

非定常 Stokes 方程的降阶稳定化 CN 有限体积元外推模型*

腾 飞¹, 罗振东²

(1. 凯里学院 数学科学学院, 贵州 凯里 556011;
2. 华北电力大学 数理学院, 北京 102206)

摘要: 利用稳定化的 Crank-Nicolson (CN) 有限体积元方法和特征投影分解方法, 建立非定常 Stokes 方程的一种自由度很少、精度足够高的降阶稳定化 CN 有限体积元外推模型, 并给出这种降阶稳定化 CN 有限体积元外推模型解的误差估计和算法的实现. 最后用数值例子说明数值结果与理论结果相吻合, 并阐明这种降阶稳定化 CN 有限体积元外推模型的优越性.

关键词: 稳定化 CN 有限体积元方法; 特征投影分解方法; 非定常 Stokes 方程; 误差估计

中图分类号: O242.21 **文献标志码:** A
doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.09.005

引 言

设 $\Omega \subset R^2$ 是有界的连通凸多边形区域. 考虑下面流体动力学中的非定常 Stokes 方程.

问题 I 求 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$ 和 p 使得对于 $T > 0$ 满足

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, & (x, y, t) \in \Omega \times (0, T], \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0, & (x, y, t) \in \Omega \times (0, T], \\ \mathbf{u}(x, y, t) = \boldsymbol{\varphi}(x, y, t), & (x, y, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \\ \mathbf{u}(x, y, 0) = \mathbf{u}^0(x, y), & (x, y) \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{u}_t = \partial \mathbf{u} / \partial t$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$ 是流体速度向量, p 是压力场, $\mu = 1/Re$ (Re 是 Reynolds 数), $\mathbf{f}(x, y, t)$ 是源函数, T 是总时间, $\boldsymbol{\varphi}(x, y, t)$ 是已知的边值速度向量, $\mathbf{u}^0(x, y)$ 是已知的初值速度向量. 为了便于理论分析, 不失一般性, 不妨假定 $\boldsymbol{\varphi}(x, y, t) = \mathbf{u}^0(x, y) = \mathbf{0}$.

非定常 Stokes 方程是流体力学中一个重要的基本偏微分方程, 有很多的实际物理背景. 对其研究有重要的应用价值. 由于描述实际工程问题的非定常 Stokes 方程往往带复杂的源项或不规则的计算域, 要想求出其解析解是不容易的, 有效的方法是求其数值解. 有限差分法和有

* 收稿日期: 2014-05-15; 修订日期: 2014-06-06

基金项目: 国家自然科学基金(11271127); 贵州省教育厅自然科学研究项目(黔教合 KY 字[2013]207)

作者简介: 腾飞(1986—), 女, 吉林人, 讲师, 硕士(E-mail: tengfeikl@126.com);
罗振东(1958—), 男, 广西桂平人, 教授, 博士, 博士生导师(通讯作者. E-mail: zhdluo@ncepu.edu.cn).

限元法及有限体积元(FVE)法是3种求解非定常 Stokes 方程的常用方法^[1-3].由于 FVE 法^[4]能保持局部的质量或能量守恒,比有限差分法精度高而且能适应边界复杂的计算域,又与有限元方法有同阶精度但要比有限元方法便于计算(事实上,FVE 格式最终可通过体积元转化为差分格式计算,并可以借助有限元方法做解的存在性、稳定性和收敛性的理论分析),所以 FVE 法被公认是最有效的数值计算方法之一.因此,利用 FVE 方法求解非定常 Stokes 方程比用有限元法和有限差分法更有优势.虽然文献[5]已经给出了非定常 Stokes 方程的一种时间一阶精度的经典稳定化 FVE 方法,但是对于实际工程应用,经典的稳定化 FVE 格式也包含有很多自由度(等于3倍网格节点数目),而且只有一阶时间精度.为了得到足够高的时间精度,时间步长必须取足够小,从而增加了计算时间推进步数,增加计算过程中截断误差的积累,影响计算精确度.因此,在保证有足够精度数值解的情况下,如何降低 FVE 格式的自由度、简化计算、节省计算量和存储要求,减少计算过程中截断误差的积累,是实际计算非定常 Stokes 方程数值解中需要解决的关键问题.

大量实例已经证明特征投影分解(proper orthogonal decomposition,简记为 POD)方法^[6]是一种能够极大地减少数值模型自由度即降低模型维数的有效逼近方法.该方法已经广泛成功地应用于包括信号分析和模式识别^[7]、统计学及地球物理流体动力学和气象学^[8]等各种领域. POD 方法实质上是在最小二乘意义下寻找能代表已知数据的一组正交基,即一种求已知数据的最优逼近方法.早年,POD 方法主要用于统计中的主分量分析或寻找动力系统的主要特征^[6-10].直到最近,才有一些基于 POD 方法的降阶有限体积元格式^[11-14]被建立.但现有的基于 POD 方法的降阶 FVE 格式(例如文献[11-14])只有一阶时间精度.这样,为了得到足够高的时间精度,时间步长必须取足够小,从而增加了计算时间推进步数,也会增加计算过程中截断误差的积累,影响计算精确度.特别是,现有基于 POD 方法的降阶 FVE 格式(例如,文献[11-14])都是用整体时间段 $[0, T]$ 上的经典 FVE 解作为瞬像,去构造 POD 基和基于 POD 方法的降阶 FVE 格式,然后用这些降阶格式重复计算相同时间段 $[0, T]$ 的数值解.据笔者所知,目前还没有利用 POD 方法对非定常 Stokes 方程具有时间二阶精度的稳定化 Crank-Nicolson (CN) FVE (CNFVE)格式做降阶处理的报道.因此,本文改进现有的方法,利用稳定化 CNFVE 方法和 POD 方法建立二维非定常 Stokes 方程的一种自由度很少、精度足够高的降阶稳定化 CNFVE 外推模型,并给出这种降阶稳定化 CNFVE 外推模型解的误差估计和算法的实现.最后用数值例子说明数值结果与理论结果相吻合,并阐明这种降阶稳定化 CNFVE 外推模型的优越性.本文与现有文献(例如,文献[11-14]等)的最大区别在于:这里仅用很短时段 $[0, T_0]$ ($T_0 \ll T$)上已求出经典的稳定化 CNFVE 解作为瞬像、构造 POD 基函数及建立具有很少自由度和足够高精度的降阶稳定化 CNFVE 外推模型,去计算总体时间段 $[0, T]$ 上的降阶数值解.这就相当于用已有流体信息去预测预报未来流体的发展变化情况,这是具有广泛应用前景的数值计算方法.此外,本文将用误差估计去指导 POD 基的选取及 POD 基的更新,这些都是对现有基于 POD 技术的降阶方法(例如,文献[11-14]等的方法)的改进和创新.

本文的安排如下:第1节给出二维非定常 Stokes 方程时间二阶精度的 CN 时间半离散化格式和时间二阶精度的全离散稳定化 CNFVE 格式及其误差估计,并用最初时间段上很少的经典稳定化 CNFVE 解构成瞬像;第2节利用 POD 方法处理瞬像、构造标准正交 POD 基函数、建立一种具有足够高精度、自由度很少的降阶稳定化 CNFVE 外推模型;第3节分析二维非定常 Stokes 方程降阶稳定化 CNFVE 外推模型解的误差,并给出解降阶稳定化 CNFVE 外推模型的算法实现;第4节用数值例子去验证理论结果与数值模拟结果相吻合,并阐明降阶稳定化

CNFVE 外推算法的优越性; 第 5 节给出主要的结论.

1 非定常 Stokes 方程时间二阶精度的经典 CNFVE 方法

本文用到的 Sobolev 空间^[15]是标准的. 设 $U = H_0^1(\Omega)^2$ 和 $M = L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q dx dy = 0 \right\}$, 则问题 I 的广义解为

问题 II 求 $(\mathbf{u}, p) : [0, T] \rightarrow U \times M$ 满足

$$\begin{cases} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(p, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in U, \\ b(q, \mathbf{u}) = 0, & \forall q \in M, \\ \mathbf{u}(x, y, 0) = \mathbf{0}, & (x, y) \in \Omega, \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}), \quad b(q, \mathbf{v}) = (q, \operatorname{div} \mathbf{v}),$$

而且 (\cdot, \cdot) 表示矩阵或向量或标量函数 L^2 内积.

双线性型 $a(\cdot, \cdot)$ 是对称、有界和正定的(参见文献[16-17]), 即

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \leq \mu \|\nabla \mathbf{u}\|_0 \|\nabla \mathbf{v}\|_0, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U, \quad (3)$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mu \|\mathbf{u}\|_1^2, \quad \forall \mathbf{u} \in U. \quad (4)$$

双线性型 $b(\cdot, \cdot)$ 是有界和满足连续的 Babuška-Brezzi (BB) 条件的(参见文献[16-17]), 则有

$$|b(q, \mathbf{v})| \leq \|q\|_0 \|\nabla \mathbf{v}\|_0, \quad \forall \mathbf{v} \in U, \quad \forall q \in M, \quad (5)$$

$$\sup_{\mathbf{v} \in U} \frac{|b(q, \mathbf{v})|}{\|\nabla \mathbf{v}\|_0} \geq \beta_0 \|q\|_0, \quad \forall q \in M, \quad (6)$$

其中 $\beta_0 > 0$ 是常数.

归由于式(3)~(6), 当 $\mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega)^2$ 时, 问题 II 存在唯一的解 $(\mathbf{u}, p) \in U \times M$ (参见文献[16-17]).

设 k 是时间步长而且 (\mathbf{u}^n, p^n) 是 (\mathbf{u}, p) 在 $t_n = nk (n = 0, 1, \dots, N = [T/k])$ 处关于时间离散的非离散逼近. 如果问题 II 在 $t = t_n$ 处的时间微商 \mathbf{u}_t 用向后一步的差商 $\bar{\partial}_t \mathbf{u}^n = (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1})/k$ 逼近, 并记 $\bar{\mathbf{u}}^n = (\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1})/2$, $\mathbf{f}^{n-1/2} = \mathbf{f}(t_{n-1/2}, x, y)$, 那么问题 II 的 CN 时间半离散化格式可写为

问题 III 求 $(\mathbf{u}^n, p^n) \in U \times M (1 \leq n \leq N)$ 满足

$$\begin{cases} (\bar{\partial}_t \mathbf{u}^n, \mathbf{v}) + a(\bar{\mathbf{u}}^n, \mathbf{v}) - b(p^n, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}^{n-1/2}, \mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in U, \\ b(\mathbf{u}^n, q) = 0, & \forall q \in M, \\ \mathbf{u}^0 = \mathbf{0}, & (x, y) \in \Omega. \end{cases} \quad (7)$$

利用鞍点原理(参见文献[16]或[17])和 Taylor 展开式不难得到下面定理.

定理 1 若 $\mathbf{f} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^2)$, 问题 III 存在唯一的解序列 $(\mathbf{u}^n, p^n) \in U \times M (n = 1, 2, \dots, N)$ 满足

$$\|\mathbf{u}^n\|_0 + k \|\nabla \mathbf{u}^n\|_0 + k \|p^n\|_0 \leq C \left(k \sum_{i=0}^n \|\mathbf{f}^{i-1/2}\|_{-1}^2 \right)^{1/2}, \quad (8)$$

其中上式和后面用到的 C 均表示与时间步长 k 和空间区域剖分网格参数无关, 但与问题 I 的

其它已知参数及 f 有关的常数. 而且当 $f \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)^2$, 问题 II 的解序列 $(\mathbf{u}^n, p^n) \in U \times M (n = 1, 2, \dots, N)$ 与问题 III 的解 (\mathbf{u}, p) 之间有下面的误差估计:

$$\| \mathbf{u}(t_n) - \mathbf{u}^n \|_0 + k \| \nabla(\mathbf{u}(t_n) - \mathbf{u}^n) \|_0 + k^{1/2} \| p(t_n) - p^n \|_0 \leq Ck^2, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

下面对空间变量引入 FVE 逼近. 这里用到的 FVE 方法理论主要参考文献 [4] (更多的细节详见文献 [4]).

首先设 $\mathfrak{S}_h = \{K\}$ 是 $\bar{\Omega}$ 具有最大直径 $h = \max h_K$ 的拟一致三角形剖分, 其中 h_K 是三角形 $K \in \mathfrak{S}_h$ 的直径 (参见文献 [4, 16]). 为了刻画 FVE 方法, 还要引入基于 \mathfrak{S}_h 的对偶剖分 \mathfrak{S}_h^* , 它的单元称为控制元, 控制元的构造与文献 [4] 中的构造相同. 设 z_K 是单元 $K \in \mathfrak{S}_h$ 的重心, 将 z_K 与三角形 K 的各边中点连结, 把 K 剖分成 3 个小四边形 K_z . 记 $Z_h(K)$ 为 K 的顶点, 则 $Z_h = \cup_{K \in \mathfrak{S}_h} Z_h(K)$ 为 \mathfrak{S}_h 的顶点集合. 对于每个 $z = (x_z, y_z) \in Z_h$, 由所有共享顶点 $z = (x_z, y_z)$ 的小四边形构成控制元 V_z . 所有的控制元覆盖 $\bar{\Omega}$, 构成 \mathfrak{S}_h 的对偶剖分 \mathfrak{S}_h^* (参见图 1 和图 2). 用 Z_h° 表示剖分 \mathfrak{S}_h 的顶点集合 Z_h 中的内部顶点集合.

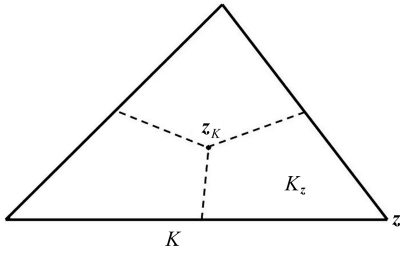


图 1 三角形 K 被分成 3 个四边形 K_z

Fig.1 Triangle K is partitioned into 3 quadrangles K_z

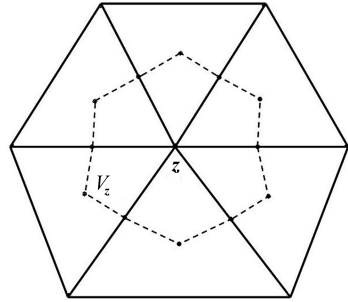


图 2 虚线连成控制元 V_z

Fig.2 Control volume V_z formed with linked dotted lines

由于三角形剖分 \mathfrak{S}_h 是拟一致剖分的, 所以相应的对偶剖分 \mathfrak{S}_h^* 也是拟一致的 (参见文献 [4, 16]).

定义速度和压力试验空间 U_h 和 M_h 及速度的检验函数空间 \tilde{U}_h 分别如下:

$$\begin{cases} U_h = \{ \mathbf{u}_h \in C(\bar{\Omega})^2 \cap U : \mathbf{u}_h|_K \in P_1(K)^2, \forall K \in \mathfrak{S}_h \}, \\ M_h = \{ q_h \in M : q_h|_K \in P_1(K), \forall K \in \mathfrak{S}_h \}, \\ \tilde{U}_h = \{ \mathbf{v}_h \in L^2(\Omega)^2 : \mathbf{v}_h|_{V_z} \in P_0(V_z)^2, \forall V_z \in \mathfrak{S}_h^*; \\ \quad \mathbf{v}_h|_{V_z} = \mathbf{0}, V_z \cap \partial\Omega \neq \emptyset \}, \end{cases} \quad (10)$$

其中 $P_m(K)$ 是 K 上次数不超过 $m (m = 0, 1)$ 的多项式空间. 显然有 $U_h \subset U = H_0^1(\Omega)^2$ 和 $M_h \subset M$, 而且 \tilde{U}_h 是由基函数

$$\phi_z(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in V_z, \forall z \in Z_h^\circ, \\ 0, & \text{other} \end{cases} \quad (11)$$

张成.

对于 $w \in U = H_0^1(\Omega)^2$, 设 $\Pi_h w$ 是 w 在试验空间 U_h 上的插值投影. 则当 $w \in H^2(\Omega)^2$ 时, 由 Sobolev 空间的插值理论 [4, 16] 有

$$| \mathbf{w} - \Pi_h \mathbf{w} |_m \leq Ch^{2-m} | \mathbf{w} |_2, \quad m = 0, 1. \quad (12)$$

再对于 $\mathbf{w} \in U$, 设 $\Pi_h^* \mathbf{w}$ 是 \mathbf{w} 在 \tilde{U}_h 上的插值投影, 即

$$\Pi_h^* \mathbf{w} = \sum_{z \in Z_h^*} \mathbf{w}(z) \phi_z, \quad (13)$$

则由 Sobolev 空间的插值理论^[4,16] 有

$$\| \mathbf{w} - \Pi_h^* \mathbf{w} \|_0 \leq Ch | \mathbf{w} |_1. \quad (14)$$

由于检验空间 $\tilde{U}_h \not\subset U_h$, 所以对问题 II 的双线性型 $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 和 $b(q, \mathbf{v})$ 须做相应修改. 利用非协调有限元法的思想, 把整个区域 $\bar{\Omega}$ 上的积分写成在对偶元 V_z 上的积分和, 这样有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx dy &= \sum_{V_z \in \mathfrak{S}_h^*} \int_{V_z} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx dy = \\ &= \sum_{V_z \in \mathfrak{S}_h^*} \left[\int_{\partial V_z} (\mathbf{v} \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} ds - \int_{V_z} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} dx dy \right], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} dx dy = \sum_{V_z \in \mathfrak{S}_h^*} \int_{V_z} \nabla p \cdot \mathbf{v} dx dy = \sum_{V_z \in \mathfrak{S}_h^*} \left[\int_{\partial V_z} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds - \int_{V_z} p \operatorname{div} \mathbf{v} dx dy \right], \quad (16)$$

其中 $\int_{\partial V_z}$ 表示在对偶元的边界 ∂V_z 上按逆时针方向的边界积分; $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^T$ 表示 ∂V_z 的单位外法向量. 因此, $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 和 $b(q, \mathbf{v})$ 可分别写为

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nu \sum_{V_z \in \mathfrak{S}_h^*} \left[\int_{V_z} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} dx dy - \int_{\partial V_z} (\mathbf{v} \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} ds \right], \quad (17)$$

$$b(\mathbf{v}, p) = \sum_{V_z \in \mathfrak{S}_h^*} \left[\int_{\partial V_z} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds - \int_{V_z} p \operatorname{div} \mathbf{v} dx dy \right]. \quad (18)$$

由于 \tilde{U}_h 是以对偶元 V_z 上的特征函数为基函数的分片常数构成的空间, 因此有

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = -\nu \sum_{V_z \in \mathfrak{S}_h^*} \int_{\partial V_z} (\mathbf{v}_h \nabla \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} ds, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \tilde{U}_h, \mathbf{u}_h \in U_h, \quad (19)$$

$$b(\mathbf{v}_h, p_h) = \sum_{V_z \in \mathfrak{S}_h^*} \int_{\partial V_z} p_h \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} ds, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \tilde{U}_h, \forall p_h \in M_h. \quad (20)$$

记

$$a_h(\mathbf{u}_h^n, \Pi_h^* \mathbf{v}_h) = -\nu \sum_{V_z \in \mathfrak{S}_h^*} \int_{\partial V_z} (\mathbf{v}_h(z) \nabla \mathbf{u}_h^n) \cdot \mathbf{n} ds, \quad \forall \mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h \in U_h, \quad (21)$$

$$b_h(\Pi_h^* \mathbf{v}_h, q_h) = \sum_{V_z \in \mathfrak{S}_h^*} \int_{\partial V_z} q_h \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} ds, \quad \forall \mathbf{v}_h \in U_h, \forall p_h \in M_h. \quad (22)$$

由文献[3]或文献[5]或文献[4]中证明定理 5.1.1~5.1.5 的方法可得到下面两引理.

引理 2 双线性型 $a_h(\mathbf{u}_h^n, \Pi_h^* \mathbf{v}_h)$ 是对称、有界和正定的, 即

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u}_h^n, \Pi_h^* \mathbf{v}_h) &= a_h(\Pi_h^* \mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h^n) = a(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) \leq \\ &\mu \| \nabla \mathbf{u}_h^n \|_0 \| \nabla \mathbf{v}_h \|_0, \quad \forall \mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h \in U_h, \\ a_h(\mathbf{u}_h^n, \Pi_h^* \mathbf{u}_h^n) &= \mu \| \nabla \mathbf{u}_h^n \|_0^2, \quad \forall \mathbf{u}_h \in U_h. \end{aligned}$$

双线性型 $b_h(\Pi_h^* \mathbf{v}_h, q_h)$ 满足下面性质:

$$b_h(\Pi_h^* \mathbf{v}_h, q_h) = -b(\mathbf{v}_h, q_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in U_h, \forall p_h \in M_h.$$

引理 3 有对称性等式成立

$$(u_h, \Pi_h^* v_h) = (v_h, \Pi_h^* u_h), \quad \forall u_h, v_h \in U_h.$$

对于任意的 $\mathbf{v} \in H^m(\Omega)^2 (m = 0, 1)$ 和 $\mathbf{v}_h \in U_h$, 有

$$|(\mathbf{v}, \mathbf{v}_h) - (\mathbf{v}, \Pi_h^* \mathbf{v}_h)| \leq Ch^{m+n} \|\mathbf{v}\|_m \|\mathbf{v}_h\|_n, \quad n = 0, 1.$$

令 $\|\mathbf{v}_h\|_1 = (\mathbf{v}_h, \Pi_h^* \mathbf{v}_h)^{1/2}$, 则 $\|\cdot\|_1$ 在 U_h 上等价于 $\|\cdot\|_0$, 即存在正的常数 C_1 和 C_2 使得

$$C_1 \|\mathbf{v}_h\|_0 \leq \|\mathbf{v}_h\|_1 \leq C_2 \|\mathbf{v}_h\|_0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in U_h.$$

于是, 问题 I 具有时间二阶精度的全离散稳定化 CNFVE 格式为

问题 IV 求 $(\mathbf{u}_h^n, p_h^n) \in U_h \times M_h (1 \leq n \leq N)$ 满足

$$\begin{cases} (\bar{\partial}_t \mathbf{u}_h^n, \Pi_h^* \mathbf{v}_h) + a(\bar{\mathbf{u}}_h^n, \mathbf{v}_h) - b(p_h^n, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}^{n-1/2}, \Pi_h^* \mathbf{v}_h), & \forall \mathbf{v}_h \in U_h, \\ b(\mathbf{u}_h^n, q_h) + D(p_h^n, q_h) = 0, & \forall q_h \in M_h, \\ \mathbf{u}_h^0 = 0, & (x, y) \in \Omega, \end{cases} \quad (23)$$

其中

$$D(p_h, q_h) = \sum_{K \in \mathfrak{S}_h} \left\{ \int_{K,2} p_h q_h dx dy - \int_{K,1} p_h q_h dx dy \right\}, \quad p_h, q_h \in M_h, \quad (24)$$

这里 $\int_{K,i} g(x) dx dy$ 表示在 K 上精度为 i 的 Gauss(高斯) 积分, $g(x) = p_h q_h$ 是次数不超过 $i (i = 1, 2)$ 次的多项式. 于是, 对于所有的检验函数 $q_h \in M_h$, 当 $i = 1$ 时, 试验函数 $p_h \in M_h$ 必须是分片常数.

再定义 L^2 -投影算子 $\rho_h: L^2(\Omega) \rightarrow W_h$ 如下:

$$(p, q_h) = (\rho_h p, q_h), \quad \forall p \in L^2(\Omega), q_h \in W_h, \quad (25)$$

其中 $W_h \subset L^2(\Omega)$ 表示相应于 \mathfrak{S}_h 的分片常数空间, 即在每个 $K \in \mathfrak{S}_h$ 是常数的空间. 那么, 投影算子 ρ_h 有下面的性质(参见文献[5, 16]):

$$\|\rho_h p\|_0 \leq \|p\|_0, \quad \forall p \in L^2(\Omega), \quad (26)$$

$$\|p - \rho_h p\|_0 \leq Ch \|p\|_1, \quad \forall p \in H^1(\Omega). \quad (27)$$

利用投影算子 ρ_h 的定义, 双线性型 $D(\cdot, \cdot)$ 可以表示如下:

$$D(p_h, q_h) = (p_h - \rho_h p_h, q_h) = (p_h - \rho_h p_h, q_h - \rho_h q_h). \quad (28)$$

对于问题 IV, 用经典 FVE 分析方法(例如, 文献[5]或文献[4]中的第 1.7.1.2 节定理 1.58 的证明方法和第 5.6 节方法), 可得到下面的主要结论.

定理 4 在定理 1 的条件下, 问题 IV 存在唯一的解序列 $(\mathbf{u}_h^n, p_h^n) \in U_h \times M_h (1 \leq n \leq N)$ 满足

$$\|\mathbf{u}_h^n\|_0 + k \|\nabla \mathbf{u}_h^n\|_0 + k \|p_h^n\|_0 \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|\mathbf{f}^{i-1/2}\|_{-1}^2 \right)^{1/2}, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (29)$$

而且当问题 II 的解 $(\mathbf{u}, p) \in H^2(\Omega)^2 \times H^1(\Omega)$ 和 $k = O(h)$ 时, 问题 IV 的解 $(\mathbf{u}_h^n, p_h^n) \in U_h \times M_h$ 有下面的误差估计:

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}(t_n) - \mathbf{u}_h^n\|_0 + k \|\nabla(\mathbf{u}(t_n) - \mathbf{u}_h^n)\|_0 + k^{1/2} \|p(t_n) - p_h^n\|_0 \leq \\ & C(h^2 + k^2), \quad 1 \leq n \leq N. \end{aligned} \quad (30)$$

当给定三角剖分参数 h 、时间步长 k 、试验空间 U_h 和 M_h 、源项 $\mathbf{f}(x, y, t)$ 、时间限 T 和 Reynolds 数 Re 时, 解问题 IV 可获得一个解集合 $\{(\mathbf{u}_h^n, p_h^n)\}_{n=1}^N$. 然后从这个解集合 $\{(\mathbf{u}_h^n, p_h^n)\}_{n=1}^N$ 抽取最初 L (通常 $L \ll N$, 例如在第 4 节数值例子中, $L = 20, N = 5 \times 10^5$) 个解 $(\mathbf{u}_h^i, p_h^i) (1 \leq i \leq L)$ 构成瞬像.

注 1 当人们求解实际的二维非常 Stokes 方程时, 可以从实际物理问题中抽取样本作为瞬像集合, 然

后利用下面的 POD 方法生成 POD 基函数,最后用 POD 基函数张成的子空间代替试验函数空间 U_h 和 M_h , 建立出具有很低维数的降阶稳定化 CNFVE 外推模型.这样流体流动未来的发展变化状况就能快速模拟预测,这是具有实际应用背景的方法.

2 构造 POD 基和建立基于 POD 基的降阶 CNFVE 外推模型

本文构造 POD 基的方法主要参考文献[11-14](更多的细节详见这些文献).

对于第 1 节抽取的 (\mathbf{u}_i^n, p_i^n) ($1 \leq i \leq L \ll N$), 令 $\mathbf{W}_i(x, y) = (\mathbf{u}_i^n, p_i^n)$ ($1 \leq i \leq L$) 及

$$\mathcal{V} = \text{span} \{ \mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_L \}, \quad (31)$$

并称 \mathcal{V} 为由瞬像 $\{ \mathbf{W}_i \}_{i=1}^L$ 张成的空间, 用 $\{ \boldsymbol{\psi}_j \}_{j=1}^l$ 表示空间 \mathcal{V} 中具有维数为 $l = \dim \mathcal{V}$ 的标准正交基. 那么空间 \mathcal{V} 中的每个元可表示为

$$\mathbf{W}_i = \sum_{j=1}^l (\mathbf{W}_i, \boldsymbol{\psi}_j)_X \boldsymbol{\psi}_j, \quad i = 1, 2, \dots, L, \quad (32)$$

其中 $\mathbf{X} = H^1(\Omega)^2 \times L^2(\Omega)$, $(\mathbf{W}_i, \boldsymbol{\psi}_j)_X = (\nabla \mathbf{u}_h^i, \nabla \boldsymbol{\psi}_{uj}) + (p_h^i, \boldsymbol{\psi}_{pj})$, 而且 $\boldsymbol{\psi}_{uj}$ 和 $\boldsymbol{\psi}_{pj}$ 分别是 $\boldsymbol{\psi}_j$ 中对应于 \mathbf{u}_h 和 p_h 的分量.

定义 1 POD 方法在于求标准正交基 $\boldsymbol{\psi}_j$ ($j = 1, 2, \dots, l$) 使得

$$\min_{\{ \boldsymbol{\psi}_j \}_{j=1}^d} \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \left(\mathbf{W}_i - \sum_{j=1}^d (\mathbf{W}_i, \boldsymbol{\psi}_j)_X \boldsymbol{\psi}_j, \mathbf{W}_i - \sum_{j=1}^d (\mathbf{W}_i, \boldsymbol{\psi}_j)_X \boldsymbol{\psi}_j \right)_X \quad (33)$$

满足

$$(\nabla \boldsymbol{\psi}_{ui}, \nabla \boldsymbol{\psi}_{uj}) = (\boldsymbol{\psi}_{pi}, \boldsymbol{\psi}_{pj}) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq i. \quad (34)$$

问题(33)和(34)的解 $\{ \boldsymbol{\psi}_j \}_{j=1}^d$ 称为秩等于 d 的 POD 基.

定义相关矩阵 $\mathbf{A} = (A_{ij})_{L \times L}$, 其中 $A_{ij} = (\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_j)_X / L$. 则矩阵 \mathbf{A} 是秩为 l 的非负定的 Hermitian 矩阵, 并有下面的结论成立(参见文献[11-14]).

命题 5 设 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l > 0$ 为矩阵 \mathbf{A} 的正特征值, 而且 $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^l$ 是对应的特征向量. 则秩为 $d \leq l$ 的 POD 基

$$\boldsymbol{\psi}_i = \frac{1}{\sqrt{L\lambda_i}} \sum_{j=1}^l (\mathbf{v}^i)_j \mathbf{W}_j, \quad 1 \leq i \leq d \leq l, \quad (35)$$

其中 $(\mathbf{v}^i)_j$ 表示特征向量 \mathbf{v}^i ($i = 1, 2, \dots, d \leq l$) 的第 j 个分量. 而且有下面的误差公式成立

$$\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \left\| \mathbf{W}_i - \sum_{j=1}^d (\mathbf{W}_i, \boldsymbol{\psi}_j)_X \boldsymbol{\psi}_j \right\|_X^2 = \sum_{j=d+1}^l \lambda_j, \quad (36)$$

其中 $\left\| \mathbf{W}_i \right\|_X^2 = (\nabla \mathbf{u}_h^i, \nabla \mathbf{u}_h^i) + (p_h^i, p_h^i)$.

记 $U^d = \text{span} \{ \boldsymbol{\psi}_{u1}, \boldsymbol{\psi}_{u2}, \dots, \boldsymbol{\psi}_{ud} \}$ 和 $M^d = \text{span} \{ \boldsymbol{\psi}_{p1}, \boldsymbol{\psi}_{p2}, \dots, \boldsymbol{\psi}_{pd} \}$. 分别定义 Ritz 投影 $P^d: U_h \rightarrow U^d$ 和 L^2 投影 $\mathcal{Q}^d: M_h \rightarrow M^d$, 即对于 $\mathbf{u}_h \in U_h$ 和 $p_h \in M_h$, 分别满足

$$\begin{cases} (\nabla P^d \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{w}_d) = (\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{w}_d), & \forall \mathbf{w}_d \in U^d, \\ (\mathcal{Q}^d p_h, q_d) = (p_h, q_d), & \forall q_d \in M^d. \end{cases} \quad (37)$$

则由泛函分析理论^[18]知, 存在 P^d 的延拓 $P^h: U \rightarrow U_h$ 和 \mathcal{Q}^d 的延拓 $\mathcal{Q}^h: M \rightarrow M_h$ 使得 $P^h|_{U_h} = P^d: U_h \rightarrow U^d$ 和 $\mathcal{Q}^h|_{M_h} = \mathcal{Q}^d: M_h \rightarrow M^d$, 而且 $\forall \mathbf{u} \in U$ 和 $\forall p \in M$ 分别满足

$$\begin{cases} (\nabla P^h \mathbf{u}, \nabla \mathbf{w}_h) = (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{w}_h), & \forall \mathbf{w}_h \in U_h, \\ (\mathcal{Q}^h p, q_h) = (p, q_h), & \forall q_h \in M_h. \end{cases} \quad (38)$$

由式(38)可推导出投影 \mathcal{Q}^h 和 P^h 是有界的(参见文献[16]):

$$\begin{cases} \| Q^h q_h \|_0 \leq \| q_h \|_0, & \forall q_h \in M_h, \\ \| P^h \mathbf{u} \|_s \leq C \| \mathbf{u} \|_s, & \forall \mathbf{u} \in U, \end{cases} \quad s = -1, 0, 1, \quad (39)$$

而且有以下不等式成立(参见文献[11-14,16]):

$$\| \mathbf{u} - P^h \mathbf{u} \|_s \leq Ch \| \mathbf{u} - P^h \mathbf{u} \|_{s+1}, \quad \forall \mathbf{u} \in U, s = -1, 0. \quad (40)$$

此外,还有下面结果成立(参见文献[11-14,16]).

引理 6 对于每个 $d(1 \leq d \leq l)$, 投影算子 P^d 和 Q^d 分别满足

$$\begin{cases} \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \| \mathbf{u}_h^i - P^d \mathbf{u}_h^i \|_s^2 \leq Ch^{2(1-s)} \sum_{j=d+1}^l \lambda_j, & s = -1, 0, 1, \\ \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \| p_h^i - Q^d p_h^i \|_0^2 \leq \sum_{j=d+1}^l \lambda_j, \end{cases} \quad (41)$$

其中 $(\mathbf{u}_h^i, p_h^i) \in \mathcal{V} (i = 1, 2, \dots, L)$ 是问题 III 的解. 且当 $\mathbf{u} \in H^2(\Omega)^2$ 和 $p \in H^m(\Omega)$ 时, 分别有

$$\begin{cases} | \mathbf{u} - P^h \mathbf{u} |_s + h | \mathbf{u} - P^h \mathbf{u} |_{s+1} \leq Ch^{2-s} | \mathbf{u} |_2, & s = -1, 0, \\ \| p - Q^h p \|_0 \leq Ch^m \| p \|_m, & m = 1, 2. \end{cases} \quad (42)$$

这样, 利用 U^d 和 M^d 可建立非定常 Stokes 方程基于 POD 方法的降阶稳定化 CNFVE 外推模型如下:

问题 V 求 $(\mathbf{u}_d^n, p_d^n) \in U^d \times M^d (1 \leq n \leq N)$ 满足

$$\begin{cases} (\mathbf{u}_d^n, p_d^n) = \sum_{j=1}^d ((\nabla \psi_{uj}, \nabla \mathbf{u}_h^n) \psi_{uj}, (\psi_{pj}, p_h^n) \psi_{pj}), & 0 \leq n \leq L, \\ (\partial_t \mathbf{u}_d^n, \Pi_h^* \mathbf{v}_d) + a(\bar{\mathbf{u}}_d^n, \mathbf{v}_d) - b(p_d^n, \mathbf{v}_d) = (\mathbf{f}^{n-1/2}, \Pi_h^* \mathbf{v}_d), & \forall \mathbf{v}_d \in U^d, L+1 \leq n \leq N, \\ b(\mathbf{u}_d^n, q_d) + D(p_d^n, q_d) = 0, & \forall q_d \in M^d, L+1 \leq n \leq N. \end{cases} \quad (43)$$

注 2 由于试验空间 U_h 和 M_h 分别是分片线性多项式向量函数空间和分片线性多项式函数空间, 所以问题 IV 的总体自由度(即未知量总数)为 $3N_h$ (其中 N_h 为 \mathfrak{S}_h 中三角形顶点数目^[16-17]), 而问题 V 的自由度为 $d (d \ll l \leq L \ll N)$. 对于实际工程问题, \mathfrak{S}_h 中三角形顶点数目是数以万计的, 甚至上亿的, 而 d 只是从 N 个瞬时解中取出的最初很少的 L 个瞬像所对应的一些较大特征值个数, 是很小的(例如, 在第 4 节中, $d = 6$, 而 $N_h = 136 \times 10^4$). 特别是, 问题 V 的前 L 解是由所抽取问题 IV 的最初 L 个解投影到 POD 基得到的, 而大于 L 的 $N - L$ 个解是通过问题 V 的第 2 和第 3 个公式递推迭代得到的, 这里的问题 V 不像文献[11-14]那样做重复计算, 这正是对现有(例如, 文献[11-14]等)的降阶方法的重要改进与区别. 因此, 问题 V 是一个基于 POD 方法的降阶稳定化 CNFVE 外推模型.

3 降阶外推模型解的存在性、收敛性及算法实现

本节先讨论非定常 Stokes 方程降阶稳定化 CNFVE 外推模型解的存在性和收敛性, 然后给出解降阶稳定化 CNFVE 外推模型的算法实现.

3.1 降阶稳定化 CNFVE 外推模型解的存在性和收敛性

讨论问题 V 解的存在性和收敛性, 还需要引入下面的离散 Gronwall 引理.

引理 7(离散 Gronwall 引理^[16-17]) 如果 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 及 $\{\tilde{c}_n\}$ 是 3 个正数列, 且 $\{\tilde{c}_n\}$ 是单调并满足 $a_n + b_n \leq \tilde{c}_n + \bar{\lambda} \sum_{i=0}^{n-1} a_i (\bar{\lambda} > 0)$ 及 $a_0 + b_0 \leq \tilde{c}_0$, 则

$$a_n + b_n \leq \tilde{c}_n \exp(n\bar{\lambda}) \quad (n \geq 0).$$

对于问题 V, 有下面的主要结论.

定理 8 在定理 4 的条件下, 问题 V 存在唯一的解序列 $(\mathbf{u}_d^n, p_d^n) \in U^d \times M^d (1 \leq n \leq N)$, 满足

$$\|\mathbf{u}_d^n\|_0 + k \|\nabla \mathbf{u}_d^n\|_0 + k \|p_d^n\|_0 \leq C \leq ft \left(k \sum_{i=1}^n \|\mathbf{f}^{i-1/2}\|_{-1}^2 \right)^{1/2}, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (44)$$

而且当 $k = O(h)$ 和 $L^2 = O(N)$ 时, 有下面的误差估计:

$$\|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_d^n\|_0 + k \|\nabla(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_d^n)\|_0 + k^{1/2} \|p_h^n - p_d^n\|_0 \leq \tilde{M}(n) + C \left(k^{1/2} \sum_{j=d+1}^l \lambda_j \right)^{1/2}, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (45)$$

其中 $\tilde{M}(n) = 0 (1 \leq n \leq L)$, 而 $\tilde{M}(n) = C(k^2 + h^2) \sqrt{n-L} (L+1 \leq n \leq N)$.

证明 1) 当 $n = 1, 2, \dots, L$ 时, 注意到 $(\mathbf{u}_d^n, p_d^n) \in U^d \times M^d$ 由问题 IV 的最初 L 个解投影到 POD 基得到的, 所以由引理 6 和式 (39) 及定理 4 即得定理 8 当 $n = 1, 2, \dots, L$ 时成立.

2) 当 $n = L+1, L+2, \dots, N$ 时, 如果记

$$A((\mathbf{u}_d^n, p_d^n), (\mathbf{v}_d, q_d)) = 2(\mathbf{u}_d^n, \Pi_h^* \mathbf{v}_d) / k + a(\mathbf{u}_d^n, \mathbf{v}_d) - 2b(p_d^n, \mathbf{v}_d) + 2b(\mathbf{u}_d^n, q_d) + 2D(p_d^n, q_d)$$

和

$$F(\mathbf{v}_d, q_d) = 2(\mathbf{u}_d^{n-1}, \Pi_h^* \mathbf{v}_d) / k - a(\mathbf{u}_d^{n-1}, \mathbf{v}_d) + 2(\mathbf{f}^{n-1/2}; \Pi_h^* \mathbf{v}_d),$$

则问题 V 可以被重写为

问题 VI 已知 (\mathbf{u}_d^L, p_d^L) , 求 $(\mathbf{u}_d^n, p_d^n) \in U^d \times M^d (L+1 \leq n \leq N)$ 满足

$$A((\mathbf{u}_d^n, p_d^n), (\mathbf{v}_d, q_d)) = F(\mathbf{v}_d, q_d), \quad \forall (\mathbf{v}_d, q_d) \in U^d \times M^d, L+1 \leq n \leq N. \quad (46)$$

如果 $p_d^n = 0$, 则问题 VI 为椭圆问题, 显然有唯一的解. 当 $p_d^n \neq 0$ 时, 有 $\|p_d^n\|_0^2 > \|\rho_h p_d^n\|_0^2$, 则存在 $\tilde{\alpha} \in (0, 1)$ 使得 $\|\rho_h p_d^n\|_0^2 = \tilde{\alpha} \|p_d^n\|_0^2$. 则由引理 3 和 Hölder 不等式及 Cauchy 不等式有

$$A((\mathbf{u}_d^n, p_d^n), (\mathbf{u}_d^n, p_d^n)) = \|\mathbf{u}_d^n\|_0^2 / k + \mu \|\nabla \mathbf{u}_d^n\|_0^2 + 2(1 - \tilde{\alpha}) \|p_d^n\|_0^2 \geq \alpha \|(\mathbf{u}_d^n, p_d^n)\|_X^2, \quad \forall (\mathbf{u}_d^n, p_d^n) \in U^d \times M^d, \quad (47)$$

其中 $\alpha = \min\{2C_1/k, \mu, 2(1 - \tilde{\alpha})\} > 0$, 即 $A((\cdot, \cdot), (\cdot, \cdot))$ 在 $U^d \times M^d$ 上正定. 而显然有 $A((\cdot, \cdot), (\cdot, \cdot))$ 和 $F(\cdot, \cdot)$ 分别是在 $U^d \times M^d$ 上有界双线性和线性泛函, 于是, 由 Lax-Milgram 定理^[16] 知, 问题 VI 存在唯一的解序列 $(\mathbf{u}_d^n, p_d^n) \in U^d \times M^d (L+1 \leq n \leq N)$. 故问题 V 存在唯一的解.

在问题 V 中取 $\mathbf{v}_d = \mathbf{u}_d^n + \mathbf{u}_d^{n-1}$ 和 $q_d = p_d^n$, 由 Hölder 不等式及 Cauchy 不等式有

$$\begin{aligned} & 2(\|\mathbf{u}_d^n\|_0^2 - \|\mathbf{u}_d^{n-1}\|_0^2) + k\mu \|\nabla(\mathbf{u}_d^n + \mathbf{u}_d^{n-1})\|_0^2 = \\ & 2(\mathbf{u}_d^n - \mathbf{u}_d^{n-1}, \Pi_h^*(\mathbf{u}_d^n + \mathbf{u}_d^{n-1})) + ka(\mathbf{u}_d^n + \mathbf{u}_d^{n-1}, \mathbf{u}_d^n + \mathbf{u}_d^{n-1}) = \\ & 2k(\mathbf{f}^{n-1/2}, \Pi_h^*(\mathbf{u}_d^n + \mathbf{u}_d^{n-1})) - 2k(p_d^n - \rho_h p_d^n, p_d^n - \rho_h p_d^n) \leq \\ & 2C_2 k \|\mathbf{f}^{n-1/2}\|_{-1} \|\nabla(\mathbf{u}_d^n + \mathbf{u}_d^{n-1})\|_0 - 2k(\|p_d^n\|_0^2 - \|\rho_h p_d^n\|_0^2) \leq \\ & \frac{\mu k}{2} \|\nabla(\mathbf{u}_d^n + \mathbf{u}_d^{n-1})\|_0^2 + \frac{2C_2^2 k}{\mu} \|\mathbf{f}^{n-1/2}\|_{-1}^2 - 2k(1 - \tilde{\alpha}) \|p_d^n\|_0^2, \end{aligned} \quad (48)$$

即得

$$4(\| \mathbf{u}_d^n \|_0^2 - \| \mathbf{u}_d^{n-1} \|_0^2) + k\mu \| \nabla(\mathbf{u}_d^n + \mathbf{u}_d^{n-1}) \|_0^2 + 4k(1 - \tilde{\alpha}) \| p_d^n \|_0^2 \leq 4C_2^2 k\mu^{-1} \| \mathbf{f}^{n-1/2} \|_{-1}^2. \tag{49}$$

对式(49)两边从 $L + 1$ 至 n 求和,并用引理 3,然后整理有

$$\| \mathbf{u}_d^n \|_0^2 + k \sum_{i=L+1}^n (\| \nabla(\mathbf{u}_d^i + \mathbf{u}_d^{i-1}) \|_0^2 + \| p_d^i \|_0^2) \leq Ck \sum_{i=L+1}^n \| \mathbf{f}^{i-1/2} \|_{-1}^2 + C \| \mathbf{u}_d^L \|_0^2. \tag{50}$$

注意到 $\| \nabla(\mathbf{u}_d^n + \mathbf{u}_d^{n-1}) \|_0 \geq \| \nabla \mathbf{u}_d^n \|_0 - \| \nabla \mathbf{u}_d^{n-1} \|_0$ 和 $(\sum_{i=1}^n b_i^2)^{1/2} \geq \sum_{i=1}^n |b_i| / \sqrt{n}$. 对式(50)两边开方,并由式(44)当 $n = 1, 2, \dots, L$ 时的情形即得式(44)当 $n = L + 1, L + 2, \dots, N$ 时的情形成立.

由于 $U^d \subset U_h$ 和 $M^d \subset M_h$,在问题 IV 中取 $\mathbf{v}_h = \mathbf{v}_d \in U^d$ 和 $\mathbf{v}_h = \mathbf{v}_d \in U^d$, 并与问题 V 相减得下面的误差方程:

$$\begin{cases} (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_d^n - (\mathbf{u}_h^{n-1} - \mathbf{u}_d^{n-1}), \Pi_h^* \mathbf{v}_d) + ka(\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_d^n, \mathbf{v}_d) - kb(p_h^n - p_d^n, \mathbf{v}_d) = 0, & \forall \mathbf{v}_d \in U^d, \\ kb(q_d, \mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_d^n) + kD(p_h^n - p_d^n, q_d) = 0, & \forall q_d \in M^d. \end{cases} \tag{51}$$

令 $\mathbf{e}^n = P^d \mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_d^n$ 和 $\boldsymbol{\rho}^n = \mathbf{u}_h^n - P^d \mathbf{u}_h^n$ 及 $\boldsymbol{\eta}^n = Q^d p_h^n - p_d^n$ 和 $\xi^n = p_h^n - Q^d p_h^n$. 这样,由式(51), (38), Hölder 不等式和 Cauchy 不等式及引理 3 有

$$\begin{aligned} 2(\| \mathbf{e}^n \|_0^2 - \| \mathbf{e}^{n-1} \|_0^2) + k\mu \| \nabla(\mathbf{e}^n + \mathbf{e}^{n-1}) \|_0^2 = & 2(\boldsymbol{\rho}^{n-1} - \boldsymbol{\rho}^n, \mathbf{e}^n + \mathbf{e}^{n-1}) + 2(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_d^n - (\mathbf{u}_h^{n-1} - \mathbf{u}_d^{n-1}), \mathbf{e}^n + \mathbf{e}^{n-1}) + \\ & 2ka(\bar{\mathbf{u}}_h^n - \bar{\mathbf{u}}_d^n, \mathbf{e}^n + \mathbf{e}^{n-1}) - 2ka(\boldsymbol{\rho}^n + \boldsymbol{\rho}^{n-1}, \mathbf{e}^n + \mathbf{e}^{n-1}) = \\ & 2(\boldsymbol{\rho}^{n-1} - \boldsymbol{\rho}^n, \mathbf{e}^n + \mathbf{e}^{n-1}) + 2kb(p_h^n - p_d^n, \mathbf{e}^n + \mathbf{e}^{n-1}) - \\ & 2(\mathbf{u}_h^{n-1} - \mathbf{u}_d^{n-1}, \mathbf{e}^n + \mathbf{e}^{n-1} - \Pi_h^*(\mathbf{e}^n + \mathbf{e}^{n-1})) = \\ & 2(\boldsymbol{\rho}^{n-1} - \boldsymbol{\rho}^n, \mathbf{e}^n + \mathbf{e}^{n-1}) - 2(\mathbf{u}_h^{n-1} - \mathbf{u}_d^{n-1}, \mathbf{e}^n + \mathbf{e}^{n-1} - \Pi_h^*(\mathbf{e}^n + \mathbf{e}^{n-1})) + \\ & 2kb(\xi^n, \mathbf{e}^n + \mathbf{e}^{n-1}) - 2k(p_h^n + p_h^{n-1} - p_d^n - p_d^{n-1} - \rho_h(p_h^n + p_h^{n-1} - p_d^n - p_d^{n-1}), \boldsymbol{\eta}^n) \leq \\ & C(k^{-1} \| \boldsymbol{\rho}^{n-1} - \boldsymbol{\rho}^n \|_{-1}^2 + k \| \boldsymbol{\rho}^{n-1} \|_0^2 + \| \mathbf{e}^{n-1} \|_0^2) + \frac{k\mu}{2} \| \nabla(\mathbf{e}^n + \mathbf{e}^{n-1}) \|_0^2 + \\ & Ck \| \xi^n \|_0^2 - 2k(p_h^n + p_h^{n-1} - p_d^n - p_d^{n-1} - \rho_h(p_h^n + p_h^{n-1} - p_d^n - p_d^{n-1}), \boldsymbol{\eta}^n). \end{aligned} \tag{52}$$

另一方面,由式(37)和(28)有

$$\begin{aligned} -2k(p_h^n + p_h^{n-1} - p_d^n - p_d^{n-1} - \rho_h(p_h^n + p_h^{n-1} - p_d^n - p_d^{n-1}), \boldsymbol{\eta}^n) = & -2k(\boldsymbol{\eta}^n - \rho_h \boldsymbol{\eta}^n, \boldsymbol{\eta}^n - \rho_h \boldsymbol{\eta}^n) - 2k(\boldsymbol{\eta}^{n-1} - \rho_h \boldsymbol{\eta}^{n-1}, \boldsymbol{\eta}^n - \rho_h \boldsymbol{\eta}^n) \leq \\ & -2k(\| \boldsymbol{\eta}^n \|_0^2 - \| \rho_h \boldsymbol{\eta}^n \|_0^2) + k(\| \boldsymbol{\eta}^{n-1} \|_0^2 - \| \rho_h \boldsymbol{\eta}^{n-1} \|_0^2) + \\ & k(\| \boldsymbol{\eta}^n \|_0^2 - \| \rho_h \boldsymbol{\eta}^n \|_0^2) \leq \\ & k(\| \boldsymbol{\eta}^{n-1} \|_0^2 - \| \rho_h \boldsymbol{\eta}^{n-1} \|_0^2) - k(\| \boldsymbol{\eta}^n \|_0^2 - \| \rho_h \boldsymbol{\eta}^n \|_0^2). \end{aligned} \tag{53}$$

结合式(52)和(53),当 $h = O(k)$ 时,由式(40)可得到

$$\begin{aligned} 4(\| \mathbf{e}^n \|_0^2 - \| \mathbf{e}^{n-1} \|_0^2) + k\mu \| \nabla(\mathbf{e}^n + \mathbf{e}^{n-1}) \|_0^2 + 4k(\| \boldsymbol{\eta}^n \|_0^2 - \| \rho_h \boldsymbol{\eta}^n \|_0^2) \leq & C(k \| \boldsymbol{\rho}^n \|_0^2 + k \| \boldsymbol{\rho}^{n-1} \|_0^2 + \| \mathbf{e}^{n-1} \|_0^2) + Ck \| \xi^n \|_0^2 + \\ & 4k(\| \boldsymbol{\eta}^{n-1} \|_0^2 - \| \rho_h \boldsymbol{\eta}^{n-1} \|_0^2). \end{aligned} \tag{54}$$

对式(54)两边从 $L + 1$ 到 n 求和得

$$\begin{aligned}
& 4 \| \mathbf{e}^n \|_0^2 + k\mu \sum_{i=L+1}^n \| \nabla(\mathbf{e}^i + \mathbf{e}^{i-1}) \|_0^2 + 2k(\| \boldsymbol{\eta}^n \|_0^2 - \| \boldsymbol{\rho}_h \boldsymbol{\eta}^n \|_0^2) \leq \\
& 4 \| \mathbf{e}^L \|_0^2 + 4k(\| \boldsymbol{\eta}^L \|_0^2 - \| \boldsymbol{\rho}_h \boldsymbol{\eta}^L \|_0^2) + \\
& Ck \left[\sum_{i=L}^n (\| \boldsymbol{\rho}^i \|_0^2 + \| \boldsymbol{\xi}^i \|_0^2) + \sum_{i=L}^{n-1} \| \mathbf{e}^i \|_0^2 \right]. \quad (55)
\end{aligned}$$

当 $\boldsymbol{\eta}^n = 0$ 时, 对于 p_d^n 的误差估计显然成立. 当 $\boldsymbol{\eta}^n \neq 0$ 时, 有 $\| \boldsymbol{\eta}^n \|_0^2 > \| \boldsymbol{\rho}_h \boldsymbol{\eta}^n \|_0^2$, 因此存在 $\alpha_1 \in (0, 1)$ 和 $\alpha_2 \in (0, 1)$ 使得 $\alpha_1 \| \boldsymbol{\eta}^n \|_0^2 = \| \boldsymbol{\rho}_h \boldsymbol{\eta}^n \|_0^2$ 和 $\alpha_2 \| \boldsymbol{\eta}^L \|_0^2 = \| \boldsymbol{\rho}_h \boldsymbol{\eta}^L \|_0^2$. 于是, 可将式 (55) 化简为

$$\begin{aligned}
& \| \mathbf{e}^n \|_0^2 + k \sum_{i=L+1}^n \| \nabla(\mathbf{e}^i + \mathbf{e}^{i-1}) \|_0^2 + k \| \boldsymbol{\eta}^n \|_0^2 \leq \\
& C \| \mathbf{e}^L \|_0^2 + Ck \| \boldsymbol{\eta}^L \|_0^2 + Ck \left[\sum_{i=L}^n (\| \boldsymbol{\rho}^i \|_0^2 + \| \boldsymbol{\xi}^i \|_0^2) + \sum_{i=L}^{n-1} \| \mathbf{e}^i \|_0^2 \right]. \quad (56)
\end{aligned}$$

将引理 7 应用于式 (56), 并由逆估计定理^[16]得

$$\begin{aligned}
& \| \mathbf{e}^n \|_0^2 + k \sum_{i=L+1}^n \| \nabla(\mathbf{e}^i + \mathbf{e}^{i-1}) \|_0^2 + k \| \boldsymbol{\eta}^n \|_0^2 \leq \\
& C \left[\| \mathbf{e}^L \|_0^2 + k \| \boldsymbol{\eta}^L \|_0^2 + k \sum_{i=L}^n (\| \boldsymbol{\rho}^i \|_0^2 + \| \boldsymbol{\xi}^i \|_0^2) \right] \exp(C(n-L)k). \quad (57)
\end{aligned}$$

对式 (57) 两边开方, 并由

$$\left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2} \geq \sum_{i=1}^n |b_i| / \sqrt{n}, \quad \| \nabla(\mathbf{e}^n + \mathbf{e}^{n-1}) \|_0 \geq \| \nabla \mathbf{e}^n \|_0 - \| \nabla \mathbf{e}^{n-1} \|_0$$

得

$$\begin{aligned}
& \| \mathbf{e}^n \|_0 + k \| \nabla \mathbf{e}^n \|_0 + k^{1/2} \| \boldsymbol{\eta}^n \|_0 \leq \\
& C \left[\| \mathbf{e}^L \|_0^2 + k \| \boldsymbol{\eta}^L \|_0^2 + k \sum_{i=L}^n (\| \boldsymbol{\rho}^i \|_0^2 + \| \boldsymbol{\xi}^i \|_0^2) \right]^{1/2}. \quad (58)
\end{aligned}$$

此外, 由引理 6 和定理 4 有

$$\begin{aligned}
& \| \boldsymbol{\rho}^i \|_0 \leq \| \mathbf{u}_h^i - \mathbf{u}(t_i) \|_0 + \| \mathbf{u}(t_i) - P^h \mathbf{u}(t_i) \|_0 + \| P^h(\mathbf{u}(t_i) - \mathbf{u}_h^i) \|_0 \leq \\
& C [\| \mathbf{u}(t_i) - P^h \mathbf{u}(t_i) \|_0 + \| \mathbf{u}(t_i) - \mathbf{u}_h^i \|_0] \leq C(h^2 + k^2), \quad (59)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k^{1/2} \| p_h^i - \mathcal{Q}^d p_h^i \|_0 \leq \\
& k^{1/2} [\| p_h^i - p(t_i) \|_0 + \| p(t_i) - P^h p(t_i) \|_0 + \| P^h(p(t_i) - p_h^i) \|_0] \leq \\
& Ck^{1/2} [\| p(t_i) - P^h p(t_i) \|_0 + \| p(t_i) - p_h^i \|_0] \leq C(h^2 + k^2). \quad (60)
\end{aligned}$$

由式 (58) ~ (60) 和引理 6 及式 (45) 当 $n = 1, 2, \dots, L$ 时的情形即得式 (45) 当 $n = L + 1, L + 2, \dots, N$ 时的情形. 定理 8 证毕.

结合定理 4 和定理 8 得下面的结论.

定理 9 在定理 8 的条件下, 问题 II 的解 (\mathbf{u}, p) 和问题 V 的解 (\mathbf{u}_d^n, p_d^n) 之间有下面的误差估计:

$$\begin{aligned}
& \| \mathbf{u}(t_n) - \mathbf{u}_d^n \|_0 + k \| \nabla(\mathbf{u}(t_n) - \mathbf{u}_d^n) \|_0 + k \| p(t_n) - p_d^n \|_0 \leq \\
& \tilde{M}(n) + C \left(k^{1/2} \sum_{j=d+1}^l \lambda_j \right)^{1/2}, \quad 1 \leq n \leq N,
\end{aligned}$$

其中 $\tilde{M}(n) = 0 (1 \leq n \leq L)$, 而 $\tilde{M}(n) = C(k^2 + h^2) \sqrt{n-L} (L + 1 \leq n \leq N)$.

注 3 定理 8 中的式 (44) 表明问题 V 的解是稳定的. 定理 8 和定理 9 中的因子 $\left(k \sum_{j=d+1}^l \lambda_j \right)^{1/2}$ 是由降

维产生的,它可作为 POD 基数目选取准则,即只要选取 d 使得 $k^{1/2} \sum_{j=d+1}^l \lambda_j = O(k^4, h^4)$. 而因子 $\sqrt{n-L}$ 是由外推迭代产生的,它可以用来指导 POD 基的更新.

3.2 解降阶稳定化 CNFVE 外推模型的算法实现

解降阶稳定化 CNFVE 外推模型的算法可按下面 7 个步骤实现.

步 1 生成瞬像集合 $\mathbf{W}_i(x, y) = (\mathbf{u}_h^i, p_h^i)$ ($i = 1, 2, \dots, L = O(N^{1/2})$), 它们可以是问题 IV 的经典 CNFVE 解或从物理系统轨迹中抽取的样本或已有的结果.

步 2 构造相关矩阵 $\mathbf{A} = (A_{ij})_{L \times L}$, 其中 $A_{ij} = (\mathbf{W}_i, \mathbf{W}_j)_X / L$, 而且 $(\cdot, \cdot)_X$ 是 $\mathbf{X} = H_0^1(\Omega)^2 \times L^2(\Omega)$ 的内积.

步 3 记 $\mathbf{v} = (a_1, a_2, \dots, a_L)^\top$. 解特征问题 $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ 获得正特征值 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l > 0$ ($l = \dim\{\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_L\}$) 及对应的特征向量 $\mathbf{v}^j = (a_1^j, a_2^j, \dots, a_l^j)^\top$ ($j = 1, 2, \dots, l$).

步 4 给定三角剖分参数 h 、时间步长 k 及所需的误差限 δ , 确定 POD 基数目 d 使得 $(k^{1/2} \sum_{j=d+1}^l \lambda_j)^{1/2} + k^2 + h^2 \leq \delta$.

步 5 构造 POD 基 $\boldsymbol{\psi}_j = \sum_{i=1}^L a_i^j (\mathbf{u}_h^i, p_h^i) / \sqrt{L\lambda_j}$ ($j = 1, 2, \dots, d$).

步 6 取 $U^d = \text{span}\{\boldsymbol{\psi}_{u_1}, \boldsymbol{\psi}_{u_2}, \dots, \boldsymbol{\psi}_{u_d}\}$ 和 $M^d = \text{span}\{\boldsymbol{\psi}_{p_1}, \boldsymbol{\psi}_{p_2}, \dots, \boldsymbol{\psi}_{p_d}\}$, 由解仅含 d 个自由度的问题 V 得降阶外推仿真模型解 (\mathbf{u}_d^n, p_d^n) ($n = 1, 2, \dots, N$).

步 7 如果 $(k^2 + h^2) \sqrt{n-L} \leq (k^{1/2} \sum_{j=d+1}^l \lambda_j)^{1/2}$, 那么 (\mathbf{u}_d^n, p_d^n) ($n = 1, 2, \dots, N$) 就是误差不超过所需的误差限 δ 的降阶稳定化 CNFVE 外推模型解. 否则, 即如果 $(k^2 + h^2) \sqrt{n-L} > (k^{1/2} \sum_{j=d+1}^l \lambda_j)^{1/2}$, 令 $\mathbf{W}_i = (\mathbf{u}_d^{n-i}, p_d^{n-i})$ ($i = L, L-1, \dots, 1$), 返回步 2.

4 数值例子

下面给出一个有凹腔管道流数值例子说明降阶稳定化 CNFVE 外推模型的优越性.

取 $\bar{\Omega} = ([0, 20] \times [2, 8]) \cup ([8, 12] \times [0, 2]) \cup ([8, 12] \times [8, 10])$. 令 $\mathbf{f}(x, y, t) = \mathbf{0}$, 除入口处 $\mathbf{u}^0(x, y) = \boldsymbol{\varphi}(x, y, t) = (0.1(y-2)(8-y), 0)$ ($x = 0, 2 \leq y \leq 8$) 和出口处(自由开放) $\mathbf{u}^0(x, y) = (u_1(x, y, t), 0)$ ($18 \leq x \leq 20, 2 \leq y \leq 8$) 外, 其余的初边值都取为 0 (如图 3).

首先将区域 $\bar{\Omega}$ 剖分为边长 $\Delta x = \Delta y = 0.01$ 的小正方形, 然后在同一方向连接其对角线将每个小正方形剖分成为两个小三角形构成 $h = \sqrt{2} \times 0.01$ 的三角形剖分 \mathfrak{S}_h . 对偶剖分 \mathfrak{S}_h^* 取为重心的对偶剖分. 这样, 时间二阶精度的经典稳定化 CNFVE 格式在每个时间层有 $3 \times 136 \times 10^4$ 个自由度. 为了使得 $h = O(k)$, 取时间步长为 $k = 0.01$.

用经典稳定化 CNFVE 格式即问题 IV 求出的最初 20 个解 (\mathbf{u}_h^n, p_h^n) ($n = 1, 2, \dots, 20$) 作为瞬像. 当 $k = 0.01$ 时, 通过计算得到 $(k^{1/2} \sum_{j=7}^{20} \lambda_j)^{1/2} \leq 4 \times 10^{-4}$. 这就说明只要取最初 6 个 POD 基就能满足精度要求. 这时, 降阶稳定化 CNFVE 外推模型在每个时间层仅有 6 个自由度, 按照 3.2 小节的算法实现 7 个步骤, 经过两次更换 POD 基, 最终获得当 $t = 5\,000$ 时降阶稳定化 CNFVE 外推模型的速度和压力解, 分别画在图 4 和图 5 的下图中. 图 4 和图 5 的上方图分别是用经典稳定化 CNFVE 格式即问题 IV 求出的当 $t = 5\,000$ 时经典稳定 CNFVE 速度和压力解图. 比较图 4 和图 5 中的每两幅图可见, 它们是很相象, 但归咎于经典稳定化 CNFVE 格式自由度

太多,造成计算过程中截断误差的积累,使得经典的稳定化 CNFVE 解的增长明显缓慢.因此降阶稳定化 CNFVE 外推模型的解比经典的稳定化 CNFVE 解更好.

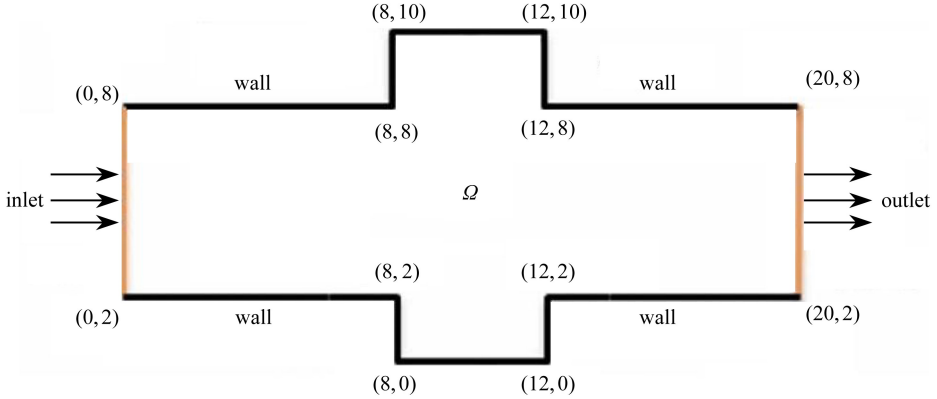


图3 物理模型

Fig.3 The physical model of the conduit flow

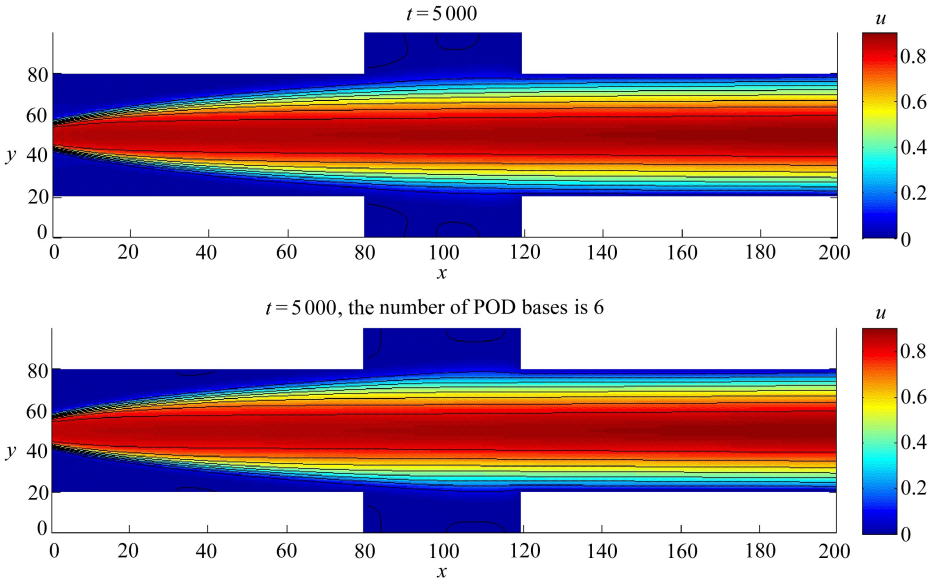


图4 上图是当 $t = 5\ 000$ 时速度的经典 CNFVE 解;下图是当 $t = 5\ 000$ 时速度的降阶稳定化 CNFVE 解

Fig.4 The upper contour and the lower one are the classical CNFVE solution and the reduced-order stabilized CNFVE solution of the flow velocity at the moment $t = 5\ 000$, respectively

图6 给出是当时间 $t = 5\ 000$ 时降阶稳定化 CNFVE 外推模型取不同的 POD 数目时的解与问题IV的经典 CNFVE 解的误差.图6 表明理论结果与数值结果相吻合(因为当 POD 基数目取为6时,理论和数值的误差都不超过 4×10^{-4}).

从计算量来看,基于 POD 方法的降阶稳定化 CNFVE 外推模型在每个时间层只有6个自由度(即未知量),而经典的稳定化 CNFVE 格式在每个时间层有 $3 \times 136 \times 10^4$ 个自由度(即未知量).因此,降阶稳定化 CNFVE 外推模型能极大地减少自由度、简化计算、节省计算量和存储要求,减少计算过程中截断误差的积累和计算时间的耗费,是求解二维非定常 Stokes 方程很有效和可行的方法.

此外,如果采用时间一阶精度的降阶 FVE 格式,为了得到时间二阶精度的降阶稳定化

CNFVE 外推模型相同精度的近似解,必须取 $k = \Delta x = \Delta y = 10^{-4}$. 这样,用时间一阶精度的降阶 FVE 格式计算 $t = 5\,000$ 的解,需要计算 5×10^7 步,是时间二阶精度的降阶稳定化 CNFVE 外推模型(计算步数 5×10^5 步)的 100 倍. 因此,用时间二阶精度的降阶稳定化 CNFVE 外推模型求解二维 Stokes 方程能极大地减少计算中的迭代步数,也能减少计算过程中截断误差的积累,提高计算精度. 从而时间二阶精度的降阶稳定化 CNFVE 外推模型远比时间一阶精度的降阶 FVE 格式优越.

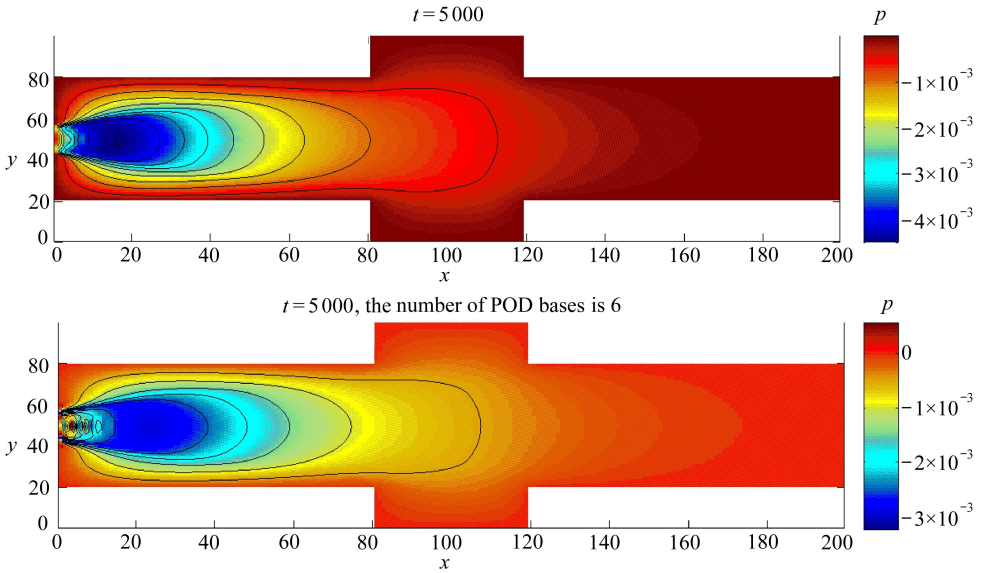


图 5 上图是当 $t = 5\,000$ 时压力的经典 CNFVE 解;下图是当 $t = 5\,000$ 时压力的降阶稳定化 CNFVE 解

Fig.5 The upper contour and the lower one are the classical CNFVE solution and the reduced-order stabilized CNFVE solution of the flow pressure at the moment $t = 5\,000$, respectively

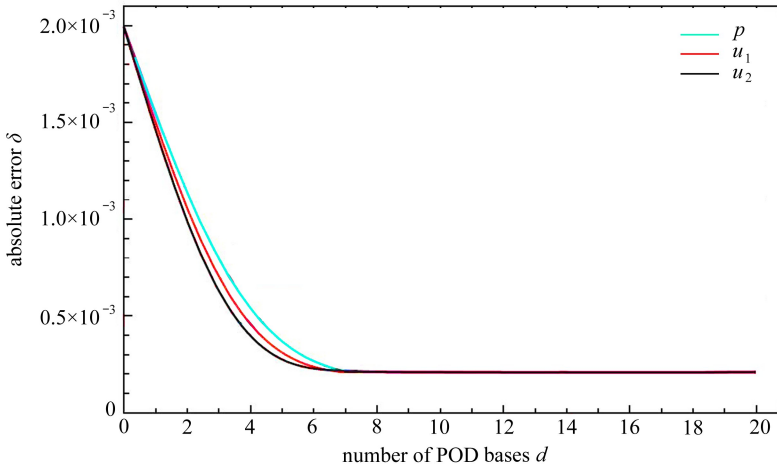


图 6 当 $t = 5\,000$ 时,取不同的 POD 基时降阶稳定化 CNFVE 外推模型解与经典 CNFVE 解之间的误差

Fig.6 The absolute errors between the reduced-order CNFVE solutions with different numbers of POD bases and the classical CNFVE solutions at the moment $t = 5\,000$

5 结 论

本文利用 POD 方法建立了二维非定常 Stokes 方程的一种具有足够高精度、自由度很少的降阶稳定化 CNFVE 外推模型,并给出这种降阶稳定化 CNFVE 外推模型解的误差估计和解降阶稳定化 CN 有限体积元外推模型的算法实现.最后用数值例子验证了数值结果与理论结果相吻合.二维 Stokes 方程时间二阶精度的降阶稳定化 CNFVE 外推模型能比时间二阶精度的经典稳定化 CNFVE 格式节省大量自由度.此外,二维 Stokes 方程时间二阶精度的降阶稳定化 CNFVE 外推模型也比时间一阶精度的降阶 FVE 格式提高时间离散的精度、极大地减少时间方向的迭代步、减少实际计算中截断误差的积累、提高计算精度和计算效率.特别是,本文仅用很短时段 $[0, T_0]$ ($T_0 \ll T$) 上已求出经典的稳定化 CNFVE 解组成瞬像和构造 POD 基函数及建立降阶稳定化 CNFVE 外推模型,去计算总体时间段 $[0, T]$ 上的降阶数值解,没有重复计算.这是对现有(例如,文献[11-14]等)基于 POD 方法的降阶方法的改进和创新.

参考文献 (References):

- [1] Chung T. *Computational Fluid Dynamics* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [2] Ye X. On the relationship between finite volume and finite element methods applied to the Stokes equations[J]. *Numerical Methods for Partial Differential Equation*, 2001, **17**: 440-453.
- [3] Yang M, Song H L. A postprocessing finite volume method for time-dependent Stokes equations[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2009, **59**(8): 1922-1932.
- [4] Li R H, Chen Z Y, Wu W. *Generalized Difference Methods for Differential Equations-Numerical Analysis of Finite Volume Methods*[M]. New York: Marcel Dekker Inc, 2000.
- [5] An J, Sun P, Luo Z D, Huang X. A stabilized fully discrete finite volume element formulation for non-stationary Stokes equation[J]. *Mathematica Numerica Sinica*, 2011, **33**(2): 213-224.
- [6] Holmes P, Lumley J L, Berkooz G. *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- [7] Fukunaga K. *Introduction to Statistical Recognition*[M]. New York: Academic Press, 1990.
- [8] Jolliffe I T. *Principal Component Analysis*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2002.
- [9] Selten F. Baroclinic empirical orthogonal functions as basis functions in an atmospheric model [J]. *J Atmosph Sci*, 1997, **54**: 2099-2114.
- [10] Sirovich L. Turbulence and the dynamics of coherent structures; part I—III [J]. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1987, **45**: 561-590.
- [11] Luo Z D, Xie Z H, Shang Y Q, Chen J. A reduced finite volume element formulation and numerical simulations based on POD for parabolic equations[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2011, **235**(8): 2098-2111.
- [12] Luo Z D, Li H, Zhou Y J, Huang X. A reduced FVE formulation based on POD method and error analysis for two-dimensional viscoelastic problem[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2012, **385**: 310-321.
- [13] Luo Z D, Li H, Chen J. A reduced-order finite volume element formulation based on POD method and implementation of its extrapolation algorithm for unsaturated soil water flow e-

- quation (in Chinese) [J]. *Sci Sin Math*, 2012, **42**(12): 1263-1280.
- [14] Luo Z D, Li H, Sun P, An J, Navon I M. A reduced finite volume element formulation based on POD method and numerical simulation for two-dimensional solute transport problems [J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2013, **89**: 50-68.
- [15] Adams R A. *Sobolev Spaces* [M]. New York: Academic Press, 1975.
- [16] 罗振东. 混合有限元法基础及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2006. (LUO Zheng-dong. *The Foundations and Applications of Mixed Finite Element Methods* [M]. Beijing: Science Press, 2006. (in Chinese))
- [17] Temam R. *Navier-Stokes Equations* [M]. 3rd ed. New York, Amsterdam, 1984.
- [18] Rudin W. *Functional and Analysis* [M]. 2nd ed. New York: McGraw-Hill Companies, Inc, 1973.

A Reduced-Order Stabilized CNFVE Extrapolating Model for Non-Stationary Stokes Equations

TENG Fei¹, LUO Zhen-dong²

(1. *School of Mathematical Science, Kaili University, Kaili, Guizhou 556011, P.R.China;*

2. *School of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Beijing 102206, P.R.China)*

Abstract: A reduced-order stabilized Crank-Nicolson finite volume element (SCNFVE) extrapolating model with sufficiently high accuracy and few degrees of freedom for non-stationary Stokes equations was established by means of the SCNFVE method and the proper orthogonal decomposition (POD) technique. The error estimates of the reduced-order approximate solutions and the algorithm implementation for the reduced-order SCNFVE extrapolating model were provided. Finally, a numerical example of conduit flow indicates that the results of the proposed model are consistent with those of the theoretical solution. Moreover, the advantages of lower computation complexity and higher calculation accuracy of the reduced-order SCNFVE extrapolating model are shown in comparison with the classical methods.

Key words: stabilized Crank-Nicolson finite volume element method; proper orthogonal decomposition method; non-stationary Stokes equation; error estimate

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11271127)