及奇直线不存在,如图 4 所示.此时,在相平面上存在从鞍点 $(0,0)$ 出发围绕中心点 $(\sqrt{V^2 - 1}, 0)$ 和 $(-\sqrt{V^2 - 1}, 0)$ 的同宿轨道.因此,在条件 $\alpha_1 < 1, V^2 > 1, \alpha_2 < 0$ 下,微结构固体中也存在对称钟型孤立波和反钟型孤立波.在图 5 中绘制了所形成的两种孤立波,并与无

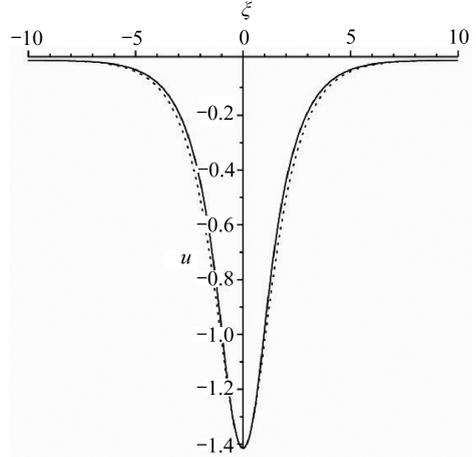
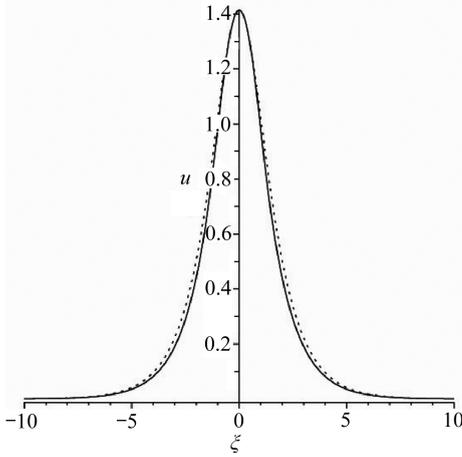


$$\alpha_1 = 0.6, \alpha_2 = 0.5, V = \sqrt{2}$$

图 1 系统(16)的相图

Fig.1 Phase diagram of system (16)

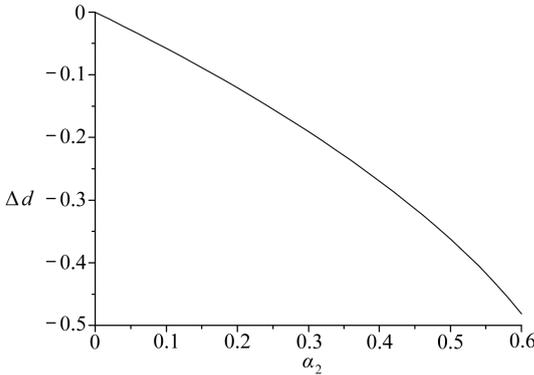
微尺度非线性效应时形成的孤立波(12)进行了比较.可看出,此时形成的也是对称钟型孤立波和反钟型孤立波,且随着微尺度非线性效应的负增强(即随着 $-\alpha_2$ 的增大),它们的宽度逐渐变宽而幅度保持不变.图6显示了随着 α_2 的负增大,孤立波的宽度逐渐变宽的定量关系.可见,孤立波的宽度增加量 Δd 随 α_2 的负增大而单调递增.



$$\alpha_1 = 0.6, \alpha_2 = 0.5, V = \sqrt{2}$$

图2 存在微尺度非线性效应时形成的孤立波(实线)与孤立波(12)(点线)的比较

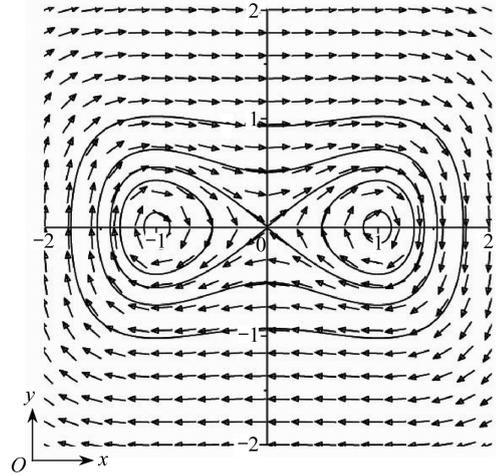
Fig.2 Comparison between the formed solitary wave with microscale nonlinear effect (solid line) and solitary wave (12) (dotted line)



$$\alpha_1 = 0.6, V = \sqrt{2}, u_0 = 0.2763$$

图3 宽度增加量 Δd 随 α_2 的变化曲线

Fig.3 Width increment Δd vs. α_2



$$\alpha_1 = 0.6, \alpha_2 = -0.5, V = \sqrt{2}$$

图4 系统(16)的相图

Fig.4 Phase diagram of system (16)

3) 当 $\alpha_1 < 1, \alpha_1 < V^2 < 1, \alpha_2 > 0$ 时, $\left(0, \sqrt{\frac{V^2 - \alpha_1}{3\alpha_2}}\right), \left(0, -\sqrt{\frac{V^2 - \alpha_1}{3\alpha_2}}\right)$ 是鞍点, $(0, 0)$ 是中心点,其余平衡点及奇直线不存在.此时不存在同宿轨道.

4) 当 $\alpha_1 < 1, \alpha_1 < V^2 < 1, \alpha_2 < 0$ 时, $(0, 0)$ 是中心点,其余平衡点及奇直线不存在.此时不存在同宿轨道.

5) 当 $\alpha_1 < 1, V^2 < \alpha_1, \alpha_2 > 0$ 时, $(0,0)$ 是鞍点, 其余平衡点及奇直线不存在, 此时不存在同宿轨道。

6) 当 $\alpha_1 < 1, V^2 < \alpha_1, \alpha_2 < 0$ 时, $(0,0)$ 是鞍点, $\left(0, \sqrt{\frac{V^2 - \alpha_1}{3\alpha_2}}\right), \left(0, -\sqrt{\frac{V^2 - \alpha_1}{3\alpha_2}}\right)$ 是中心点, 其余平衡点及奇直线不存在, 此时不存在与孤立波解相对应的同宿轨道。

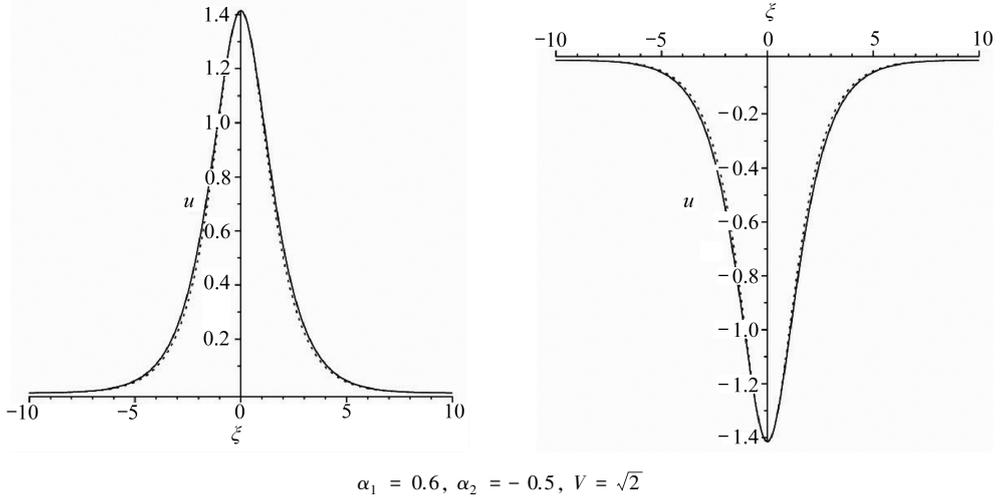
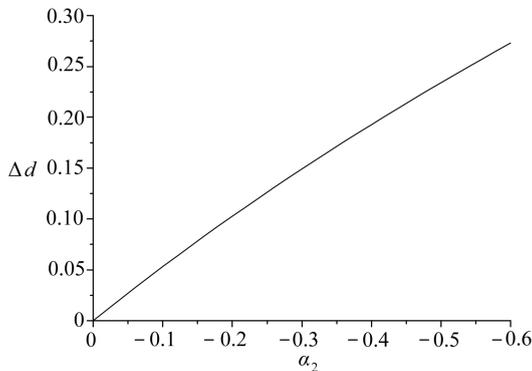


图5 存在微尺度非线性效应时形成的孤立波(实线)与孤立波(12)(点线)的比较

Fig.5 Comparison between the formed solitary wave with microscale nonlinear effect (solid line) and solitary wave (12) (dotted line)



$$\alpha_1 = 0.6, V = \sqrt{2}, u_0 = 0.3768$$

图6 宽度增加量 Δd 随 α_2 的变化曲线

Fig.6 Width increment Δd vs. α_2

3 结 论

若固体材料不具有微尺度非线性效应, 则由于宏观尺度非线性效应与微尺度频散效应的互相平衡而形成一种对称钟型孤立波(即式(12)). 但由于微尺度非线性效应的存在, 破坏这种平衡, 重新平衡后可形成一种新的孤立波. 本文考虑固体材料的宏观尺度立方非线性效应、微尺度立方非线性效应以及微尺度频散效应, 并根据修正的 Mindlin 理论, 建立了一维微结构固体中纵波传播的一种新模型. 用动力系统的定性分析方法, 证明了微结构参数 α_1, α_2 以及孤

立波传播速度 V 满足适当条件时,立方非线性微结构固体中可以存在对称钟型孤立波和对称反钟型孤立波并给出了它们的存在条件.用数值方法绘制微结构固体中所形成的钟型与反钟型孤立波图像并与无微尺度非线性效应时形成的孤立波图像进行了比较,结果显示随着微尺度立方非线性效应的增强(或负增强),孤立波的宽度变窄(或变宽),但幅度保持不变.同时还给出了孤立波的宽度增加量随微尺度非线性效应而变化的定量关系.本文结论推广了已有的结论,且对固体材料性能的无损检测与评价具有很好的理论指导意义.

参考文献(References):

- [1] Mindlin R D. Micro-structure in linear elasticity[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1964, **16**(1): 51-78.
- [2] Engelbrecht J, Khamidullin Y. On the possible amplification of nonlinear seismic waves[J]. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 1988, **50**(1): 39-45.
- [3] Erofeev V I. *Wave Processes in Solids With Microstructure*[M]. Singapore: World Scientific, 2003: 101-223.
- [4] 程昌钧. 理性力学在中国的传播与发展[J]. 力学与实践, 2008, **30**(1): 10-17.(CHENG Chang-jun. The dissemination and development of rational mechanics in China[J]. *Mechanics in Engineering*, 2008, **30**(1): 10-17.(in Chinese))
- [5] 戴天民. 对带有微结构的弹性固体理论的再研究[J]. 应用数学和力学, 2002, **23**(8): 771-777.(DAI Tian-min. Restudy of theories for elastic solids with microstructure[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, **23**(8): 771-777.(in Chinese))
- [6] 陈少华, 王自强. 应变梯度理论进展[J]. 力学进展, 2003, **33**(2): 207-216.(CHEN Shao-hua, WANG Zi-qiang. Advances in strain gradient theory[J]. *Advances in Mechanics*, 2003, **33**(2): 207-216.(in Chinese))
- [7] 胡更开, 刘晓宁, 荀飞. 非均匀微极介质的有效性质分析[J]. 力学进展, 2004, **34**(2): 195-214.(HU Geng-kai, LIU Xiao-ning, XUN Fei. Micromechanics of heterogeneous micropolar mediums[J]. *Advances in Mechanics*, 2004, **34**(2): 195-214.(in Chinese))
- [8] Engelbrecht J, Pastrone F. Wave in microstructured solids with nonlinearities in microscale [J]. *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences, Physics, Mathematics*, 2003, **52**(1): 12-20.
- [9] Porubov A V, Pastrone F. Nonlinear bell-shaped and kink-shaped strain waves in microstructured solids[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2004, **39**(8): 1289-1299.
- [10] Porubov A V, Aero E L, Maugin G A. Two approaches to study essentially nonlinear and dispersive properties of the internal structure of materials[J]. *Physical Review E*, 2009, **79**: 046608-046620.
- [11] Janno J, Engelbrecht J. An inverse solitary wave problem related to microstructured materials [J]. *Inverse Problems*, 2005, **21**(6): 2019-2034.
- [12] Janno J, Engelbrecht J. Solitary waves in nonlinear microstructured materials[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2005, **38**(23): 5159-5172.
- [13] Salupere A, Tamm K. On the influence of material properties on the wave propagation in Mindlin-type microstructured solids[J]. *Wave Motion*, 2013, **50**(7): 1127-1139.

Symmetric Solitary Waves and Their Existence Conditions in Cubic Nonlinear Microstructured Solids

Naranmandula, Ereduncang

*(College of Physics and Electronic Information, Inner Mongolia University for
the Nationalities, Tongliao, Inner Mongolia 028043, P.R.China)*

Abstract: In view of the macroscale cubic nonlinear effect, the microscale cubic nonlinear effect and the microscale dispersion effect of solid materials, a new model for the longitudinal wave propagation in 1D microstructured solids was established based on the modified Mindlin theory. The qualitative analysis method was applied to the dynamical system, the existence of symmetric bell and anti-bell type solitary waves in the cubic nonlinear microstructured solid was proved under appropriate conditions, and the existence conditions of the 2 solitary waves were given. The microscale cubic nonlinear effect on the bell and anti-bell type solitary waves was analyzed with the numerical method. The results indicate that the widths of the 2 solitary waves decreases (or increases) with the rise (or fall) of the microscale nonlinear effect while the amplitudes of the 2 solitary waves remain unchanged.

Key words: Mindlin theory; microstructured solid; solitary wave; existence condition

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11462019; 10862003)