

随机分数阶微分方程初值问题基于 模拟方程法的数值求解*

孙春艳, 徐伟

(西北工业大学 理学院 应用数学系, 西安 710072)

(本刊编委邓子辰推荐)

摘要: 基于模拟方程法,提出了一种求解随机分数阶微分方程初值问题的数值方法.考虑含两个分数阶导数项的微分方程,引入两个线性的、非耦合的随机模拟方程,利用它们解构原方程,借助 Laplace 变换及逆变换,得到方程解的积分表达式,同时建立起两个模拟方程之间的联系,结合初始状态,得到求解随机微分方程初值问题的数值迭代算法.作为特例,对于含两个分数阶导数项线性常微分方程的初值问题,给出了基于模拟方程法的数值解法的显式结果.该方法是稳定的,它的误差仅存在于积分近似时的截断误差和计算软件的舍入误差.应用实例说明了数值方法在确定和随机情形的有效性和准确性.

关键词: 分数阶导数; 随机分数阶微分方程; 模拟方程; 初值问题

中图分类号: O322; O324 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.10.003

引言

随着分数阶微积分理论的发展^[1-5],分数阶微分方程渐渐成为复杂力学与物理过程数学建模的重要工具之一.Bagley 等^[6-8]研究发现,分数阶微积分可以作为粘弹性材料本构关系的理想模型.Koeller 等^[9-10]讨论了分数阶微积分在粘弹性力学中的应用.近年来, Xu 等^[11-13]分析了分数阶系统的混沌、同步和控制.目前,在分数阶微分方程求解方面少有系统性的结果,往往只有适用于一些特殊方程的特定求解方法,带有一定局限性,如 Laplace 变换法^[7-9]、Fourier 变换法^[14]、特征向量展开法^[15]和平均方法^[16-17]等.

分数阶微分方程的数值求解已有了一些结果,Diethelm 和 Walz^[18]提出外推方法来提高数值方法的精度.随后,Diethelm 等^[19]提出了 Adams 方法、预估-校正方法,并给出了方法的程序实现和误差分析.Ford 和 Simpson^[20]针对非线性分数阶微分方程,分析了固定存储原则,提出了嵌套网络方案,给出了数值方法的变步长实现,以合理的计算花费获得了更好的逼近解.Cuesta 等^[21]获得了 Banach 空间中求解分数阶积分微分方程的 trapezoidal 公式.现有的数值算

* 收稿日期: 2014-05-19; 修订日期: 2014-09-08

基金项目: 国家自然科学基金(11772233)

作者简介: 孙春艳(1984—),女,山东威海人,博士生(通讯作者. E-mail: sunchunyan@mail.nwpu.edu.cn).

法中一些难题仍未得到彻底解决,如长时间历程及大空间域的计算等,尚未形成成熟的数值计算软件,所以,发展新的数值算法,特别是在保证计算可靠性和精度的前提下,提高计算效率,解决分数阶微分方程数值算法计算量和存储量过大的问题,成为了数值方法研究的主要任务.

模拟方程法(analog equation method),是 Katsikadelis 等^[22-24]基于边界元法(boundary element method,主要用于求解扩散波动方程的边值问题)提出的,用于对非线性常微分及偏微分方程进行数值模拟.模拟方程法利用一组等价的、非耦合的模拟方程的求解来得到原微分方程的数值解.

本文旨在建立一种随机分数阶微分方程初值问题的数值求解方法.考虑含两个分数阶导数项的微分方程,基于模拟方程法理论,引入两个随机模拟方程.利用 Laplace 变换及其逆变换,得到未知函数的积分表达式,并建立两个模拟方程的联系.结合微分方程的初始条件,导出未知函数的初始状态,得到求解微分方程组初值问题的数值算法.作为特例,给出含两个分数阶导数项的线性常微分方程基于模拟方程法的数值方法.以算例说明该数值算法的有效性和准确性.

1 算法分析

不失一般性,考虑含两个分数阶导数项的随机微分方程:

$$g(D^{\alpha_1}x(t), D^{\alpha_2}x(t), x(t)) = f(t), \quad (1)$$

其中, g 是一个是线性或非线性的函数; $f(t)$ 是方程的输入,作为对 Katsikadelis^[24]工作的推广,它可以是确定性函数或平稳随机过程;阶数满足 $0 < \alpha_2 < \alpha_1 \leq 2$, 初始条件为

$$x(0) = x_0, \quad 0 < \alpha_1 \leq 1, \quad (2a)$$

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad 1 < \alpha_1 \leq 2. \quad (2b)$$

利用模拟方程法的思想^[23-24],构造模拟方程

$$D^{\alpha_1}x(t) = f_1(t), \quad (3)$$

$$D^{\alpha_2}x(t) = f_2(t), \quad (4)$$

$f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 是未知函数,在随机情形,它们都是随机过程.需要说明的是,模拟方程的阶数可以与原方程中分数阶导数的阶数一致,也可以是不同于 α_1 和 α_2 的实数.这里对任意 $\alpha \in R$,引入符号 $c_\alpha = \text{ceiling}(\alpha)$ 表示大于或等于 α 的最小整数,只要阶数满足 $0 < \beta_1 \leq c_{\alpha_1}, 0 < \beta_2 \leq c_{\alpha_2}$,且此时的分数阶导数 $D^{\beta_1}x(t)$ 和 $D^{\beta_2}x(t)$ 存在并连续,模拟方程可以选择为

$$D^{\beta_1}x(t) = f_1(t), \quad (5)$$

$$D^{\beta_2}x(t) = f_2(t). \quad (6)$$

本文中,分数阶导数采用 Caputo 形式,这样可以充分地保留分数阶微分方程各初始条件的物理意义.分数阶导数的 Caputo 定义式为

$${}_a^c D_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} x^m(\tau) d\tau, \quad m-1 \leq \alpha < m, \quad (7)$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数, m 是整数, a 和 t 分别是微分算子的左右极限,称为“端点”.取左端点 $a = 0$,考虑 $m = 2$ 的情形,引入频域中变量 s ,对方程(3)、(4)进行 Laplace 变换,得到

$$X(s) = \frac{1}{s} x_0 + (c_{\alpha_1} - 1) \frac{1}{s^2} \dot{x}_0 + \frac{1}{s^{\alpha_1}} F_1(s), \quad (8)$$

$$X(s) = \frac{1}{s} x_0 + (c_{\alpha_2} - 1) \frac{1}{s^2} \dot{x}_0 + \frac{1}{s^{\alpha_2}} F_2(s), \quad (9)$$

其中, $X(s)$, $F_1(s)$ 和 $F_2(s)$ 分别为 $x(t)$, $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的 Laplace 变换, 联立式(8)和式(9), 得到

$$F_2(s) = (c_{\alpha_1} - c_{\alpha_2}) \frac{1}{s^{2-\alpha_2}} \dot{x}_0 + \frac{1}{s^{\alpha_1-\alpha_2}} F_1(s). \quad (10)$$

对式(8)和式(10)分别进行逆 Laplace 变换, 有

$$x(t) = x_0 + (c_{\alpha_1} - 1) \dot{x}_0 t + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^t f_1(\tau) (t - \tau)^{\alpha_1-1} d\tau, \quad (11)$$

$$f_2(t) = (c_{\alpha_1} - c_{\alpha_2}) \frac{t^{1-\alpha_2}}{\Gamma(2-\alpha_2)} \dot{x}_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1-\alpha_2)} \int_0^t f_1(\tau) (t - \tau)^{\alpha_1-\alpha_2-1} d\tau. \quad (12)$$

式(11)建立了起微分方程的解与模拟方程中未知函数的联系, 式(12)给出了两个未知函数的关系.

所考虑的时间区间为 $[0, T]$, 将它等分为 N 个长度为 $h = T/N$ 的时间间隔, 每一个小的时间历程内, $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 被认为是常值函数, 取值为其在时间区间左右端点函数值的均值. 记 $f_1(t)$ 在区间 $[(k-1)h, kh]$, $k = 1, 2, \dots, n, n = 1, 2, \dots, N$ 上的均值为 $\bar{f}_{1,k}$, 在时刻 $t_n = nh, n = 1, 2, \dots, N$, 函数 $x(t)$, $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的取值分别记为 $x_n, f_{1,n}(t)$ 和 $f_{2,n}(t)$, 利用积分的定义, 式(11)可以写为

$$x_n = x_0 + (c_{\alpha_1} - 1) nh \dot{x}_0 + b \sum_{r=1}^{n-1} ((n+1-r)^{\alpha_1} - (n-r)^{\alpha_1}) \bar{f}_{1,r} + \frac{b}{2} (f_{1,n-1} + f_{1,n}), \quad (13)$$

其中的常数 $b = h^{\alpha_1} / (\alpha_1 \Gamma(\alpha_1))$, 且 $\bar{f}_{1,r} = (f_{1,r-1} + f_{1,r})/2$. 将式(13)改写为

$$-\frac{b}{2} f_{1,n} + x_n = x_0 + (c_{\alpha_1} - 1) nh \dot{x}_0 + b \sum_{r=1}^{n-1} ((n+1-r)^{\alpha_1} - (n-r)^{\alpha_1}) \bar{f}_{1,r} + \frac{b}{2} f_{1,n-1}. \quad (14)$$

用同样的方法处理式(12)得到

$$-\frac{e}{2} f_{1,n} + f_{2,n} = (c_{\alpha_1} - c_{\alpha_2}) n^{1-\alpha_2} \dot{x}_0 + e \sum_{r=1}^{n-1} ((n+1-r)^{\alpha_1-\alpha_2} - (n-r)^{\alpha_1-\alpha_2}) \bar{f}_{1,r} + \frac{e}{2} f_{1,n-1}, \quad (15)$$

其中常数

$$d = \frac{h^{1-\alpha_2}}{\Gamma(2-\alpha_2)}, \quad e = \frac{h^{\alpha_1-\alpha_2}}{(\alpha_1-\alpha_2)\Gamma(\alpha_1-\alpha_2)}.$$

此外, 将式(1)在时刻 t_n 写成

$$g(f_{1,n}, f_{2,n}, x_n) = f_n, \quad (16)$$

其中 f_n 为 $f(t)$ 在时刻 t_n 的取值. 联立式(14)、式(15)及式(16), 可以得到 t_n 时刻未知函数 $x(t)$, $f_1(t)$ 及 $f_2(t)$ 的数值解. 为了完成算法, 需要 $D^{\alpha_1}x(t)$ 的初值 $f_{1,0}$, 先对 $D^{\alpha_2}x(t)$ 的初值 $f_{2,0}$ 分情况讨论^[1,4]:

$$f_{2,0} \approx \begin{cases} \frac{\Gamma(2 - \alpha_1)}{\Gamma(2 - \alpha_2)} h^{\alpha_1 - \alpha_2} \frac{2 - 2^{1 - \alpha_2}}{2 - 2^{1 - \alpha_1}} f_{1,0}, & 0 < \alpha_2 < \alpha_1 \leq 1, \\ \frac{\Gamma(3 - \alpha_1)}{\Gamma(3 - \alpha_2)} h^{\alpha_1 - \alpha_2} \frac{2 - 2^{2 - \alpha_2}}{2 - 2^{2 - \alpha_1}} f_{1,0}, & 1 < \alpha_2 < \alpha_1 \leq 2, \\ \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha_2)} h^{1 - \alpha_2} (2 - 2^{1 - \alpha_2}) \dot{x}_0, & 0 < \alpha_2 \leq 1, 1 < \alpha_1 \leq 2. \end{cases} \quad (17)$$

将式(17)中的 $f_{2,0}$ 代入式(16)并解方程,即可得到各种情形下的 $f_{1,0}$ 。

以上是模拟方程法对于一般的含两个分数阶导数项的随机微分方程的数值算法,作为特例,考虑线性分数阶常微分方程:

$$c_1 D^{\alpha_1} x(t) + c_2 D^{\alpha_2} x(t) + c_3 x(t) = f(t), \quad (18)$$

其中 c_1, c_2 及 c_3 为常数,且 $c_1 \neq 0$,阶数满足 $0 < \alpha_2 < \alpha_1 \leq 2$.微分方程的初始条件为式(2a)和式(2b),依然采用模拟方程(3)、(4),在时刻 $t_n = nh$,有

$$c_1 f_{1,n} + c_2 f_{2,n} + c_3 x_n = f_n. \quad (19)$$

按照上述的算法推导过程,要得到时刻 t_n 的未知函数的数值解,只需要求解线性代数方程组:

$$\begin{bmatrix} f_{1,n} \\ f_{2,n} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -b/2 & 0 & 1 \\ -e/2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} f_n \\ x_0 + (c_{\alpha_1} - 1)nh\dot{x}_0 + b \sum_{r=1}^{n-1} ((n+1-r)^{\alpha_1} - (n-r)^{\alpha_1}) \bar{f}_{1,r} + \frac{b}{2} f_{1,n-1} \\ (c_{\alpha_1} - c_{\alpha_2})n^{1-\alpha_2} d\dot{x}_0 + e \sum_{r=1}^{n-1} ((n+1-r)^{\alpha_1 - \alpha_2} - (n-r)^{\alpha_1 - \alpha_2}) \bar{f}_{1,r} + \frac{e}{2} f_{1,n-1} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

相应地,此时的 $f_{1,0}$ 可以按照如下的规则得到

$$f_{1,0} \approx \begin{cases} \left(c_1 + c_2 \frac{\Gamma(2 - \alpha_1)}{\Gamma(2 - \alpha_2)} \frac{(2 - 2^{1 - \alpha_2})}{(2 - 2^{1 - \alpha_1})} h^{\alpha_1 - \alpha_2} \right)^{-1} (f_0 - c_3 x_0), & 0 < \alpha_2 < \alpha_1 \leq 1, \\ \left(c_1 + c_2 \frac{\Gamma(3 - \alpha_1)}{\Gamma(3 - \alpha_2)} \frac{(2 - 2^{2 - \alpha_2})}{(2 - 2^{2 - \alpha_1})} h^{\alpha_1 - \alpha_2} \right)^{-1} (f_0 - c_3 x_0), & 1 < \alpha_2 < \alpha_1 \leq 2, \\ \frac{\Gamma(2 - \alpha_2) (f_0 - c_3 x_0) - c_2 h^{1 - \alpha_2} (2 - 2^{1 - \alpha_2}) \dot{x}_0}{c_1 \Gamma(2 - \alpha_2)}, & 0 < \alpha_2 \leq 1, 1 < \alpha_1 \leq 2. \end{cases} \quad (21)$$

2 应用实例

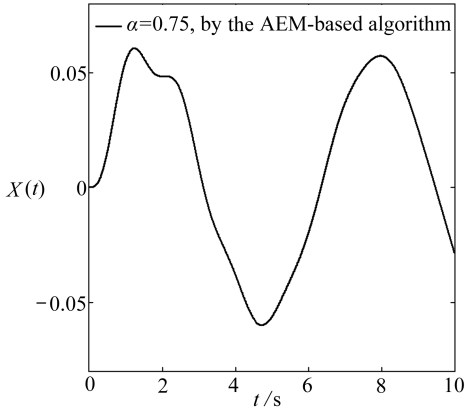
在应用领域中,很多问题都可以归纳为含分数阶导数项的系统,本文采用确定及随机的分数阶系统作为算例,来说明所给出数值方法的有效性。

2.1 实例 1

考虑含 1 个分数阶导数项的线性系统,它受到 1 个谐和的外部激励:

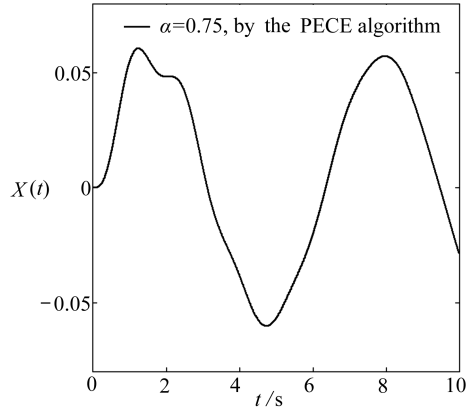
$$m\ddot{X}(t) + cD^\alpha X(t) + \omega_0^2 X(t) = \sin(t), \quad (22)$$

其中参数 $m = 1, c = 1, \omega_0^2 = 18$; 初始条件 $x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0$. 为了验证所给出的数值算法, 对系统 (22) 的响应, 分别应用基于模拟方程法的数值算法和经典的 PECE 法^[19] 进行计算, 数值模拟的时间长度 $T = 10$, 步长 $h = 0.001$. 当阶数 α 取不同值时, 图 1、图 2 给出了两种方法得到的数值解的对比, 从中可以发现, 两种数值方法得到的结果一致.



(a) 基于模拟方程法的算法

(a) The AEM-based algorithm

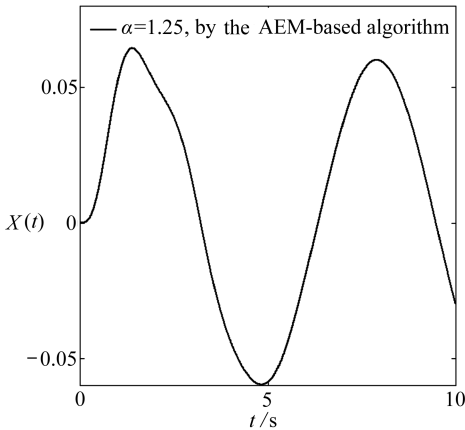


(b) PECE 法

(b) The PECE algorithm

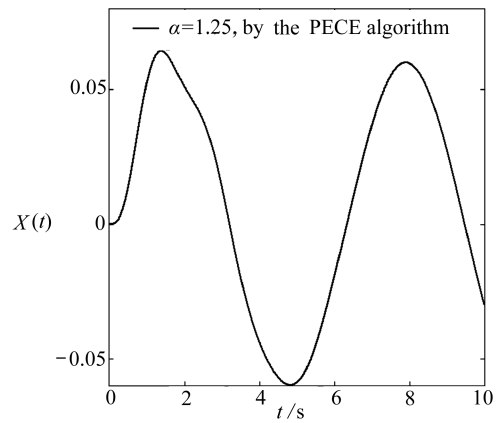
图 1 $\alpha = 0.75$ 时本文方法与 PECE 法得到的系统 (22) 的响应

Fig.1 Responses of system (22) obtained by the AEM-based algorithm and the PECE algorithm for $\alpha = 0.75$



(a) 基于模拟方程法的算法

(a) The AEM-based algorithm



(b) PECE 法

(b) The PECE algorithm

图 2 $\alpha = 1.25$ 时本文方法与 PECE 法得到的系统 (22) 的响应

Fig.2 Responses of system (22) obtained by the AEM-based algorithm and the PECE algorithm for $\alpha = 1.25$

2.2 实例 2

考虑含分数阶导数项的随机系统

$$\ddot{X} + cD^\alpha X(t) + \omega_0^2 X(t) = W(t), \quad (23)$$

其中参数 $c = 0.05, \omega_0 = 2$. $W(t)$ 代表 $D = 0.01$ 的 Gauss(高斯)白噪声. 为了验证基于模拟方程法

的数值算法对于随机系统(23)响应分析的有效性,一方面利用随机平均法,得到位移响应的稳态概率密度函数^[25]:

$$p_{st}(X) = \frac{N\omega_0}{2\pi D} \exp\left\{-\frac{c\omega_0^{1+\alpha} \sin(\alpha\pi/2) X^2}{2D}\right\}, \quad (24)$$

其中 $p_{st}(X)$ 表示位移的稳态概率密度函数, N 是归一化常数.另一方面,利用本文的方法对系统(24)进行随机模拟,得到稳态概率密度的模拟结果,时间长度 $T = 100\ 000$,步长 $h = 0.001$.对不同的 α ,图3给出解析结果与数值结果的对比.可以看出,解析结果与数值结果吻合很好,说明本文给出的方法对于分数阶随机系统是有效的.

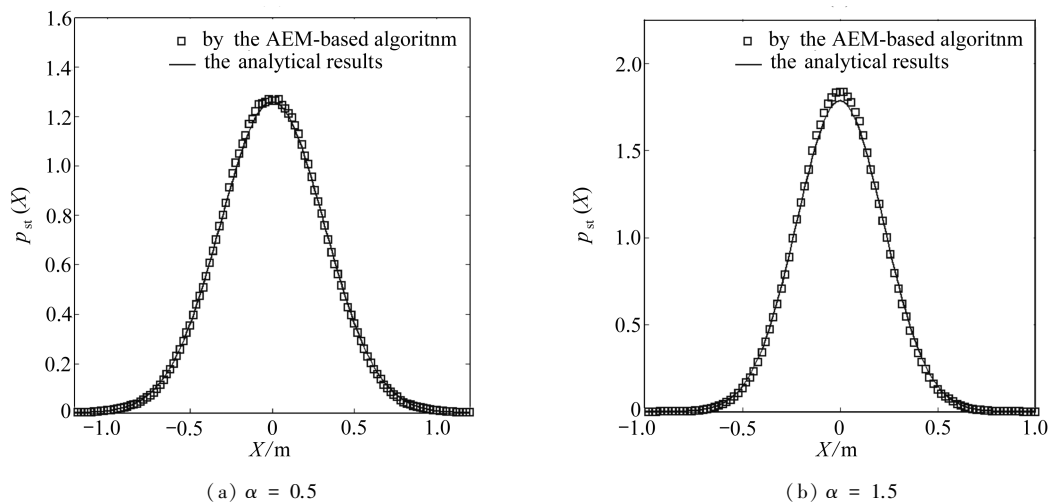


图3 随机系统(23)稳态响应数值解与解析解的对比

Fig.3 Comparison between the numerical and analytical solutions for stationary responses of system (23)

3 结 论

基于模拟方程法理论,提出了一种求解随机分数阶微分方程初值问题的数值方法.以含两个分数阶导数项的随机微分方程为对象,推广 Katsikadelis^[23-24]的做法,引入了两个含有未知函数的随机模拟方程,借助 Laplace 变换及其逆变换,得到了未知函数的积分表达式,同时建立起它们之间的联系.给出了计算未知函数初始状态的公式,并由此得到数值迭代算法.作为特例,考虑了含两项分数阶导数的线性常微分方程,给出了其初值问题数值解法的显式迭代算式.算例的结果表明,基于模拟方程法给出的分数阶微分方程的数值解法对确定和随机情形都是有效而准确的.值得指出的是,所给出的数值算法是稳定的,它的误差仅存在于积分近似时的截断误差和计算软件的舍入误差.此外,该算法可以直接推广到时变系数分数阶微分方程及含多项分数阶导数的分数阶微分方程初值问题的数值求解中.

参考文献 (References):

- [1] Oldham K B, Spanier J. *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*[M]. New York: Academic Press, 1974.
- [2] Miller K S, Ross B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*[M]. New York: John Wiley & Sons Inc, 1993.
- [3] Podlubny I. *Fractional Differential Equations*[M]. New York: Academic Press, 1999.

- [4] Samko S G, Kilbas A A, Marichev O I. *Fractional Integrals and Derivatives*[M]. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [5] Mandelbrot B B. *The Fractal Geometry of Nature*[M]. New York: W H Freeman, 1982.
- [6] Bagley R L, Torvik P J. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity[J]. *Journal of Rheology*, 1983, **27**(3): 201-210.
- [7] Bagley R L, Torvik P J. Fractional calculus—a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures[J]. *AIAA Journal*, 1983, **21**(5): 741-748.
- [8] Bagley R L, Torvik P J. Fractional calculus in the transient analysis of viscoelastically damped structures[J]. *AIAA Journal*, 1985, **23**(6): 918-925.
- [9] Koeller R C. Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity[J]. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, 1984, **51**(2): 299-307.
- [10] Koeller R C, Wisconsin P. Polynomial operators, stieltjes convolution and fractional calculus in hereditary mechanics[J]. *Acta Mechanica*, 1986, **58**(3/4): 251-264.
- [11] Xu Y, Gu R C, Zhang H Q, Li D X. Chaos in diffusionless Lorenz system with a fractional order and its control[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2012, **22**(4). doi: 10.1142/S0218127412500885.
- [12] Xu Y, Li Y G, Liu D, Jia W T, Huang H. Responses of Duffing oscillator with fractional damping and random phase[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2013, **74**(3): 745-753.
- [13] Xu Y, Wang H. Synchronization of fractional-order chaotic systems with Gaussian fluctuation by sliding mode control[J]. *Abstract and Applied Analysis*, 2013, **2013**. Article ID: 948782.
- [14] Gaul L, Klein P, Kempfle S. Impulse-response function of an oscillator with fractional derivative in damping description[J]. *Mechanics Research Communications*, 1989, **16**(5): 297-305.
- [15] Suarez L E, Shokoh A. An eigenvector expansion method for the solution of motion containing fractional derivatives[J]. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, 1997, **64**(3): 629-635.
- [16] 李根国, 朱正佑, 程昌钧. 具有分数导数型本构关系的粘弹性柱的动力稳定性[J]. *应用数学和力学*, 2001, **22**(3): 250-258. (LI Gen-guo, ZHU Zheng-you, CHENG Chang-jun. Dynamical stability of viscoelastic column with fractional derivative constitutive relation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2001, **22**(3): 250-258. (in Chinese))
- [17] Wahi P, Chatterjee A. Averaging oscillations with small fractional damping and delayed terms[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2004, **38**(1/4): 3-22.
- [18] Diethelm K, Walz G. Numerical solution of fractional order differential equations by extrapolation[J]. *Numerical Algorithms*, 1997, **16**(3/4): 231-253.
- [19] Diethelm K, Ford N J, Freed A D. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2002, **29**(1/4): 3-22.
- [20] Ford N J, Simpson C. The numerical solution of fractional differential equations: speed versus accuracy[J]. *Numerical Algorithms*, 2001, **26**(4): 333-346.
- [21] Cuesta E, Palencia C A. Fractional trapezoidal rule for integro-differential equations of fractional order in Banach spaces[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2003, **45**(2/3): 139-159.
- [22] Katsikadelis J T, Nerantzaki M S. The boundary element method for nonlinear problems[J]. *Engineering Analysis of Boundary Elements*, 1999, **23**(5/6): 365-373.
- [23] Katsikadelis J T. The analog equation method: a boundary-only integral equation method for nonlinear static and dynamic problems in general bodies[J]. *Theoretical and Applied Me-*

chanics, 2002(27): 13-38.

- [24] Katsikadelis J T. Numerical solution of multi-term fractional differential equations[J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, **89**(7): 593-608.
- [25] 孙春艳, 徐伟. 分数阶导数阻尼下非线性随机振动结构响应的功率谱密度估计[J]. *应用力学学报*, 2013, **30**(3): 401-405. (SUN Chun-yan, XU Wei. Response power spectral density estimate of a fractionally damped nonlinear oscillator[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2013, **30**(3): 401-405. (in Chinese))

An Analog Equation Method-Based Numerical Scheme for Initial Value Problems of Stochastic Fractional Differential Equations

SUN Chun-yan, XU Wei

(*Department of Applied Mathematics, School of Natural and Applied Sciences, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P.R.China*)

(Recommended by DENG Zi-chen, M. AMM Editorial Board)

Abstract: An analog-equation-method (AEM)-based numerical scheme was proposed for initial value problems of stochastic fractional differential equations with 2 fractional derivative terms. 2 stochastic analog equations comprising respective undetermined functions were introduced, to convert the problem to a fractional differential equation with only 1 fractional derivative term. The Laplace transform and its inverse were employed to get the integration representations for the solution to the fractional differential equation and establish the relation between the 2 analog equations. In view of the initial conditions, an iterative algorithm to solve the initial value problem of the stochastic fractional differential equation was obtained. In a typical case, the numerical solution to a linear stochastic ordinary differential equation with 2 fractional derivative terms was derived based on the AEM. The numerical results of both the definite and stochastic systems demonstrate the effectiveness, stability and accuracy of the presented AEM scheme, of which the error only lies in the truncation error of the integration approximation and the rounding error of the computation software.

Key words: fractional derivative; stochastic fractional differential equation; analog equation; initial value problem

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11772233)