文章编号:1000-0887(2014)09-1063-08

带有新的迭代格式的内点算法*

杨喜美[1], 刘红卫[2], 张因奎[1]

(1. 河南师范大学 数学与信息科学学院, 河南 新乡 453007;
2. 西安电子科技大学 数学与统计学院, 西安 710071)

(我刊编委杨新民推荐)

摘要: 研究了求解线性规划问题的二阶 Mehrotra 型预估-矫正内点算法,使用 Newton 方法求解预估方向和矫正方向,并利用两个方向的一种新的组合方式得到搜索方向.在每次迭代中,要求新的迭代点在中心路径的一个宽邻域内,从而计算出步长参数.通过分析,证明了该算法经过有限次迭代后收敛到问题的一个最优解,并具目前内点算法最好的多项式复杂度 $O(\sqrt{n}L)$.数值实验表明该算法在实践中是有效的.

关 键 词: 线性规划; 内点算法; 迭代格式; 宽邻域; 多项式复杂度
中图分类号: O221.1 **文献标志码:** A
doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.09.012

引 言

本文主要考虑标准形式的原-对偶线性规划问题,如下:

$$(\mathrm{P})\quad \min\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}:\ \text{s.t. } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\},$$

$$(\mathrm{D})\quad \max\ \{\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}:\ \text{s.t. } \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{s}=\boldsymbol{c},\boldsymbol{s}\geqslant\boldsymbol{0}\},$$

其中 $\boldsymbol{A}\in R^{m\times n}$,$\boldsymbol{c},\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}\in R^{n}$ 并且 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{y}\in R^{m}$.

众所周知,原-对偶内点算法是求解线性规划的最有效的算法之一.从 1984 年,内点算法被 Karmarkar[1] 提出,至今已有近三十年的发展历程.在此期间,众多学者不断提出新的高效的内点算法[2-5],其中预估-矫正算法[5] 成为了一类具有代表性的算法.预估-矫正算法因具有高效性而备受关注.Salahi 等[6] 提出二阶 Mehrotra 型预估-矫正算法.但是,这个算法具有一些局限性,例如:它要求使用保障策略并迭代在一个窄邻域里,其次,获得的复杂度 $O(nL)$ 比较高.后来,Liu 等[7] 和 Zhang 等[8] 一般化 Salahi 等[6] 的思想,提出了求解对称锥规划的二阶预估矫正算法.近来,关于 Mehrotra 型预估-矫正算法的文章层出不穷[9-13].由于他们的工作推动,本文给出一个二阶 Mehrotra 型预估-矫正算法.本文所给出的算法不要求使用保障策略并迭代在 Ai 等[14] 提出的宽邻域里,获得的复杂度是 $O(\sqrt{n}L)$.最后,通过数值试验说明该算法是有效的.

---

* **收稿日期:** 2013-12-24; **修订日期:** 2014-05-27
基金项目: 国家自然科学基金(61179040; 61303030); 广西高校科研重点项目资助(ZD2014050)
作者简介: 杨喜美(1982—),女,河南周口人,博士(通讯作者. E-mail: yangximeiluoyang@126.com);
刘红卫(1967—),男,陕西渭南人,教授(E-mail: liuhongweixidian@126.com);
张因奎(1983—),男,河南信阳人,硕士(E-mail: yangximeixidian@126.com).

下面,给出一些常用符号:$\boldsymbol{e}$ 表示分量全为1 的列向量;$\|\cdot\|$ 表示向量的2-范数.对于向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}\in R^n$, $\boldsymbol{xs}\in R^n$ 表示对应分量的乘积,$(\boldsymbol{xs})_{\min}$ 表示 $\boldsymbol{xs}\in R^n$ 的最小分量;对于 $\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{x}^{1/2}$ 和 $\boldsymbol{x}^{-1/2}$ 分别表示由 $x_i^{1/2}$ 和 $x_i^{-1/2}$ 组成的向量;另外,对于 $\boldsymbol{h}\in R^n$, 记

$$\boldsymbol{h}^{+}=\max\{0,\boldsymbol{h}\}\ \text{和}\ \boldsymbol{h}^{-}=\boldsymbol{h}-\boldsymbol{h}^{+}.$$

1 预 备 知 识

求解(P)和(D)的最优值等价于求解下列系统:

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},\qquad \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0},\tag{1a}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{s}=\boldsymbol{c},\qquad \boldsymbol{s}\geqslant\boldsymbol{0},\tag{1b}$$

$$\boldsymbol{xs}=\boldsymbol{0}.\tag{1c}$$

用 $\boldsymbol{xs}=\mu\boldsymbol{e},\mu>0$ 代替系统(1c),得到式(1)的扰动系统:

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},\qquad \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0},\tag{2a}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{s}=\boldsymbol{c},\qquad \boldsymbol{s}\geqslant\boldsymbol{0},\tag{2b}$$

$$\boldsymbol{xs}=\mu\boldsymbol{e}.\tag{2c}$$

令 $\mathcal{F}^0=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{s})\in R^n\times R^m\times R^n:\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{s}=\boldsymbol{c},(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})>\boldsymbol{0}\}$, 表示(P)和(D)的严格可行集.如果 $\mathcal{F}^0\neq\varnothing$ 并且 $\boldsymbol{A}$ 行满秩,即:$\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}=m$, 则系统(2)存在唯一解.原-对偶内点算法的基本思想是用 Newton 方法求解系统(2),逐渐减小 μ,并使得迭代点列包含在中心路径的某个邻域内,最终得到满足允许精度的近似最优解.在本文中,假设 $\mathcal{F}^0\neq\varnothing$ 且 $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}=m$.

下面,给出本文计算方向的方法.由下列方程计算预估方向:

$$\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{a}}=0,\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{y}^{\mathrm{a}}+\Delta\boldsymbol{s}^{\mathrm{a}}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{s}\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{a}}+\boldsymbol{x}\Delta\boldsymbol{s}^{\mathrm{a}}=\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}},\tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}}=(\tau\mu\boldsymbol{e}-\boldsymbol{xs})^{-}+\sqrt{n}(\tau\mu\boldsymbol{e}-\boldsymbol{xs})^{+}$.通过下面的方程计算矫正方向:

$$\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{c}}=0,\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{y}^{\mathrm{c}}+\Delta\boldsymbol{s}^{\mathrm{c}}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{s}\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{c}}+\boldsymbol{x}\Delta\boldsymbol{s}^{\mathrm{c}}=-\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{a}}\Delta\boldsymbol{s}^{\mathrm{a}}.\tag{4}$$

若 α 表示迭代步长,则新的迭代点为

$$(\boldsymbol{x}(\alpha),\boldsymbol{y}(\alpha),\boldsymbol{s}(\alpha))=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{s})+\alpha(\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{a}},\Delta\boldsymbol{y}^{\mathrm{a}},\Delta\boldsymbol{s}^{\mathrm{a}})+2g(\alpha)(\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{c}},\Delta\boldsymbol{y}^{\mathrm{c}},\Delta\boldsymbol{s}^{\mathrm{c}}),\tag{5}$$

其中 $g(\alpha)=1-\sqrt{1-\alpha^2}\leqslant\alpha^2$.使用式(5),直接计算得

$$\boldsymbol{x}(\alpha)\boldsymbol{s}(\alpha)=\boldsymbol{xs}+\alpha\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}}+\Delta\boldsymbol{x}(\alpha)\Delta\boldsymbol{s}(\alpha),\tag{6}$$

其中 $\Delta\boldsymbol{x}(\alpha)\Delta\boldsymbol{s}(\alpha)=-g^2(\alpha)\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{a}}\Delta\boldsymbol{s}^{\mathrm{a}}+2\alpha g(\alpha)(\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{a}}\Delta\boldsymbol{s}^{\mathrm{c}}+\Delta\boldsymbol{s}^{\mathrm{a}}\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{c}})+4g^2(\alpha)\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{c}}\Delta\boldsymbol{s}^{\mathrm{c}}$.

另外,利用正交性:$(\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{a}})^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{s}^{\mathrm{a}}=(\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{a}})^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{s}^{\mathrm{c}}=(\Delta\boldsymbol{s}^{\mathrm{a}})^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{c}}=(\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{c}})^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{s}^{\mathrm{c}}=0$, 易知 $\Delta\boldsymbol{x}(\alpha)^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{s}(\alpha)=0$, 进一步有

$$\mu(\alpha)=\boldsymbol{x}(\alpha)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}(\alpha)/n=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}+\alpha\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}})/n=$$

$$\mu+\alpha\left[\tau\mu-\mu+\frac{1}{n}(\sqrt{n}-1)\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(\tau\mu\boldsymbol{e}-\boldsymbol{xs})^{+}\right].\tag{7}$$

本文的迭代点将被限制在宽邻域 $\mathcal{N}(\tau,\beta)$ 内,其中

$$\mathcal{N}(\tau,\beta)=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{s})\in\mathcal{F}^0:\|(\tau\mu\boldsymbol{e}-\boldsymbol{xs})^{+}\|\leqslant\beta\tau\mu\}.\tag{8}$$

由式(8),很容易获得:$(\boldsymbol{xs})_{\min}\geqslant(1-\beta)\tau\mu$.

另外,要求最大步长 $\hat{\alpha}$ 满足下列条件:

$$\hat{\alpha}:=\max\{\alpha:(\boldsymbol{x}(\alpha),\boldsymbol{y}(\alpha),\boldsymbol{s}(\alpha))\in\mathcal{N}(\tau,\beta),\forall\alpha\in[0,1]\}.\tag{9}$$

2 算 法 框 架

基于上面的分析,列出算法的一般框架如下:

算法 1 带有新的迭代格式的内点算法

初始化 若 $\varepsilon > 0, \tau \leqslant 1/4, \beta \leqslant 1/2$,且$(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{s}_0) \in \mathcal{N}(\tau, \beta)$, $\mu_0 = \boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_0/n$,置 $k := 0$.

步骤 1 如果 $(\boldsymbol{x}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}^k \leqslant \varepsilon$, 终止.

步骤 2 通过求解方程组(3)和(4)获得预估方向$(\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{a}}, \Delta\boldsymbol{y}^{\mathrm{a}}, \Delta\boldsymbol{s}^{\mathrm{a}})$和矫正方向$(\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{c}}, \Delta\boldsymbol{y}^{\mathrm{c}}, \Delta\boldsymbol{s}^{\mathrm{c}})$.

步骤 3 通过式(9)计算最大步长 $\hat{\alpha}^k$,并令$(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{s}^{k+1}) = (\boldsymbol{x}(\hat{\alpha}^k), \boldsymbol{y}(\hat{\alpha}^k), \boldsymbol{s}(\hat{\alpha}^k))$.

步骤 4 计算 $\mu^{k+1} = (\boldsymbol{x}^{k+1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}^{k+1}/n$,并置 $k := k+1$, 转到步骤 1.

3 复杂性分析

本节的主要目的是给出新算法的较低复杂度.为此,首先需要给出一些预备的引理.

引理 1 若$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{s}) \in \mathcal{N}(\tau, \beta)$,则 $\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(\tau\mu\boldsymbol{e} - \boldsymbol{x}\boldsymbol{s})^{+} \leqslant \sqrt{n}\beta\tau\mu$.

证明 使用 Cauchy-Schwarz 不等式和式(8),得

$$\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(\tau\mu\boldsymbol{e} - \boldsymbol{x}\boldsymbol{s})^{+} \leqslant \|\boldsymbol{e}\| \cdot \|(\tau\mu\boldsymbol{e} - \boldsymbol{x}\boldsymbol{s})^{+}\| \leqslant \sqrt{n}\beta\tau\mu,$$

这个证明被完成. □

由引理 1 和式(7),很容易获得下列引理.

引理 2 若$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{s}) \in \mathcal{N}(\tau, \beta)$, 则

$$[1 - (1-\tau)\alpha]\mu \leqslant \mu(\alpha) \leqslant [1 - (1 - \tau - \beta\tau)\alpha]\mu.$$

引理 3 设 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in R^n, \boldsymbol{D} \geqslant \boldsymbol{0}, \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} \geqslant 0, \boldsymbol{T} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{v}$, 则下列不等式成立:

$$\|\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}\| \leqslant \|\boldsymbol{T}\|, \quad \|\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\boldsymbol{T}\|, \quad \|\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}\| \leqslant \frac{1}{4}\|\boldsymbol{T}\|^2.$$

引理 4 若$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{s}) \in \mathcal{N}(\tau, \beta)$, $\tau \leqslant 1/4$, $\beta \leqslant 1/2$, $\tilde{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{c}} = (\boldsymbol{x}\boldsymbol{s})^{-1/2}\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}}$ 则

$$\|\tilde{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{c}}\|^2 \leqslant (1 + \beta\tau)n\mu.$$

证明 由$((\tau\mu\boldsymbol{e} - \boldsymbol{x}\boldsymbol{s})^{-})^{\mathrm{T}}(\tau\mu\boldsymbol{e} - \boldsymbol{x}\boldsymbol{s})^{+} = 0$, 直接计算得

$$\|\tilde{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{c}}\|^2 = \|(\boldsymbol{x}\boldsymbol{s})^{-1/2}(\tau\mu\boldsymbol{e} - \boldsymbol{x}\boldsymbol{s})^{-}\|^2 + n\|(\boldsymbol{x}\boldsymbol{s})^{-1/2}(\tau\mu\boldsymbol{e} - \boldsymbol{x}\boldsymbol{s})^{+}\|^2.$$

由文献[9]的证明,有 $\|(\boldsymbol{x}\boldsymbol{s})^{-1/2}(\tau\mu\boldsymbol{e} - \boldsymbol{x}\boldsymbol{s})^{-}\|^2 \leqslant n\mu$.下面,证明第 2 个不等式:

$$\|(\boldsymbol{x}\boldsymbol{s})^{-1/2}(\tau\mu\boldsymbol{e} - \boldsymbol{x}\boldsymbol{s})^{+}\|^2 \leqslant \frac{\|(\tau\mu\boldsymbol{e} - \boldsymbol{x}\boldsymbol{s})^{+}\|^2}{(\boldsymbol{x}\boldsymbol{s})_{\min}} \leqslant \frac{(\beta\tau\mu)^2}{(1-\beta)\tau\mu} \leqslant \beta\tau\mu,$$

其使用了式(8)及$(\boldsymbol{x}\boldsymbol{s})_{\min} \geqslant (1-\beta)\tau\mu$.

简单整理后,可以得到需要的结果. □

引理 5 若$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{s}) \in \mathcal{N}(\tau, \beta)$, $\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{s}/\boldsymbol{x})^{1/2} = \boldsymbol{x}^{-1/2}\boldsymbol{s}^{1/2}$, 则

$$\|\boldsymbol{D}\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{a}}\| \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{n\mu}, \quad \|\boldsymbol{D}^{-1}\Delta\boldsymbol{s}^{\mathrm{a}}\| \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{n\mu}, \quad \|\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{a}}\Delta\boldsymbol{s}^{\mathrm{a}}\| \leqslant \frac{5}{16}n\mu.$$

证明 在式(3)的第 3 个方程两边同乘以$(\boldsymbol{x}\boldsymbol{s})^{-1/2}$, 能够得到下列等式:

$$\boldsymbol{D}\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{a}} + \boldsymbol{D}^{-1}\Delta\boldsymbol{s}^{\mathrm{a}} = (\boldsymbol{x}\boldsymbol{s})^{-1/2}\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}} = \tilde{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{c}}.$$

再由引理 3 和引理 4,有

$$\|\boldsymbol{D}\Delta\boldsymbol{x}^{\mathrm{a}}\| \leqslant \|\tilde{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{c}}\| \leqslant \sqrt{(1+\beta\tau)n\mu} \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{n\mu},$$

$$\|\boldsymbol{D}^{-1}\Delta\boldsymbol{s}^{\mathrm{a}}\| \leqslant \|\tilde{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{c}}\| \leqslant \sqrt{(1+\beta\tau)n\mu} \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{n\mu},$$

以及

$$\|\Delta x^{a}\Delta s^{a}\| \leqslant \frac{1}{4}\|\tilde{r}_{c}\|^{2} \leqslant \frac{1}{4}(1+\beta\tau)n\mu \leqslant \frac{5}{16}n\mu,$$

则完成了这个证明. □

引理 6 若 $(x,y,s)\in\mathcal{N}(\tau,\beta)$, $D=(s/x)^{1/2}=x^{-1/2}s^{1/2}$, 则

$$\|D\Delta x^{c}\| \leqslant \frac{5}{8\sqrt{\tau}}n\sqrt{\mu},\quad \|D^{-1}\Delta s^{c}\| \leqslant \frac{5}{8\sqrt{\tau}}n\sqrt{\mu},\quad \|\Delta x^{c}\Delta s^{c}\| \leqslant \frac{3}{16\tau}n^{2}\mu.$$

证明 在式(4)的第 3 个方程两边同乘以 $(xs)^{-1/2}$, 得到下列等式:

$$D\Delta x^{c} + D^{-1}\Delta s^{c} = (xs)^{-1/2}(-\Delta x^{a}\Delta s^{a}).$$

再由引理 2,易得

$$\|D\Delta x^{c}\| \leqslant \|(xs)^{-1/2}(-\Delta x^{a}\Delta s^{a})\| \leqslant \frac{\|\Delta x^{a}\Delta s^{a}\|}{\sqrt{(xs)_{\min}}} \leqslant \frac{5n\mu}{16\sqrt{(1-\beta)\tau\mu}} \leqslant \frac{5}{8\sqrt{\tau}}n\sqrt{\mu}.$$

同理,也有 $\|D\Delta s^{c}\| \leqslant (5/8\sqrt{\tau})n\sqrt{\mu}$.另外,使用引理 3,也容易证明

$$\|\Delta x^{c}\Delta s^{c}\| \leqslant \frac{1}{4}\|(xs)^{-1/2}(-\Delta x^{a}\Delta s^{a})\|^{2} \leqslant \frac{\|\Delta x^{a}\Delta s^{a}\|^{2}}{4(xs)_{\min}} \leqslant \frac{25n^{2}\mu^{2}}{32^{2}(1-\beta)\tau\mu} \leqslant \frac{1}{16\tau}n^{2}\mu.$$

到此,完成了这个引理的证明. □

另外,使用引理 5 和引理 6,容易获得下面的引理.

引理 7 若 $(x,y,s)\in\mathcal{N}(\tau,\beta)$, 则

$$\|\Delta x^{a}\Delta s^{c}\| = \|D\Delta x^{a}D^{-1}\Delta s^{c}\| \leqslant \|D\Delta x^{a}\| \leqslant \|D^{-1}\Delta s^{c}\| \leqslant 15n^{3/2}\mu/(16\sqrt{\tau}),$$

$$\|\Delta s^{a}\Delta x^{c}\| = \|D\Delta s^{a}D^{-1}\Delta x^{c}\| \leqslant \|D\Delta s^{a}\| \leqslant \|D^{-1}\Delta x^{c}\| \leqslant 15n^{3/2}\mu/(16\sqrt{\tau}).$$

为了计算最大迭代步长 $\hat{\alpha}$, 首先需要给出下列引理.

引理 8 若 $(x,y,s)\in\mathcal{N}(\tau,\beta)$, 则

如果 $\alpha\geqslant 1/\sqrt{n}$,则 $\|(\tau\mu(\alpha)e-xs-\alpha r_{c})^{+}\|=0$.

如果 $\alpha<1/\sqrt{n}$,则 $\|(\tau\mu(\alpha)e-xs-\alpha r_{c})^{+}\|\leqslant(1-\alpha\sqrt{n})\beta\tau\mu$.

证明 由引理 2,得 $\mu(\alpha)\leqslant\mu$ 进一步有

$$\|(\tau\mu(\alpha)e-xs-\alpha r_{c})^{+}\| \leqslant \|(\tau\mu e-xs-\alpha r_{c})^{+}\| \leqslant \|[(1-\alpha)(\tau\mu e-xs)^{-}+(1-\alpha\sqrt{n})(\tau\mu e-xs)^{+}]^{+}\| \leqslant \|[(1-\alpha\sqrt{n})(\tau\mu e-xs)^{+}]^{+}\|.$$

如果 $\alpha\geqslant 1/\sqrt{n}$,则 $(1-\alpha\sqrt{n})\leqslant 0$,这蕴含着 $\|(\tau\mu(\alpha)e-xs-\alpha r_{c})^{+}\|=0$.

如果 $\alpha<1/\sqrt{n}$,则 $(1-\alpha\sqrt{n})>0$, 这蕴含着

$$\|(\tau\mu(\alpha)e-xs-\alpha r_{c})^{+}\| \leqslant (1-\alpha\sqrt{n})\|(\tau\mu e-xs)^{+}\| \leqslant (1-\alpha\sqrt{n})\beta\tau\mu.$$

综合以上情况,完成了本定理的证明. □

引理 9 若 $\alpha\in[0,\beta\tau/\sqrt{n}]$, 则

$$\|\Delta x(\alpha)\Delta s(\alpha)\| \leqslant \alpha\sqrt{n}\beta\tau\mu\left[\frac{5\beta^{2}\tau^{2}}{16n}+\frac{15\beta}{8}+\frac{3\beta^{2}\tau}{4}\right].$$

证明 使用 $g(\alpha)\leqslant\alpha^{2}$, 及引理 5、引理 6 和引理 7,有

$$
\begin{aligned}
&\|\Delta \boldsymbol{x}(\alpha)\Delta \boldsymbol{s}(\alpha)\| = \\
&\quad \|-g^2(\alpha)\Delta \boldsymbol{x}^{a}\Delta \boldsymbol{s}^{a}+2\alpha g(\alpha)(\Delta \boldsymbol{x}^{a}\Delta \boldsymbol{s}^{c}+\Delta \boldsymbol{s}^{a}\Delta \boldsymbol{x}^{c})+4g^2(\alpha)\Delta \boldsymbol{x}^{c}\Delta \boldsymbol{s}^{c}\| \leqslant \\
&\quad \alpha^4\|\Delta \boldsymbol{x}^{a}\Delta \boldsymbol{s}^{a}\|+2\alpha^3\|\Delta \boldsymbol{x}^{a}\Delta \boldsymbol{s}^{c}+\Delta \boldsymbol{s}^{a}\Delta \boldsymbol{x}^{c}\|+4\alpha^4\|\Delta \boldsymbol{x}^{c}\Delta \boldsymbol{s}^{c}\| \leqslant \\
&\quad \frac{5}{16}\alpha^4 n\mu+\frac{15}{8\sqrt{\tau}}\alpha^3 n^{3/2}\mu+\frac{3}{4\tau}\alpha^4 n^2\mu \leqslant \\
&\quad \alpha\sqrt{n}\mu\left[\frac{5}{16}\alpha^3 n^{1/2}+\frac{15}{8\sqrt{\tau}}\alpha^2 n+\frac{3}{4\tau}\alpha^3 n^{3/2}\right] \leqslant \\
&\quad \alpha\sqrt{n}\mu\left[\frac{5\beta^3\tau^3}{16n}+\frac{15\beta^2\tau}{8}+\frac{3\beta^3\tau^2}{4}\right] = \\
&\quad \alpha\sqrt{n}\beta\tau\mu\left[\frac{5\beta^2\tau^2}{16n}+\frac{15\beta}{8}+\frac{3\beta^2\tau}{4}\right].
\end{aligned}
$$

以上完成了这个引理的证明. □

下面,给出最大迭代步长的下界.

引理 10 让 $\hat{\alpha}$ 的定义如式(9),则 $\hat{\alpha} \geqslant \beta\tau/\sqrt{n}$.

证明 如果 $\hat{\alpha} \geqslant 1/\sqrt{n}$,则 $\hat{\alpha}$ 的下界就是 $1/\sqrt{n}$,所以仅考虑 $\hat{\alpha} < 1/\sqrt{n}$.由式(8)知,要证明 $(\boldsymbol{x}(\alpha),\boldsymbol{s}(\alpha)) \in \mathcal{N}(\tau,\beta)$ 的充分条件是证明

$$
h(\alpha) := \|(\tau\mu(\alpha)\boldsymbol{e}-\boldsymbol{xs}-\alpha\boldsymbol{r}_{c})^{+}\| + \|\Delta \boldsymbol{x}(\alpha)\Delta \boldsymbol{s}(\alpha)\| - \beta\tau\mu(\alpha) \leqslant 0.
$$

由引理 2、引理 8 和引理 9 知:如果 $\hat{\alpha} < 1/\sqrt{n}$, 则

$$
\begin{aligned}
h(\alpha) &\leqslant (1-\alpha\sqrt{n})\beta\tau\mu+\alpha\sqrt{n}\beta\tau\mu\left[\frac{5\beta^2\tau^2}{16n}+\frac{15\beta}{8}+\frac{3\beta^2\tau}{4}\right]-\beta\tau[\mu+\alpha(\tau-1)\mu] = \\
&\quad \alpha\sqrt{n}\beta\tau\mu\left[\frac{5\beta^2\tau^2}{16n}+\frac{15\beta}{8}+\frac{3\beta^2\tau}{4}\right]+\alpha\beta\tau(1-\tau)\mu-\alpha\sqrt{n}\beta\tau\mu \leqslant \\
&\quad \alpha\sqrt{n}\beta\tau\mu\left[\frac{5\beta^2\tau^2}{16n}+\frac{15\beta}{8}+\frac{3\beta^2\tau}{4}+\frac{1}{\sqrt{n}}-1\right] \leqslant 0.
\end{aligned}
$$

综合以上两种情况,有:$\hat{\alpha} \geqslant \min\{1/\sqrt{n},\beta\tau/\sqrt{n}\} = \beta\tau/\sqrt{n}$. □

下面给出本文的主要结果——新算法的多项式复杂度.

定理 1 如果 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{s}_0) \in \mathcal{N}(\tau,\beta)$,$\tau \leqslant 1/4$, $\beta \leqslant 1/2$,则新算法至多需要 $O(\sqrt{n}L)$ 次迭代停止,其中

$$
L = \frac{\ln(\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_0/\varepsilon)}{(1-\tau-\beta\tau)\beta\tau}.
$$

证明 由算法的终止条件步骤 1 及引理 2 知,仅需要证明

$$
(\boldsymbol{x}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}^k \leqslant [1-(1-\tau-\beta\tau)\alpha]^k n\mu_0 \leqslant [1-(1-\tau-\beta\tau)\beta\tau/\sqrt{n}]^k n\mu_0 \leqslant \varepsilon.
$$

利用这个事实:$n\mu_0 = \boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_0$,$\ln(1-\alpha) \leqslant -\alpha$,它很容易证明 $k \geqslant \sqrt{n}L$.

4 数值试验

在本节,通过测试文献[15]中给出的线性规划问题来对比提出的新算法(algorithm 1)和 Ai[16]的算法(algorithm 2).下面给出一些编写程序的其它信息.使用 MATLAB R2011b 编写程序并在 Intel Core i3 PC(3.10 GHz),4GB Ram 下运行.寻找可行初始点通过自对偶嵌入[17].对于 algorithm 1 和 algorithm 2,选取最优参数为 $\tau = 0.001$, $\beta = 0.5$.在表 1 中,列出了测试问题的

名称(problem),大小 (m,n),迭代次数(iter.),对偶间隙(gap),迭代时间(time)以秒为单位.

从测试结果列表中,可以看出我们的新算法在迭代次数上平均减少了 57.07%.该数值试验说明,本文提出的新算法不但在理论上具有内点算法所具有的最好复杂度,而且具有较好的数值效果.

表 1 线性规划

Tabel 1 Linear programming

problem	m	n	algorithm 1			algorithm 2		
			time t /s	iter. k	gap δ	time t /s	iter. k	gap δ
adlittle	56	138	0.186 6	13	5.555 5E−10	0.326 7	23	9.299 7E−09
afiro	27	51	0.014 1	10	1.984 7E−11	0.025 1	18	2.393 7E−11
blend	74	114	0.102 3	12	2.273 6E−11	0.176 9	21	5.522 7E−12
bandm	305	472	7.651 8	20	3.326 9E−10	24.954 0	66	1.809 0E−10
beaconfd	173	295	0.993 5	13	2.530 5E−11	2.119 9	29	9.435 4E−10
capri	271	496	4.923 4	20	1.821 4E−11	12.783 4	52	1.928 4E−09
e226	223	472	6.446 5	27	1.695 1E−09	17.131 1	72	1.813 6E−10
lotfi	153	366	1.623 1	22	1.590 4E−10	3.728 2	51	8.536 5E−09
israel	174	316	2.622 7	22	5.144 1E−09	6.757 7	57	4.489 2E−09
scsd1	77	760	9.169 6	14	4.535 8E−11	12.429 1	19	3.081 5E−11
scsd6	147	1 350	46.375 1	13	8.661 3E−09	90.149 7	25	2.086 3E−09
scsd8	397	2 750	300.810 2	11	1.551 1E−09	586.796 3	21	1.083 0E−09
scagr7	129	185	0.504 1	12	2.876 9E−09	1.196 2	30	6.383 7E−09
sc105	105	163	0.174 9	14	5.890 0E−11	0.305 2	25	2.467 0E−10
sc205	205	317	0.898 8	15	2.539 1E−09	1.395 6	23	7.395 3E−11
scagr25	471	671	19.612 5	15	1.168 1E−09	48.505 3	38	6.363 4E−09
scfxm1	330	600	10.406 5	26	7.384 0E−09	23.542 9	59	5.663 6E−09
stocfor1	117	165	0.231 4	17	1.336 2E−10	0.485 3	38	4.815 5E−11
share1b	117	253	1.576 8	32	1.137 1E−09	4.827 8	96	9.038 7E−09
share2b	96	162	0.206 3	12	4.068 1E−10	0.482 0	29	8.408 0E−09

5 总结与展望

基于文献[14]中的宽邻域,设计了一个二阶 Mehrotra 型预估-矫正算法,该算法使用了一个新的迭代格式获得迭代方向.通过分析,表明该算法具有可行算法目前最好的理论复杂度 $O(\sqrt{n}L)$.

本文提出的算法是一个可行算法,考虑不可行内点算法是下一步的研究方向.另外,也可以考虑使用本文提出的迭代方法和其它的宽邻域设计新算法.

参考文献(References):

[1] Karmarkar N. A new polynomial-time algorithm for linear programming[J]. *Combinatorica*, 1984, **4**(4):302-311.

[2] Wright S J. *Primal-Dual Interior-Point Methods*[M]. Pliladelphia: SIAM, 1997.

[3] Peng J, Roos C, Terlaky T. *Self-Regularity: A New Paradigm for Primal-Dual Interior-Point Algorithms*[M]. Princeton: Princeton University Press, 2002.

[4] Bai Y, Ghami M, Roos C. A comparative study of kernel functions for primal-dual interior-point algorithms in linear optimization[J]. *SIAM J Optim*, 2004, **15**(1): 101-128.

[5] Methrostra S. On the implementation of a primal dual interior point method[J]. *SIAM J Optim*, 1992, **2**(4): 575-601.

[6] Salahi M, Mahdavi-Amiri N. Polynomial time second order Mehrotra-type predictor-corrector algorithms[J]. *Appl Math Comput*, 2006, **183**(1): 646-658.

[7] Liu C, Liu H, Liu X. Polynomial convergence of second-order Mehrotra-type predictor-corrector algorithms over symmetric cones[J]. *J Optim Theory Appl*, 2012, **154**(3): 949-965.

[8] Zhang J, Zhang K. Polynomial complexity of an interior point algorithm with a second order corrector step for symmetric cone programming[J]. *Math Meth Oper Res*, 2011, **73**(1): 75-90.

[9] Zhang M. A second order Mehrotra-type predictor-corrector algorithm for semidefinite optimization[J]. *J Syst Sci Complex*, 2012, **25**(6): 1108-1121.

[10] Liu C, Liu H. A new second-order corrector interior-point algorithm for semidefinite programming[J]. *Math Meth Oper Res*, 2012, **75**(2): 165-183.

[11] Liu H, Liu C, Yang X. New complexity analysis of a Mehrotra-type predictor-corrector algorithm for semidefinite programming[J]. *Optim Method Softw*, 2013, **28**(6): 1179-1194.

[12] Yang X, Liu H, Zhang Y. A second-order Mehrotra-type predictor-corrector algorithm with a new wide neighbourhood for semi-definite programming[J]. *Int J Comput Math*, 2014, **91**(5): 1082-1096.

[13] Yang X, Liu H, Dong X. Polynomial convergence of Mehrotra-type prediction-corrector infeasible-IPM for symmetric optimization based on the commutative class directions[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, **230**: 616-628.

[14] Ai W, Zhang S. An $O(\sqrt{n}L)$-iteration primal-dual path-following method, based on wide neighborhoods and large updates, for monotone LCP[J]. *SIAM J Optim*, 2005, **16**(2): 400-417.

[15] Browne S, Dongarra J, Grosse E, Rowan T. *The Netlib Mathematical Software Repository*[M]. Corporation for National Research Initiatives, 1995.

[16] Ai W. Neighborhood-following algorithms for linear programming[J]. *Science in China, Ser A: Mathematics*, 2004, **47**(6): 812-820.

[17] Ye Y, Todd J, Mizuno S. An $O(\sqrt{n}L)$-iteration homogeneous and self-dual linear programming algorithm[J]. *Math Oper Res*, 1994,**19**(2): 53-67.

An Interior-Point Method With a New Iterative Scheme

YANG Xi-mei[1], LIU Hong-wei[2], ZHANG Yin-kui[1]

(1. *College of Mathematics and Information Science*, *Henan Normal University*, *Xinxiang*, *Henan* 453007, *P.R.China*;

2.*School of Mathematics and Statistics*, *Xidian University*, *Xi'an* 710071, *P.R.China*)

(Recommended by YANG Xin-ming, M. AMM Editorial Board)

Abstract: A 2nd-order Mehrotra-type predictor-corrector interior-point method was proposed for linear programming, in which the predictor direction and corrector direction were computed with the Newton method and the search direction was obtained through a new form of combination of the predictor direction and corrector direction. At each step of the iteration, the step size parameter was calculated with the iteration restricted to a wide neighborhood of the central path. Analysis indicates the proposed algorithm converges to the optimal solution after finite times of iteration and has the polynomial iteration complexity $O(\sqrt{n}L)$, which is the best complexity result for the current interior-point methods. Numerical experiment proves the high efficiency of the proposed algorithm.

Key words: linear programming; interior-point method; iterative scheme; wide neighborhood; polynomial complexity

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(61179040; 61303030)