

复模态正交性理论的异常现象 及对策分析*

张 森¹, 于 澜¹, 鞠 伟²

(1. 长春工程学院 理学院, 长春 130012;
2. 中国第一汽车股份有限公司 技术中心, 长春 130011)

摘要: 利用复模态正交性理论的数值实验发现并提出了标号现象.首先根据复模态理论在两种状态空间格式下,对不同振动系统的状态向量解耦功能进行分析,其次提出了对称及非对称重频系统的状态向量正交性的相关结论并进行了数值验证;继而发现并提出了标号现象,并指出了克服标号现象的方法;最后以工程应用中的一个常见的灵敏度分析问题为例,用数值算例的结果说明了忽略标号现象可能存在的风险.

关键词: 复模态理论; 标号现象; 正交性; 解耦; 对角化

中图分类号: O321; TB122 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.10.002

引 言

振动系统依据其阻尼矩阵的特点可分为无阻尼系统、比例阻尼系统及一般粘性阻尼系统3种.无阻尼系统的模态被称为实模态,系统频率可依据特征方程 $(\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 求解,得到实频率 ω_r 及相对应的实模态,其中 \mathbf{M} 为系统的质量矩阵, \mathbf{K} 为系统的刚度矩阵.当系统的阻尼矩阵满足 $\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$ (α, β 为实常数) 时,称为比例阻尼系统,其具有复频率 λ_r , λ_r 满足 $(\lambda_r^2 + \lambda_r \alpha) / (\lambda_r \beta + 1) = -\omega_r^2$, 这里的 ω_r 为该系所对应的无阻尼系统的实频率,同时比例阻尼系统与无阻尼系统具有相等的实模态向量.对于一般粘性阻尼系统,其频率与模态都是复值的,该系统的特征问题可表示为 $(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 为了将系统特征问题转化为实值矩阵的一般特征问题,常将系统方程转化为状态空间形式,一种常见的状态方程形式为 $\mathbf{A}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{0}$, 其中 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$ 和 $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix}$. 它的优势在于当系统性质矩阵为对称阵时,状态矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 也为对称阵,此时它的右状态向量系是正交的.另一种常见的状态方程形式为 $\mathbf{H}\mathbf{y} - \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$, 其中状态矩阵为 $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}$. 这种类型的状态矩阵常常不是对称的,这会导致它的右状态向量系不具有正交关系,但它的优点是振动系统的特征问题转化为一般矩阵 \mathbf{H} 的特征问题,而不是像前一种那样转化为关于矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的广义特征问题,这一点对系统处于亏损时

* 收稿日期: 2014-04-18; 修订日期: 2014-08-29

基金项目: 吉林省自然科学基金(201215115)

作者简介: 张森(1972—),男,长春人,副教授,博士(通讯作者. E-mail: zm7209@163.com).

的振动分析起到重要的作用^[1-2]。随着研究需要的扩大,对两种状态方程格式均需引入左状态向量才能满足工程应用的要求^[3-5]。讨论状态向量的正交性及其振动问题的意义在于 $2N$ 维的状态向量的前 N 维或后 N 维恰为原振动系统的模态向量,对状态向量所做的运算均可平移至模态向量,从而利用模态向量来实现原振动系统的分析与控制。

事实上,实模态在实际中是根本不存在的,而复模态从实验中是可以鉴别的。目前,很多结构分析领域中,如模态校正、损伤识别、优化设计和随机有限元等,还很少应用复模态分析,多数情况下仅依赖于无阻尼实模态分析。当然在实际问题中,为了能使用无阻尼实模态理论,常常在分析中合并复模态^[6]。近年来,陆续有一些文献得出有关非对称单频系统的状态向量正交性的结论^[7-9],但只在理论上作出推导,未曾在数值上进行验证,而且对重频系统状态向量正交性的研究还很少见。

由于复模态理论来自于工程实践,其复杂性也并非理论推导所能够完全揭示的。从理论上来说,由振动系统的左、右模态所构造的状态向量可解耦不同状态空间格式的状态矩阵,但由本文的研究可知,左、右状态向量的正交性理论存在异常现象:规范化后左、右状态向量在状态矩阵加权时的非正交元并未出现在对角线上,而是发生了错位,这极有可能导致振动分析与控制领域中关于正交性解耦后的结论出现偏差和谬误,在本文最后的数值算例中也说明了这一点,当然本文也给出了克服这种异常现象的方法。

1 复模态的正交性

实模态参数包括固有频率、阻尼比及实模态,其主要的应用是进行多自由度振动系统的动力响应分析。对于经典阻尼系统,利用无阻尼固有频率及实模态能够将阻尼矩阵对角化,因此使用振型迭加法即可实现振动系统的动力响应分析,并获得解析解。而对于非经典阻尼系统,由于无阻尼固有频率及实模态无法将阻尼矩阵对角化,因此只能使用直接积分法获得迭代后的近似解序列,或者是略去模态阻尼矩阵的非对角元,使之近似对角化,再使用经典阻尼系统的算法近似求解动力响应。事实上除了直接积分法,以上方法均依赖于实模态和固有频率,必须先将质量和刚度矩阵严格对角化,然后重点处理阻尼阵。但从其对角化的证明过程可知,这需要两个充分条件,首先是质量和刚度矩阵必须对称,其次是固有频率必须各不相同^[10]。若在实际应用中遇到非对称系统或重频系统,上述方法则不再适用。

复模态参数包括复频率及复模态向量,可用于直接解耦非经典阻尼系统,但其计算响应的过程相当复杂^[11-12]。如果将 N 维空间中的非经典阻尼系统转化到 $2N$ 维的状态空间中去描述,就可以利用复模态构造状态向量,使用状态向量对角化状态矩阵来实现状态方程的解耦,再把得到的响应解返回到 N 维空间中,即可求得用复模态参数表达的非经典阻尼系统响应的解析解。但从其对角化的证明过程可知,这仍然需要两个充分条件,一个是质量、刚度和阻尼矩阵必须对称,另一个是复频率必须各不相同^[13]。同样若在实际应用中遇到非对称系统或重频系统,上述方法也将不再适用。由此可见,无论实模态理论还是复模态理论,都需要仔细分析其正交性及对角化条件,才能处理好非对称系统及重频系统的振动分析。利用实、复模态参数正交性还可以求出多种灵敏度信息,并可进行模型修正、结构优化及损伤识别等。由于在工程应用中必须面对系统的对称性及重复频率问题,因此有必要考虑非对称或重复频率对系统模态参数正交性的影响。

1.1 复模态理论

描述自由度为 N 的线性阻尼离散系统的动力方程为

$$M\ddot{\mathbf{x}}(t) + C\dot{\mathbf{x}}(t) + K\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}, \quad (1)$$

式中 M, C 和 $K \in R^{N \times N}$ 分别为系统的质量、阻尼和刚度矩阵,其特征方程为 $\det[s^2 M + sC + K] = 0$,该方程有 $2N$ 个呈复共轭对出现的根 s_1, s_2, \dots, s_{2N} (其中 s_{i+1} 为 s_i 的共轭 ($i = 1, 3, \dots, 2N - 1$)),称为系统的频率;这些频率对应着两组呈复共轭对出现的模态向量,称满足 $s_i^2 M u_i + s_i C u_i + K u_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, 2N$) 的 u_1, u_2, \dots, u_{2N} 为系统(1)的右模态向量,其中 u_{i+1} 为 u_i 的共轭, $i = 1, 3, \dots, 2N - 1$;类似地,称满足 $s_i^2 v_i^H M + s_i v_i^H C + v_i^H K = 0^H$ ($i = 1, 2, \dots, 2N$) 的 v_1, v_2, \dots, v_{2N} 为系统(1)的左模态向量,其中 v_{i+1} 为 v_i 的共轭, $i = 1, 3, \dots, 2N - 1$, $(\cdot)^H$ 表示 (\cdot) 的共轭转置.当 M, C 和 K 为对称阵时,系统(1)的左、右模态向量是相同的,但当 M, C 和 K 不是对称矩阵时,左、右模态向量一般是不同的.

1.2 $F_1(A, B) = 0$ 型的状态方程

设

$$y(t) = \begin{Bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{Bmatrix} \in C^{2N}. \quad (2)$$

代入式(1),则该二阶系统将转化为如下一阶系统:

$$A \dot{y}(t) + B y(t) = 0, \quad (3)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}. \quad (4)$$

称 A 和 B 为系统的状态矩阵,则系统(1)对应的广义特征问题为

$$sA\varphi = -B\varphi, \quad (5)$$

记为 $F_1(A, B) = 0$ 型的状态方程,其中 s 为系统(1)的频率,

$$\varphi = \begin{Bmatrix} s u \\ u \end{Bmatrix} \in C^{2N} \quad (6)$$

为状态矩阵 A 和 B 的右状态向量,它的后 N 维恰为振动系统(1)的右模态向量.记 $\Phi = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_{2N}]$ 为右状态向量矩阵.

1.3 $F_1(A, B) = 0$ 型的状态向量的正交性

对于对称单频系统,系统的性质矩阵 M, C 和 K 对称,且频率全不相同,则这些右状态向量在 A 和 B 加权的条件下是内部正交的^[10],那么对右状态向量进行规范化,可将状态矩阵 A 和 B 对角化,有

$$\Phi^H A \Phi = E, \quad (7)$$

$$\Phi^H B \Phi = \Lambda = -\text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_{2N}). \quad (8)$$

对于对称重频系统,系统的性质矩阵 M, C 和 K 对称,但存在重复频率现象,根据酉空间理论这些右状态向量不能保证在 A 和 B 加权的条件下是正交的,虽然不同特征值所对应的右状态向量之间仍然是加权正交的^[10],但对于重频所对应的那些右状态向量则有可能不具有正交性,在非亏损的条件下可通过 Schmidt(施密特)正交化过程来实现正交性.

而在非对称系统中,即使频率全不相同,则这些状态向量在 A 和 B 加权的条件下也不能保证正交性^[7],因此有必要引入状态矩阵的左状态向量.

定义 1 设向量 $\psi_j \in C^{2N}$ 也与频率 s_j 相联系的,并满足

$$s_j \psi_j^H A + \psi_j^H B = 0, \quad (9)$$

其中

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{Bmatrix} s\mathbf{v} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix}, \quad (10)$$

称其为状态矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的左状态向量, 它的后 N 维恰为系统(1)的左模态向量. 记 $\boldsymbol{\Psi} = [\boldsymbol{\psi}_1 \ \boldsymbol{\psi}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{\psi}_{2N}]$ 为左状态向量矩阵. 如果系统为单频系统, 即频率全不相同, 则左、右状态向量在 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 加权的条件下是正交的, 那么对这些状态向量进行规范化, 可得

$$\boldsymbol{\Psi}^H \mathbf{A} \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{E}, \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\Psi}^H \mathbf{B} \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Lambda} = -\text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_{2N}). \quad (12)$$

此外, 在非对称系统中, 还存在重频现象, 根据酉空间理论这些左、右状态向量在 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 加权的条件下是不能保证正交性的. 虽然不同特征值所对应的左、右状态向量之间仍然是加权正交的^[7], 但对于重频所对应的那些左、右状态向量即可能并不正交, 此时 Schmidt 正交化技术的应用也存在困难, 这是因为相对于对称重频系统来说, 重频对应的所有状态向量满足的是同一特征方程, 根据酉空间理论实施正交化后仍然满足原特征方程, 但对于非对称重频系统左、右状态向量所满足的特征方程是不同的, 因此相应的正交化策略还有待进一步研究.

1.4 $F_2(\mathbf{H}) = \mathbf{0}$ 型的状态方程

设

$$\mathbf{y}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{Bmatrix} \in C^{2N}, \quad (13)$$

代入式(1), 则该二阶系统将转化为如下一阶系统:

$$\mathbf{H}\mathbf{y}(t) - \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{0}, \quad (14)$$

其中

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

称其为系统的状态矩阵. 原系统(1)的特征问题转化为状态矩阵 \mathbf{H} 的一般特征问题:

$$\mathbf{H}\mathbf{g} = s\mathbf{g}, \quad (16)$$

记为 $F_2(\mathbf{H}) = \mathbf{0}$ 型的状态方程, 其中 s 为系统(1)的频率,

$$\mathbf{g} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ s\mathbf{u} \end{Bmatrix} \in C^{2N}, \quad (17)$$

称其为状态矩阵 \mathbf{H} 的右状态向量, 它的前 N 维恰为振动系统(1)的右模态向量. 记 $\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1 \ \mathbf{g}_2 \ \cdots \ \mathbf{g}_{2N}]$ 为右状态向量矩阵. 由于状态矩阵 \mathbf{H} 是非对称的, 它的右状态向量之间无论如何也不具有加权正交性, 因此有必要引入状态矩阵 \mathbf{H} 的左状态向量.

1.5 $F_2(\mathbf{H}) = \mathbf{0}$ 型的状态向量的正交性

定义 2 对向量 $\mathbf{r}_k \in C^{2N}$, 如果有

$$\mathbf{r}_k^H \mathbf{H} = s_k \mathbf{r}_k^H, \quad (18)$$

则称 $\mathbf{r}_k (k = 1, 2, \dots, 2N)$ 为矩阵 \mathbf{H} 的左状态向量^[9], 其中

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} \mathbf{K}^T \mathbf{v} \\ -s\mathbf{M}^T \mathbf{v} \end{Bmatrix}, \quad (19)$$

记 $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \cdots \ \mathbf{r}_{2N}]$ 为左状态向量矩阵.

如果系统为单频系统, 左、右状态向量在 \mathbf{H} 加权的条件下是正交的, 规范这些状态向量可得解耦功能为

$$\mathbf{R}^H \mathbf{G} = \mathbf{E}, \tag{20}$$

$$\mathbf{R}^H \mathbf{H} \mathbf{G} = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_{2N}). \tag{21}$$

而对于重频系统,这些左、右状态向量不能保证正交性.虽然不同频率所对应的左、右状态向量之间仍然是正交的^[9],但对于重频所对应的那些左、右状态向量却可能并不正交.

2 振动系统的状态向量的正交性理论的数值实验

2.1 对称重频系统的数值算例

在一个5自由度的质量弹性阻尼系统中,设只在垂直方向上产生振动,如图1所示.

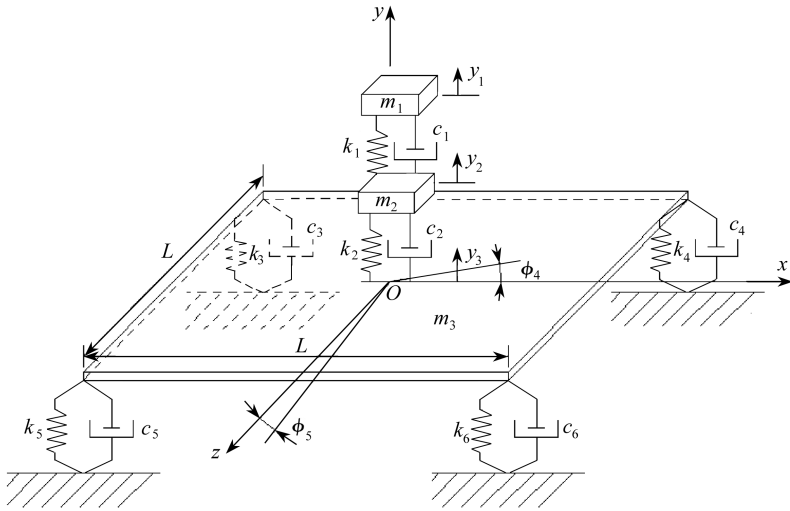


图1 5-自由度非比例阻尼系统

Fig.1 A 5-DOF non-proportionally damped system

系统的刚度 \mathbf{K} (单位: N/m)、质量 \mathbf{M} (单位: kg) 和阻尼阵 \mathbf{C} (单位: N·s/m) 分别为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{m_3 L^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_3 L^2}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\ 000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8\ 333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8\ 333 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 & c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 & -\frac{L}{2}(c_3 - c_4 + c_5 - c_6) & -\frac{L}{2}(c_3 + c_4 - c_5 - c_6) \\ 0 & 0 & -\frac{L}{2}(c_3 - c_4 + c_5 - c_6) & \frac{L^2}{4}(c_3 + c_4 + c_5 + c_6) & \frac{L^2}{4}(c_3 - c_4 - c_5 - c_6) \\ 0 & 0 & -\frac{L}{2}(c_3 + c_4 - c_5 - c_6) & \frac{L^2}{4}(c_3 - c_4 - c_5 - c_6) & \frac{L^2}{4}(c_3 + c_4 + c_5 + c_6) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 10 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 166 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\,000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\,000 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & & -k_2 & & 0 & & 0 & & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 & -\frac{L}{2}(k_3 - k_4 + k_5 - k_6) & -\frac{L}{2}(k_3 + k_4 - k_5 - k_6) & & & & & \\ 0 & 0 & -\frac{L}{2}(k_3 - k_4 + k_5 - k_6) & \frac{L^2}{4}(k_3 + k_4 + k_5 + k_6) & \frac{L^2}{4}(k_3 - k_4 - k_5 - k_6) & & & & & \\ 0 & 0 & -\frac{L}{2}(k_3 + k_4 - k_5 - k_6) & \frac{L^2}{4}(k_3 - k_4 - k_5 - k_6) & \frac{L^2}{4}(k_3 + k_4 + k_5 + k_6) & & & & & \\ 10\,000 & -10\,000 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ -10\,000 & 30\,000 & -20\,000 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & -20\,000 & 24\,000 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 100\,000 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100\,000 & & & & & \end{bmatrix}.$$

表 1 系统的特征值(2.1 小节的算例)

Table 1 Eigenvalues of the system for the example in section 2.1

i	frequency with respect to the right mode s_i	frequency with respect to the left mode s_i
1	-0.024 5+9.700 0i	-0.024 5+9.700 0i
2	-0.024 5-9.700 0i	-0.024 5-9.700 0i
3	-0.035 2+6.135 4i	-0.035 2+6.135 4i
4	-0.035 2-6.135 4i	-0.035 2-6.135 4i
5	-0.043 3+1.502 3i	-0.043 3+1.502 3i
6	-0.043 3-1.502 3i	-0.043 3-1.502 3i
7	-0.240 0+3.455 8i	-0.240 0+3.455 8i
8	-0.240 0-3.455 8i	-0.240 0-3.455 8i
9	-0.240 0+3.455 8i	-0.240 0+3.455 8i
10	-0.240 0-3.455 8i	-0.240 0-3.455 8i

由表 1 可知左、右模态向量所对应的频率序号完全一致,记为 s_1, s_2, \dots, s_{10} ,且第 7、第 9 和第 8、第 10 为两对复值的二重频率,利用右模态按式(6)构造右状态向量为 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{10}$,经验证,只有取 $\Phi_N = [\varphi_2, \varphi_1, \varphi_4, \varphi_3, \varphi_6, \varphi_5, \varphi_8, \varphi_7, \varphi_{10}, \varphi_9]$ 时,才有

$$\begin{cases} \Phi_N^H \mathbf{A} \Phi = \mathbf{E}, \\ \Phi_N^H \mathbf{B} \Phi = -\text{diag}[s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}], \end{cases}$$

其中 $\Phi = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8, \varphi_9, \varphi_{10}]$.再根据式(17)和式(19)构造左、右状态向量 $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_{10}$ 和 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{10}$,同样,只有取左、右状态矩阵为 $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_6, \mathbf{r}_5, \mathbf{r}_8, \mathbf{r}_7, \mathbf{r}_{10}, \mathbf{r}_9]$ 和 $\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_{10}]$ 时,才有

$$\begin{cases} \mathbf{R}^H \mathbf{G} = \mathbf{E}, \\ \mathbf{R}^H \mathbf{H} \mathbf{G} = \text{diag}[s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}]. \end{cases}$$

可见,这两种形式的状态向量均发生了次序上的调整,才能实现如前文所述的那些对角化解耦功能.但此算例中重频所对应的右状态向量之间恰好也是正交的.

2.2 非对称单频系统的数值算例

非对称系统可在这样一个质量阻尼陀螺弹性系统中得以展示,图2中显示的是一个刚性转子的简图,它是基于柔性支撑的.

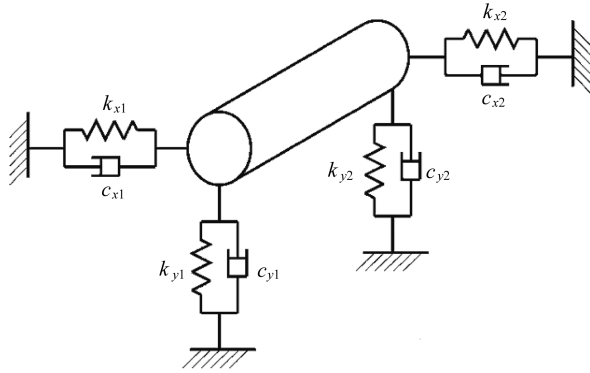


图2 刚性转子简图

Fig.2 Schematic of a flexibly supported rigid rotor

它是一个刚性的圆柱,长为0.5 m,直径为0.2 m,密度为 $7\ 810\text{ kg/m}^3$,这个转子是由弹簧和减振器所构成的支座来支撑的,弹性刚度为 $k_{x1} = 1.6\text{ GN/m}$, $k_{x2} = 1.4\text{ GN/m}$, $k_{y1} = 1.1\text{ GN/m}$, $k_{y2} = 1.6\text{ GN/m}$,其减振器的阻尼系数为 $c_{x1} = c_{x2} = c_{y1} = c_{y2} = 1\text{ kN}\cdot\text{s/m}$,4个自由度是关于转子质量中心的横向位移和正交于转子轴线的两个方向的转动,运动方程的不对称性来自于回转影响,这种影响因转动速度而增加,本文选择一个合适的转动速度是 $8\ 300\text{ r/min}$,并产生了如下系统矩阵:

$$M = \begin{bmatrix} 122.68 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 122.68 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.862\ 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.862\ 5 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.125 & 0.533\ 15 \\ 0 & 0 & -0.533\ 15 & 0.125 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 2.1 & 0 & 0 & 0.025 \\ 0 & 3 & -0.05 & 0 \\ 0 & -0.05 & 0.187\ 5 & 0 \\ 0.025 & 0 & 0 & 0.131\ 25 \end{bmatrix}.$$

由表2可见,左、右模态向量所对应的频率序号完全一致,记为 s_1, s_2, \dots, s_8 ,利用左、右模态按式(6)和式(10)构造 $F_1(A, B) = \mathbf{0}$ 型的左、右状态向量.当左、右状态向量矩阵分别为 $\Psi = [\psi_2, \psi_1, \psi_4, \psi_3, \psi_6, \psi_5, \psi_8, \psi_7]$ 和 $\Phi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_8]$ 时,可得

$$\begin{cases} \Psi^H A \Phi = E, \\ \Psi^H B \Phi = -\text{diag}[s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8]. \end{cases}$$

再按式(17)和式(19)构造 $F_2(H) = \mathbf{0}$ 型的左、右状态向量,当左、右状态向量矩阵分别为 $G =$

$[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_8]$ 和 $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_6, \mathbf{r}_5, \mathbf{r}_8, \mathbf{r}_7]$ 时, 可得

$$\begin{cases} \mathbf{R}^H \mathbf{G} = \mathbf{E}, \\ \mathbf{R}^H \mathbf{H} \mathbf{G} = \text{diag}[s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8]. \end{cases}$$

可见, 这两种形式的状态向量也需要次序上的调整, 才能实现如前文所述的那些对角化解耦功能。

表 2 系统的特征值(2.2 小节的算例)

Table 2 Eigenvalues of the system for the example in section 2.2

i	frequency with respect to the right mode s_i	frequency with respect to the left mode s_i
1	0.029 7+0.347 5i	0.029 7+0.347 5i
2	0.029 7-0.347 5i	0.029 7-0.347 5i
3	0.008 2+0.130 2i	0.008 2+0.130 2i
4	0.008 2-0.130 2i	0.008 2-0.130 2i
5	0.011 7+0.159 2i	0.011 7+0.159 2i
6	0.011 7-0.159 2i	0.011 7-0.159 2i
7	0.010 4+0.153 5i	0.010 4+0.153 5i
8	0.010 4-0.153 5i	0.010 4-0.153 5i

2.3 非对称重频系统的数值算例

设以 p 为设计参数的某非对称阻尼系统的质量、阻尼和刚度矩阵分别为

$$\mathbf{M}(p) = \text{diag}[1, 1, 1, 1],$$

$$\mathbf{K}(p) = \begin{bmatrix} -1 + 2p^2 & p(1 - p^2 - 2q^2) & 2p^2 q^2 & -pq^2(p^2 + q^2) \\ 0 & -(p^2 + 2q^2) & 2pq^2 & -q^2(p^2 + q^2) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}(p) = \begin{bmatrix} 3p & -(1 + p^2 + 2q^2) & p(1 + 2q^2) & -q^2(p^2 + q^2) \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

其中 $q = 1 + p$, 且系统的初始状态为 $p = -1$, 此时系统的特征值见表 3。

表 3 系统的特征值(2.3 小节的算例)

Table 3 Eigenvalues of the system for the example in section 2.3

i	frequency with respect to the right mode s_i	frequency with respect to the left mode s_i
1	1.343 8-0.993 4i	1.343 8-0.993 4i
2	1.343 8+0.993 4i	1.343 8+0.993 4i
3	-1.059 7-0.731 6i	-1.059 7-0.731 6i
4	-1.059 7+0.731 6i	-1.059 7+0.731 6i
5	-1	0
6	0.431 8	0.431 8
7	0	-1
8	0	0

由表 3 可知, 左、右状态向量所对应的频率在数值上完全相同, 但在序号上有所变化, 与右模态所对应的第 7、第 8 个和与左模态所对应的第 5、第 8 个频率为两对重频。记右状态向量所对应的频率为 s_1, s_2, \dots, s_8 , 左状态向量所对应的频率在数值上与它们一致, 但序号则做必要的

调整.利用左、右模态按式(6)和式(10)构造 $F_1(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{0}$ 型的左、右状态向量,当取左、右状态向量矩阵的子矩阵为 $\Psi = [\psi_2, \psi_1, \psi_4, \psi_3, \psi_6]$ 和 $\Phi = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_6]$ 时,才有

$$\begin{cases} \Psi^H \mathbf{A} \Phi = \mathbf{E}_{5 \times 5}, \\ \Psi^H \mathbf{B} \Phi = -\text{diag}[s_1, s_2, s_3, s_4, s_6]. \end{cases}$$

再按式(17)和式(19)构造 $F_2(\mathbf{H}) = \mathbf{0}$ 型的左、右状态向量,当取左、右状态向量矩阵的子矩阵为 $\mathbf{R} = [r_2, r_1, r_4, r_3, r_6]$ 和 $\mathbf{G} = [g_1, g_2, g_3, g_4, g_6]$ 时,也才有

$$\begin{cases} \mathbf{R}^H \mathbf{G} = \mathbf{E}_{5 \times 5}, \\ \mathbf{R}^H \mathbf{H} \mathbf{G} = \text{diag}[s_1, s_2, s_3, s_4, s_6]. \end{cases}$$

可见 2.3 小节的算例中的两种形式的状态向量也需要次序上的调整,才能部分实现如前文所述的那些对角化解耦功能.同时 2.3 小节的算例还说明无论在何种状态方程的形式下,重频所对应的一对状态向量与其它状态向量无论如何都不正交.这与 1.3 和 1.5 小节中叙述的关于重频系统状态向量的正交性结论是一致的.

此外,由 3 个算例可知,使用 $F_1(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{0}$ 型及 $F_2(\mathbf{H}) = \mathbf{0}$ 型状态向量所产生的解耦功能是一致的.

3 标号现象

上述所有算例中均存在“标号现象”.所谓“标号现象”,举例来说,针对单频对称系统的一对特征值 s_i 及 s_j ,它们所对应的状态向量记为 φ_i 和 φ_j ,由本文的实验结果可知

$$\varphi_i^H \mathbf{A} \varphi_j = \begin{cases} 0, & i = j, \\ 1, & i \neq j. \end{cases}$$

这与现有的理论是不同的,这会导致对角化的结果出现异常,这是因为若记 $\Phi = [\varphi_i, \varphi_j]$,则由上文所述的数值实验的结果可知

$$\begin{aligned} \Phi^H \mathbf{A} \Phi &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \Phi^H \mathbf{B} \Phi &= -\begin{bmatrix} 0 & s_1 \\ s_2 & 0 \end{bmatrix} \text{ 或 } \Phi^H \mathbf{B} \Phi = -\begin{bmatrix} 0 & s_2 \\ s_1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

当然这种现象可以通过标号的调整得以解决,因此仍可实现与现有理论相同的对角化结果.

4 忽略标号现象对工程振动分析可能产生的影响

事实上,标号现象在振动分析领域中的影响是不可忽视的.下面仅以 2.2 小节的算例为例,在忽略状态向量标号现象的情况下,按照文献[7]中忽略标号现象的算法计算频率的灵敏度,再通过调整标号使状态向量恢复正确的解耦功能后,计算频率灵敏度,并把这两种计算结果与差分灵敏度作对比.具体结果见表 4.需要说明的是,现设计参数取 m_1 ,记 $s_{i,m_1}^{(0)}$ 为按文献[7]忽略标号现象所计算的频率灵敏度, $s_{i,m_1}^{(1)}$ 为调整状态向量标号后按文献[7]计算的频率灵敏度, $s_{i,m_1}^{(d)}$ 为设计参数的扰动量为 $\Delta m_1/m_1 = 0.01$ 时所得的差分频率灵敏度.具体结果如表 4 所示.

由表 4 可知,调整标号后的计算结果与差分计算结果的一致性较好,而未曾调整标号时的计算结果与差分计算结果相去甚远,这说明标号现象的影响是很大的,因此在使用模态理论进行振动分析及控制的方程解耦时,都要进行正交性检验,这样就可以有效克服标号现象的影响,避免产生不必要的谬误及偏差.

表 4 频率灵敏度的计算结果对比(2.2 小节的算例)

Table 4 Comparison between the three sensitivity algorithms for state vectors of the example in section 2.2

s_i	$s_{i,m_1}^{(a)} (\times 10^{-3})$	$s_{i,m_1}^{(t)} (\times 10^{-3})$	$s_{i,m_1}^{(d)} (\times 10^{-3})$
1	0.000 6-0.003 4i	-0.000 1i	-0.000 1i
2	0.000 6+0.003 4i	0.000 1i	0.000 1i
3	0.066 7-0.525 9i	0.068 8-0.521 7i	0.062 1-0.525 9i
4	0.066 7+0.525 9i	0.068 8+0.521 7i	0.062 1+0.525 9i
5	0.142 2-0.967 7i	0.002 6-0.005 3i	0.002 0-0.004 1i
6	0.142 2+0.967 7i	0.002 6+0.005 3i	0.002 0+0.004 1i
7	0.094 6-0.694 4i	-0.004 9-0.002 8i	-0.003 7-0.002 0i
8	0.094 6+0.694 4i	-0.004 9+0.002 8i	-0.003 7+0.002 0i

5 结 论

本文针对两种常见的状态方程格式,指出了利用系统的模态向量所构造的左、右状态向量,可以实现相同的解耦功能.文中还通过对对称重频系统、非对称单频系统及非对称重频系统这 3 种不同类型的振动系统进行数值实验,揭示了状态向量正交性的异常现象,并指出通过调整状态向量的次序,才能实现其解耦功能.在工程计算中,可以通过正交性检验,有效地避免标号现象对计算结果精度产生的影响.

参考文献(References):

- [1] 张森,于澜,鞠伟.基于松弛技术的重频密频结构模态灵敏度分析[J].合肥工业大学学报(自然科学版),2012,35(12):1605-1609.(ZHANG Miao, YU Lan, JU Wei. Modes sensitivity analysis for multiple frequencies and closely spaced modes structure based on relaxation technique [J]. *Journal of Hefei University of Technology (Natural Sciences)*, 2012, 35(12): 1605-1609.(in Chinese))
- [2] 张森,于澜,鞠伟.亏损振系广义状态向量灵敏度的移频算法[J].计算力学学报,2013,30(6):872-878.(ZHANG Miao, YU Lan, JU Wei. Moving-frequency algorithm of generalized eigenvector sensitivity for defective dynamic system [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2013, 30(6): 872-878.(in Chinese))
- [3] 盛严,龚靖,杨正光.主动杆系结构的模态性质分析[J].噪声与振动控制,2010,30(5):6-9,24.(SHENG Yan, GONG Jing, YANG Zheng-guang. Modal analysis of active framed structure [J]. *Noise and Vibration Control*, 2010, 30(5): 6-9, 24.(in Chinese))
- [4] 解惠青,戴华.阻尼系统重特征对导数的计算[J].应用数学和力学,2007,28(6):749-756.(XIE Hui-qing, DAI Hua. Derivatives of repeated eigenvalues and corresponding eigenvectors of damped systems [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, 28(6): 749-756.(in Chinese))
- [5] 夏品奇, James M W B.斜拉桥有限元建模与模型修正[J].振动工程学报,2003,16(2):219-223.(XIA Pin-qi, James M W B. Finite element modeling and model updating of a cable-stayed bridge [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2003, 16(2): 219-223.(in Chinese))
- [6] Sondipon A. Rates of change of eigenvalues and eigenvectors in damped dynamic system [J]. *AIAA Journal*, 1999, 39(11): 1452-1458.
- [7] Sondipon A, Friswell M I. Eigenderivative analysis of asymmetric non-conservative systems [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 51(6): 709-733.
- [8] 许鑫,史治宇.用于时变系统参数识别的状态空间小波方法[J].工程力学,2011,28(3):23-

- 28.(XU Xin, SHI Zhi-yu. Parameter identification for time-varying system using state space and wavelet method[J]. *Engineering Mechanics*, 2011, **28**(3): 23-28.(in Chinese))
- [9] 于澜, 张淼, 鞠伟, 谷涛. 非保守系统复模态的规范正交性及其应用[J]. 华南师范大学学报(自然科学版), 2013, **45**(4): 13-17.(YU Lan, ZHANG Miao, JU Wei, GU Tao. The orthogonality and normalization relationships with its application of complex modes for non-conservative system[J]. *Journal of South China Normal University (Natural Sciences Edition)*, 2013, **45**(4): 13-17.(in Chinese))
- [10] 李德葆, 陆秋海. 实验模态分析及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2001.(LI De-bao, LU Qiu-hai. *Experimental Mode Analysis and Application*[M]. Beijing: Science Press, 2001.(in Chinese))
- [11] Greco A, Santini A. Comparative study on dynamic analysis of non-classically damped linear system[J]. *Structural Engineering and Mechanics*, 2002, **14**(6): 679-698.
- [12] 沈继红, 胡波, 王侃, 金鑫. 二阶振动系统的解耦条件及算法研究[J]. 振动与冲击, 2012, **31**(18): 89-92, 156.(SHEN Ji-hong, HU Bo, WANG Kan, JIN Xin. Decoupling coupling and algorithm of a quadratic system[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2012, **31**(18): 89-92, 156.(in Chinese))
- [13] Ward H, Stefan L, Paul S. *Modal Analysis Theory and Testing*[M]. Brussel, Belgium: Katholieke Universiteit Leuven, 1997.

An Unusual Phenomenon in the Complex Mode Orthogonality Theory and the Strategy Against It

ZHANG Miao¹, YU Lan¹, JU Wei²

(1. School of Science, Changchun Institute of Technology,
Changchun 130012, P.R.China;

2. R & D Center, China FAW Group Corporation,
Changchun 130011, P.R.China)

Abstract: The label phenomenon was revealed through verification of the correctness of the complex mode orthogonality theory used in engineering with numerical experiment. Firstly, the decoupling function of the state vectors under different state space schemes was theoretically analyzed. The related conclusions were also proposed on the orthogonal properties of the state vectors in the cases of symmetric and asymmetric structures with repeated frequencies. Secondly, the label phenomenon was found out and the method to eliminate its undesirable influence was given. Finally, through a general example of sensitivity analysis, the likely risk out of ignorance of the label phenomenon was demonstrated. The research indicates that, through necessary orthogonality check and adjustment of the state vectors' orders, the decoupling of the state vectors is realized and the adverse effect of the label phenomenon on the calculation accuracy is eliminated.

Key words: complex mode theory; label phenomenon; orthogonal property; decouple; diagonalization