

平面弹性问题自适应有限元方法的收敛性分析*

刘春梅¹, 钟柳强², 舒适³, 肖映雄⁴

- (1. 湖南科技学院 数学与计算科学系 计算数学研究所, 湖南 永州 425199;
2. 华南师范大学 数学科学学院, 广州 510631;
3. 湘潭大学 数学与计算科学学院, 湖南 湘潭 411105;
4. 湘潭大学 土木工程与力学学院, 湖南 湘潭 411105)

摘要: 针对平面弹性问题,首先采用基于最新顶点二分法的网格加密方法,给出一种不需要标记振荡项和加密单元、不需要满足“内节点”性质的自适应有限元方法,其次,通过对各层网格上解函数和误差指示子的分析,利用相邻网格层上解函数的正交性、解函数和真解函数的能量误差的上界估计、相邻网格层上误差指示子的近似压缩性等结果,从理论上严格证明了该自适应有限元方法是收敛的,最后数值实验验证了该自适应有限元方法是收敛的和鲁棒的。

关键词: 平面弹性问题; 自适应有限元方法; 收敛性

中图分类号: O241.8; O242 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.09.003

引言

弹性问题的求解在科学计算和工程技术上都是很重要的问题,如对微电子机械系统中的多体问题进行数值模拟时,常常需要进行弹性分析^[1]。但由于问题本身及求解区域的复杂性,一般很难得到它们的解析解,有限元法是目前进行弹性分析时最常用的数值方法之一^[2]。在实际应用中,有许多因素使得弹性问题产生强奇性解,如物理区域是一个非光滑的几何区域(如凹角或裂缝等)、材料系数不连续、应力集中等。此时在进行数值求解,若采用一致加密网格,则将会导致自由度的指数增长,从而引起计算代价的剧烈增加。自适应有限元方法可以依据解的性态来进行网格点的自动分布,由此有效克服由网格一致加密所导致的自由度过度增长的求解困难,从而实现利用最小的计算量获得最大的计算精度,因而在现代工程计算中得到广泛的应用^[3-6]。

* 收稿日期: 2014-01-20; 修订日期: 2014-06-05

基金项目: 湖南省自然科学基金(14JJ3135); 国家自然科学基金(11201159); 全国博士学位论文作者专项资金(201212); 广东省高等学校优秀青年教师培养计划(Yq2013054); 广州市珠江科技新星项目(2013J2200063)

作者简介: 刘春梅(1981—),女,山西人,讲师,博士(E-mail: liuchunmei0629@163.com); 舒适(1962—),男,湖南人,教授,博士,博士生导师(通讯作者, E-mail: shushi@xtu.edu.cn)。

目前,在工程计算中广泛使用的是基于 Z-Z 型后验误差估计的自适应方法^[4-5].在自适应有限元理论分析方面也有大量的研究工作^[3,6-7].针对平面弹性问题,文献[8]借鉴文献[9]中后验误差估计子和文献[10]中针对 H^1 型标量椭圆方程的自适应有限元算法的思想,利用最新顶点二分法,设计了一种不需要标记振荡项和加密单元不需要满足“内节点”性质的自适应有限元法,数值实验验证了该自适应有限元法具有一致收敛性,但并没有给出关于收敛性结论的理论分析.本文将借鉴文献[10]中针对 H^1 型椭圆方程的理论分析方法,在理论上严格证明在文献[8]中所设计的自适应有限元方法的收敛性.

1 模型问题和自适应有限元法

1.1 模型问题

设 $\Omega \subset R^2$ 是有界的 Lipschitz 多边形区域,边界 $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_S$ 且 $\Gamma_D \cap \Gamma_S \neq \emptyset$, $\mathbf{n} = (n_x, n_y)^T$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, $\mathbf{u}: \Omega \rightarrow R^2$ 为位移向量, \mathbf{f} 为外力, \mathbf{g}_S 为边界 Γ_S 上的面力.考虑如下平面弹性问题:

$$L(\mathbf{u}) := -\mathcal{L}^T(\partial_x, \partial_y) \mathbf{D} \mathcal{L}(\partial_x, \partial_y) \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (x, y) \in \Gamma_D, \quad (2)$$

$$\mathcal{L}^T(n_x, n_y) \mathbf{D} \mathcal{L}(\partial_x, \partial_y) \mathbf{u} = \mathbf{g}_S, \quad (x, y) \in \Gamma_S, \quad (3)$$

其中算子

$$\mathcal{L}(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix},$$

这里 Lamé(拉梅)常数 λ 和 μ 分别由弹性模量 E 和 Poisson(泊松)比 ν 表示为

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

定义空间 $(H_{\Gamma_D}^1)^2 = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^2: \mathbf{u}|_{\Gamma_D} = \mathbf{0}\}$ 和 $(H_{\Gamma_S}^1)^2 = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^2: \mathbf{u}|_{\Gamma_S} = \mathbf{g}_S\}$, 模型问题(1) ~ (3) 的等价变分问题为: 对给定的 $\mathbf{f}, \mathbf{g}_S \in (L^2(\Omega))^2$, 求 $\mathbf{u} \in (H_{\Gamma_S}^1)^2$ 满足

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in (H_{\Gamma_D}^1)^2, \quad (4)$$

其中

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\mathcal{L}(\partial_x, \partial_y) \mathbf{v})^T \mathbf{D} \mathcal{L}(\partial_x, \partial_y) \mathbf{u} dx dy, \quad F(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx dy + \int_{\Gamma_S} \mathbf{g}_S \cdot \mathbf{v} ds.$$

假设 \mathcal{T} 是 Ω 的一个协调的形状正则的网格剖分, 定义其上的 p 次有限元空间为

$$(V^{(p)}(\mathcal{T}))^2 = \{\mathbf{v}_{\mathcal{T}}^{(p)} \mid \mathbf{v}_{\mathcal{T}}^{(p)} \in (C(\bar{\Omega}))^2, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}^{(p)}|_{\tau} \in (P_p(\tau))^2, \forall \tau \in \mathcal{T}\},$$

其中 $P_p(\tau)$ 表示单元 τ 上的 p 次多项式.

利用上述有限元空间, 变分问题(4)的离散变分问题为: 求 $\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{(p)} \in (V^{(p)}(\mathcal{T}))^2 \cap (H_{\Gamma_S}^1)^2$, 满足

$$a(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{(p)}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}^{(p)}) = F(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}^{(p)}), \quad \forall \mathbf{v}_{\mathcal{T}}^{(p)} \in (V^{(p)}(\mathcal{T}))^2 \cap (H_{\Gamma_D}^1)^2. \quad (5)$$

注意 $(V^{(p)}(\mathcal{T}))^2$ 是 $(H_{\Gamma_D}^1)^2$ 的真子空间, 则容易证得离散变分问题(5) 是适定的. 由 $a(\cdot, \cdot)$ 的对称性及强制性知, $a(\cdot, \cdot)$ 是对称正定的, 故其构成 $(H_{\Gamma_D}^1)^2$ 中的能量内积, 定义如下能量范数:

$$\| \mathbf{v} \|_{A, \Omega}^2 = a(\mathbf{v}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in (H_{\Gamma_D}^1)^2.$$

由 $a(\cdot, \cdot)$ 的有界性和强制性知, 该能量范数与 $\| \cdot \|_1$ 是等价的 (等价常数仅依赖参数 λ 和 μ).

1.2 自适应有限元法

下面采用文献[10]中的标准自适应有限元法 (AFEM). 给定一个初始剖分 \mathcal{T}_0 , 通过局部加密, 可以得到一个嵌套的、协调的网格剖分序列 $\{\mathcal{T}_k\}_{k>0}$, 其中 $\mathcal{T}_k \rightarrow \mathcal{T}_{k+1}$ 主要由如下 4 个模块构成:

$$\text{SOLVE} \rightarrow \text{ESTIMATE} \rightarrow \text{MARK} \rightarrow \text{REFINE}. \quad (6)$$

1.2.1 SOLVE 模块

对给定函数 \mathbf{f} 和 \mathbf{g}_S 及协调网格 \mathcal{T}_k , 通过模块 SOLVE 可以得到离散变分问题 (5) 的解 $\mathbf{u}_k^{(p)} = M_{\text{SOLVE}}(\mathcal{T}_k, \mathbf{f}, \mathbf{g}_S) \in (V_k^{(p)})^2$, 其中 $(V_k^{(p)})^2$ 是定义在网格 \mathcal{T}_k 上的 p 次有限元空间.

1.2.2 ESTIMATE 模块

给定一个协调的网格剖分 \mathcal{T}_k , 记 $\mathcal{E}(\mathcal{T}_k)$ 为 \mathcal{T}_k 中内部和非 Dirichlet 边界边的集合. 对于任意满足 $e = \tau_1 \cap \tau_2$ 的边 $e \in \mathcal{E}(\mathcal{T}_k)$, 其中 τ_1 和 τ_2 是 \mathcal{T}_k 中的单元, 设 $\mathbf{n}_e = (n_x, n_y)^T$ 为边 e 的一个指定的单位外法向量. 定义跨边 e 的跳跃量为

$$[\mathbf{q}]|_e = (\mathbf{q}|_{\tau_1})|_e - (\mathbf{q}|_{\tau_2})|_e.$$

特别地, 当边 e 为边界边时, 跳跃量 $[\mathbf{q}]|_e = \mathbf{q}|_e$.

对给定的 $\tau \in \mathcal{T}_k$ 和 $\mathbf{v}_k^{(p)} \in (V_k^{(p)})^2$, 基于单元 τ 的误差指示子为

$$\eta_{\mathcal{T}_k}^2(\mathbf{v}_k^{(p)}, \tau) = h_\tau^2 \| R(\mathbf{v}_k^{(p)}) \|_{0, \tau}^2 + \sum_{e \in \partial\tau \setminus \Gamma_D} h_\tau \| J(\mathbf{v}_k^{(p)}) \|_{0, e}^2,$$

其中 $R(\mathbf{v}_k^{(p)})|_\tau := \mathbf{f}|_\tau - L(\mathbf{v}_k^{(p)})|_\tau$, $J(\mathbf{v}_k^{(p)})|_e := [\mathcal{L}^T(n_x, n_y) \mathbf{D} \mathcal{L}(\partial_x, \partial_y) \mathbf{v}_k^{(p)}]|_e$, $h_\tau = |\tau|^{1/2}$ (这里 $|\tau|$ 表示三角形单元 τ 的面积).

对任意的集合 $\mathcal{M}_k \subset \mathcal{T}_k$, 定义 $\eta_{\mathcal{T}_k}^2(\mathbf{v}_k^{(p)}, \mathcal{M}_k) = \sum_{\tau \in \mathcal{M}_k} \eta_{\mathcal{T}_k}^2(\mathbf{v}_k^{(p)}, \tau)$, 特别地, 当 $\mathcal{M}_k = \mathcal{T}_k$ 时, 简记

$$\eta^2(\mathbf{v}_k^{(p)}, \mathcal{T}_k) = \eta_{\mathcal{T}_k}^2(\mathbf{v}_k^{(p)}, \mathcal{T}_k).$$

对于给定的网格剖分 \mathcal{T}_k 和相应的离散变分问题 (5) 的解 $\mathbf{u}_k^{(p)} \in (V_k^{(p)})^2$, 通过模块 ESTIMATE 可以得到任意单元 $\tau \in \mathcal{T}_k$ 的误差指示子:

$$\eta_{\mathcal{T}_k}^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \tau) = M_{\text{ESTIMATE}}(\mathcal{T}_k, \mathbf{u}_k^{(p)}, \mathbf{f}, \mathbf{g}_S).$$

1.2.3 MARK 模块

采用 Dörfler 标记策略来选择加密单元. 即给定一个协调的网格剖分 \mathcal{T}_k , 单元的误差指示子序列 $\{\eta_{\mathcal{T}_k}^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \tau)\}_{\tau \in \mathcal{T}_k}$ 和标记参数 $\theta \in (0, 1)$, 通过标记模块 MARK 可以得到一个满足 Dörfler 标记条件的单元集合 \mathcal{M}_k :

$$\mathcal{M}_k = M_{\text{MARK}}(\eta^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \mathcal{T}_k), \mathcal{T}_k, \theta),$$

使得 \mathcal{M}_k 所含单元个数最少且满足

$$\eta_{\mathcal{T}_k}^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \mathcal{M}_k) \geq \theta \eta^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \mathcal{T}_k).$$

1.2.4 REFINE 模块

采用二分法作为网格局部加密法. 假设有一个加密模块 REFINE 可以用于执行迭代或递归的二分法, 其具体算法设计可见文献[8, 11]. 即对于任意的 $\mathcal{T}_k \in \mathcal{L}(\mathcal{T}_0)$ 和一个包含标记单元的子集 $\mathcal{M}_k \subset \mathcal{T}_k$, 通过模块 REFINE 可以得到一个协调的网格剖分 $\mathcal{T}_{k+1} \in \mathcal{L}(\mathcal{T}_0)$, 即有

$$\mathcal{T}_{k+1} = M_{\text{REFINE}}(\mathcal{T}_k, \mathcal{M}_k).$$

值得注意的是,在上述自适应有限元算法中,并不需要标记振荡项且加密单元并不需要满足“内节点”性质.

2 收敛性分析

本节将利用正交性、误差的整体上界估计和误差指示子的压缩性,证明自适应有限元法在连续的迭代过程中,误差函数的范数与误差指示子之和是压缩的,即 AFEM 是收敛的.

利用 Galerkin 正交性容易证得如下引理.

引理 1(正交性) 设 \mathcal{T}_{k+1} 是由 \mathcal{T}_k 通过最新顶点二分法加密得到的协调网格, $\mathbf{u}_k^{(p)}$ 和 $\mathbf{u}_{k+1}^{(p)}$ 分别为离散变分问题(5) 对应于网格 \mathcal{T}_k 和 \mathcal{T}_{k+1} 的解, \mathbf{u} 为连续变分问题(4)的解,则有

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{k+1}^{(p)}\|_{A,\Omega}^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_k^{(p)}\|_{A,\Omega}^2 - \|\mathbf{u}_{k+1}^{(p)} - \mathbf{u}_k^{(p)}\|_{A,\Omega}^2.$$

下面给出误差的整体上界估计.

引理 2(整体上界估计) 存在一个仅依赖于参数 λ, μ 及网格 \mathcal{T}_k 的形状正则性的常数 C_1 , 使得

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_k^{(p)}\|_{A,\Omega}^2 \leq C_1 \eta^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \mathcal{T}_k).$$

证明 由连续变分问题(4)的适定性(inf-sup 条件),得*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_k^{(p)}\|_{A,\Omega} \leq \sup_{\mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^2} \frac{a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_k^{(p)}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{A,\Omega}}. \quad (7)$$

利用 Galerkin 正交性、原变分问题(4)、 $a(\cdot, \cdot)$ 的定义式、Green 公式和 Schwartz 不等式,对任意的 $\mathbf{v}_k^{(p)} \in (V_k^{(p)})^2$, 有

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_k^{(p)}, \mathbf{v}) &= a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_k^{(p)}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_k^{(p)}) = \\ &= (\mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_k^{(p)}) - \int_{\Omega} (\mathcal{L}(\partial_x, \partial_y)(\mathbf{v} - \mathbf{v}_k^{(p)}))^T \mathbf{D}\mathcal{L}(\partial_x, \partial_y)\mathbf{u}_k^{(p)} \, dx dy \leq \\ &= \sum_{\tau \in \mathcal{T}_k} (\mathbf{f} - L(\mathbf{u}_k^{(p)}), \mathbf{v} - \mathbf{v}_k^{(p)})_{\tau} + \\ &= \sum_{\tau \in \mathcal{T}_k} \sum_{e \in \partial\tau \cap \Gamma_D} \left| \int_e (\mathbf{v} - \mathbf{v}_k^{(p)}) \cdot ([\mathcal{L}^T(n_x, n_y)\mathbf{D}\mathcal{L}(\partial_x, \partial_y)\mathbf{u}_k^{(p)}]) \, ds \right| \leq \\ &= \sum_{\tau \in \mathcal{T}_k} \left(h_{\tau} \|R(\mathbf{u}_k^{(p)})\|_{0,\tau} h_{\tau}^{-1} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_k^{(p)}\|_{0,\tau} + \right. \\ &= \left. \sum_{e \in \partial\tau \cap \Gamma_D} h_{\tau}^{-1/2} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_k^{(p)}\|_{0,e} h_{\tau}^{1/2} \|J(\mathbf{u}_k^{(p)})\|_{0,e} \right). \quad (8) \end{aligned}$$

引入 Scott-Zhang 插值算子 $\Pi_{h_{\tau}}$, 令 $\mathbf{v}_k^{(p)} = \Pi_{h_{\tau}} \mathbf{v} := (\Pi_{h_{\tau}} v_1, \Pi_{h_{\tau}} v_2)^T$, 有如下插值误差估计(见文献[12]):

$$h_{\tau}^{-1} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_k^{(p)}\|_{0,\tau} \leq \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega_{\tau}}, \quad h_{\tau}^{-1/2} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_k^{(p)}\|_{0,e} \leq \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega_e}. \quad (9)$$

将式(9)代入式(8),得

$$a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_k^{(p)}, \mathbf{v}) \leq \sum_{\tau \in \mathcal{T}_k} h_{\tau} \|R(\mathbf{u}_k^{(p)})\|_{0,\tau} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega_{\tau}} + \sum_{\tau \in \mathcal{T}_k} \sum_{e \in \partial\tau} h_{\tau}^{1/2} \|J(\mathbf{u}_k^{(p)})\|_{0,e} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega_e}.$$

在上式中利用 Cauchy 不等式、网格 \mathcal{T}_k 的形状正则性、误差指示子的定义和范数的等价性,有

* 在本文中除了特殊的常数外,为了避免重复使用一般的常数记号,总采用记号 $a \leq b$ 表示存在一个正常数 C , 满足 $a \leq Cb$; 记号 $a \approx b$ 表示 $a \leq b$ 和 $b \leq a$ 同时成立.

$$a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_k^{(p)}, \mathbf{v}) \leq \eta(\mathbf{u}_k^{(p)}, \mathcal{T}_k) \|\mathbf{v}\|_{A, \Omega}. \quad (10)$$

把式(10)代入式(7),得

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_k^{(p)}\|_{A, \Omega}^2 \leq C_1 \eta^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \mathcal{T}_k). \quad \square$$

在给出误差指示子的近似压缩性证明之前,先给出两个相关引理.

引理 3 对于任意的 $\xi > 0$, 存在常数 $C_\xi > 0$, 使得

$$\eta^2(\mathbf{u}_{k+1}^{(p)}, \mathcal{T}_{k+1}) \leq (1 + \xi) \eta^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \mathcal{T}_{k+1}) + C_\xi \|\mathbf{u}_{k+1}^{(p)} - \mathbf{u}_k^{(p)}\|_{A, \Omega}^2. \quad (11)$$

证明 对任意的 $\tau \in \mathcal{T}_{k+1}$, 分别估计误差指示子 $\eta_{\mathcal{T}_{k+1}}^2(\mathbf{u}_{k+1}^{(p)}, \tau)$ 的项.

首先估计 $h_\tau \|R(\mathbf{u}_{k+1}^{(p)})\|_{0, \tau}$. 利用三角不等式、算子 L 的定义式及范数的等价性, 得

$$\begin{aligned} h_\tau \|R(\mathbf{u}_{k+1}^{(p)})\|_{0, \tau} &\leq h_\tau \|R(\mathbf{u}_k^{(p)})\|_{0, \tau} + h_\tau \|L(\mathbf{u}_k^{(p)} - \mathbf{u}_{k+1}^{(p)})\|_{0, \tau} \leq \\ &h_\tau \|R(\mathbf{u}_k^{(p)})\|_{0, \tau} + \|\mathbf{u}_k^{(p)} - \mathbf{u}_{k+1}^{(p)}\|_{1, \tau} \leq \\ &h_\tau \|R(\mathbf{u}_k^{(p)})\|_{0, \tau} + \|\mathbf{u}_k^{(p)} - \mathbf{u}_{k+1}^{(p)}\|_{A, \tau}. \end{aligned} \quad (12)$$

其次估计 $h_\tau^{1/2} \|J(\mathbf{u}_{k+1}^{(p)})\|_{0, e}$. 利用三角不等式、标准 Scaling 技巧、 $\mathbf{n}_e = (n_x, n_y)^T$ 的有界性及范数的等价性, 可得

$$\begin{aligned} h_\tau^{1/2} \|J(\mathbf{u}_{k+1}^{(p)})\|_{0, e} &\leq \\ &h_\tau^{1/2} \|J(\mathbf{u}_k^{(p)})\|_{0, e} + h_\tau^{1/2} \|[\boldsymbol{\mathcal{L}}^T(n_x, n_y) \mathbf{D} \boldsymbol{\mathcal{L}}(\partial_x, \partial_y)(\mathbf{u}_k^{(p)} - \mathbf{u}_{k+1}^{(p)})]\|_{0, e} \leq \\ &h_\tau^{1/2} \|J(\mathbf{u}_k^{(p)})\|_{0, e} + h_\tau^{1/2} \|[\boldsymbol{\mathcal{L}}(\partial_x, \partial_y)(\mathbf{u}_k^{(p)} - \mathbf{u}_{k+1}^{(p)})]\|_{0, e} \leq \\ &h_\tau^{1/2} \|J(\mathbf{u}_k^{(p)})\|_{0, e} + \|[\boldsymbol{\mathcal{L}}(\partial_x, \partial_y)(\mathbf{u}_k^{(p)} - \mathbf{u}_{k+1}^{(p)})]\|_{0, \Omega_e} \leq \\ &h_\tau^{1/2} \|J(\mathbf{u}_k^{(p)})\|_{0, e} + \|\mathbf{u}_k^{(p)} - \mathbf{u}_{k+1}^{(p)}\|_{1, \Omega_e} \leq \\ &h_\tau^{1/2} \|J(\mathbf{u}_k^{(p)})\|_{0, e} + \|\mathbf{u}_k^{(p)} - \mathbf{u}_{k+1}^{(p)}\|_{A, \Omega_e}. \end{aligned} \quad (13)$$

由 Young 不等式 $2ab \leq \xi a^2 + \xi^{-1} b^2$ ($\xi > 0$), 得

$$(a + b)^2 \leq (1 + \xi) a^2 + (1 + \xi^{-1}) b^2. \quad (14)$$

对 \mathcal{T}_{k+1} 上所有单元的误差指示子 $\eta_{\mathcal{T}_{k+1}}^2(\mathbf{u}_{k+1}^{(p)}, \tau)$ 求和, 并利用式(12)、(13)、(14) 及 \mathcal{T}_{k+1} 的形状正则性, 得

$$\begin{aligned} \eta^2(\mathbf{u}_{k+1}^{(p)}, \mathcal{T}_{k+1}) &= \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{k+1}} \left(h_\tau^2 \|R(\mathbf{u}_{k+1}^{(p)})\|_{0, \tau}^2 + \sum_{e \in \partial \tau} h_\tau \|J(\mathbf{u}_{k+1}^{(p)})\|_{0, e}^2 \right) \leq \\ &\sum_{\tau \in \mathcal{T}_{k+1}} (h_\tau \|R(\mathbf{u}_k^{(p)})\|_{0, \tau} + \|\mathbf{u}_k^{(p)} - \mathbf{u}_{k+1}^{(p)}\|_{A, \tau})^2 + \\ &\sum_{\tau \in \mathcal{T}_{k+1}} \sum_{e \in \partial \tau} (h_\tau^{1/2} \|J(\mathbf{u}_k^{(p)})\|_{0, e} + \|\mathbf{u}_k^{(p)} - \mathbf{u}_{k+1}^{(p)}\|_{A, \Omega_e})^2 \leq \\ &\sum_{\tau \in \mathcal{T}_{k+1}} ((1 + \xi) h_\tau^2 \|R(\mathbf{u}_k^{(p)})\|_{0, \tau}^2 + (1 + \xi^{-1}) \|\mathbf{u}_k^{(p)} - \mathbf{u}_{k+1}^{(p)}\|_{A, \tau}^2) + \\ &\sum_{\tau \in \mathcal{T}_{k+1}} \sum_{e \in \partial \tau} ((1 + \xi) h_\tau \|J(\mathbf{u}_k^{(p)})\|_{0, e}^2 + (1 + \xi^{-1}) \|\mathbf{u}_k^{(p)} - \mathbf{u}_{k+1}^{(p)}\|_{A, \tau}^2) \leq \\ &(1 + \xi) \eta^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \mathcal{T}_{k+1}) + (1 + \xi^{-1}) \|\mathbf{u}_k^{(p)} - \mathbf{u}_{k+1}^{(p)}\|_{A, \Omega}^2. \end{aligned}$$

令 $C_\xi = 1 + \xi^{-1}$, 即证得式(11). □

上述引理给出了: 在改变有限元解时对误差指示子所带来的影响. 下面这个引理则表明当有限元解不改变时, 误差指示子也是压缩的.

引理 4 存在依赖于 θ 的常数 $\rho_1 \in (0, 1)$, 满足

$$\eta^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \mathcal{T}_{k+1}) \leq \rho_1 \eta^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \mathcal{T}_k). \quad (15)$$

证明 不妨设加密单元 $\tau \in \mathcal{T}_k$ 被二分为 $\tau_1 \in \mathcal{T}_{k+1}$ 和 $\tau_2 \in \mathcal{T}_{k+1}$ (如图 1 所示).

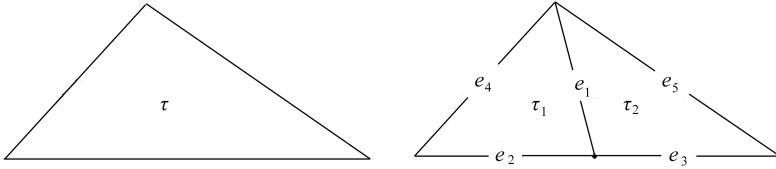


图 1 单元 τ 被一分为二成两个单元 τ_1 和 τ_2

Fig.1 Element τ is splitted into two elements τ_1 and τ_2

首先证明在单元 τ 上,存在 $\bar{\rho} \in (0,1)$, 使得

$$\eta_{\square_{k+1}}^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \tau_1) + \eta_{\square_{k+1}}^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \tau_2) \leq \bar{\rho} \eta_{\square_k}^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \tau). \tag{16}$$

事实上,注意到

$$h_{\tau_i} = |\tau_i|^{1/2} = (|\tau|/2)^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2} h_{\tau} \quad (i = 1, 2),$$

由此可得到基于单元的残量是减少的:

$$h_{\tau_1}^2 \|f - L(\mathbf{u}_k^{(p)})\|_{0,\tau_1}^2 + h_{\tau_2}^2 \|f - L(\mathbf{u}_k^{(p)})\|_{0,\tau_2}^2 = \frac{1}{2} h_{\tau}^2 \|f - L(\mathbf{u}_k^{(p)})\|_{0,\tau}^2.$$

接下来考虑基于边的跳跃量.不妨设单元 τ 经过二分之后的边为 $e_l, l = 1, 2, \dots, 5$ (如图 1 所示).下面对边 $e_l, l = 1, 2, \dots, 5$ 上的跳跃量分如下两种情形讨论.

1) $l = 1$ (由二分产生的且在 τ 内部的边 e_1).由于函数 $\mathbf{u}_k^{(p)}$ 是多项式且依 Sobolev 嵌入定理 $W^{1,\infty}(\tau) \hookrightarrow C(\tau)$, 因此有 $\|[\mathbf{L}^T(n_x, n_y) \mathbf{D}\mathbf{L}(\partial_x, \partial_y) \mathbf{u}_k^{(p)}]\|_{0,e_1} = 0$.

2) $l = 2, 3, 4, 5$.此时跳跃量的值保持不变,但是单元 τ_1, τ_2 的网格尺寸压缩到 $h_{\tau}/\sqrt{2}$.

综上证得式(16), 其中 $\bar{\rho} = 1/\sqrt{2} \in (0,1)$.

其次对所有的加密单元进行求和,得到整体网格上的误差指示子的压缩性(见式(15)).

事实上,注意到在网格 \square_k 上,记采用 Dörfler 加密策略得到需要加密的单元集合为 \mathcal{M}_k , 在加密时,为了保证网格的协调性,实际上需要加密更多的单元,不妨记所有加密单元的集合为 $\bar{\mathcal{M}}_k$, 显然 $\mathcal{M}_k \subseteq \bar{\mathcal{M}}_k$, 并且有

$$\eta_{\square_k}^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \bar{\mathcal{M}}_k) \geq \theta \eta_{\square_k}^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \mathcal{M}_k). \tag{17}$$

记 $\bar{\mathcal{M}}_{k+1}$ 为 $\bar{\mathcal{M}}_k$ 中单元二分后得到的单元集合,显然 $\square_k \setminus \bar{\mathcal{M}}_k = \square_{k+1} \setminus \bar{\mathcal{M}}_{k+1}$ 为 \square_k 中不需要二分的单元集合.

利用式(17)及(16),并注意到 $\bar{\rho} - 1 < 0$, 得

$$\begin{aligned} \eta_{\square_{k+1}}^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \square_{k+1}) &= \eta_{\square_{k+1}}^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \square_{k+1} \setminus \bar{\mathcal{M}}_{k+1}) + \eta_{\square_{k+1}}^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \bar{\mathcal{M}}_{k+1}) \leq \\ &= \eta_{\square_k}^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \square_k \setminus \bar{\mathcal{M}}_k) + \bar{\rho} \eta_{\square_k}^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \bar{\mathcal{M}}_k) = \\ &= \eta_{\square_k}^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \square_k) + (\bar{\rho} - 1) \eta_{\square_k}^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \bar{\mathcal{M}}_k) \leq \\ &= \eta_{\square_k}^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \square_k) + \theta(\bar{\rho} - 1) \eta_{\square_k}^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \mathcal{M}_k) = \\ &= \rho_1 \eta_{\square_k}^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \square_k), \end{aligned}$$

其中 $\rho_1 = (1 + \theta(\bar{\rho} - 1)) \in (1 - \theta, 1 - \theta + \theta/\sqrt{2}) \subset (0,1)$, 即证得式(15). □

利用引理 3 和引理 4, 容易证明相邻两层网格的误差指示子是压缩的.

引理 5(误差指示子的近似压缩性) 存在仅依赖于 \square_k 的形状正则性和 Dörfler 参数 θ 的常数 $\rho \in (0,1)$ 和 $C_{\rho} > 0$, 满足

$$\eta^2(\mathbf{u}_{k+1}^{(p)}, \mathcal{T}_{k+1}) \leq \rho \eta^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \mathcal{T}_k) + C_\rho \|\mathbf{u}_{k+1}^{(p)} - \mathbf{u}_k^{(p)}\|_{A,\Omega}^2. \quad (18)$$

证明 对任意的常数 ξ ($\xi > 0$), 利用引理 3 和引理 4 可得

$$\begin{aligned} \eta^2(\mathbf{u}_{k+1}^{(p)}, \mathcal{T}_{k+1}) &\leq (1 + \xi) \eta^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \mathcal{T}_{k+1}) + C_\xi \|\mathbf{u}_{k+1}^{(p)} - \mathbf{u}_k^{(p)}\|_{A,\Omega}^2 \leq \\ &\rho_1 (1 + \xi) \eta^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \mathcal{T}_k) + C_\xi \|\mathbf{u}_{k+1}^{(p)} - \mathbf{u}_k^{(p)}\|_{A,\Omega}^2. \end{aligned} \quad (19)$$

注意到 $\rho_1 \in (0, 1)$, ξ 为任意正数, 所以在式 (19) 中, 只要选取充分小的 ξ , 使得 $\rho = \rho_1(1 + \xi) \in (0, 1)$ 并令 $C_\rho = C_\xi$, 即证得引理 5 成立. \square

由引理 1, 引理 2 和引理 5 即可给出 AFEM 的收敛性证明.

定理 1(收敛性) 对于给定的 $\theta \in (0, 1)$ 和形状正则的网格 \mathcal{T}_k , 利用 Dörfler 加密策略及最新顶点二分法即可生成一个形状正则的网格 \mathcal{T}_{k+1} . 设 $\mathbf{u}_{k+1}^{(p)}$ 和 $\mathbf{u}_k^{(p)}$ 分别为离散变分问题 (5) 对应于网格 \mathcal{T}_{k+1} 和 \mathcal{T}_k 的解, 则存在依赖于 θ 和网格 \mathcal{T}_k 形状正则的两个常数 $\delta \in (0, 1)$ 和 β , 使得

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{k+1}^{(p)}\|_{A,\Omega}^2 + \beta \eta^2(\mathbf{u}_{k+1}^{(p)}, \mathcal{T}_{k+1}) \leq \delta [\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_k^{(p)}\|_{A,\Omega}^2 + \beta \eta^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \mathcal{T}_k)]. \quad (20)$$

证明 由引理 5 可知, 存在常数 $\rho \in (0, 1)$ 和 C_ρ 使得式 (18) 成立. 令 $\beta = C_\rho^{-1}$ 并设 δ 为待定参数.

利用引理 1, 引理 5 和引理 2, 并注意到 $\beta = C_\rho^{-1}$, 有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{k+1}^{(p)}\|_{A,\Omega}^2 + \beta \eta^2(\mathbf{u}_{k+1}^{(p)}, \mathcal{T}_{k+1}) &= \\ \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_k^{(p)}\|_{A,\Omega}^2 - \|\mathbf{u}_{k+1}^{(p)} - \mathbf{u}_k^{(p)}\|_{A,\Omega}^2 + \beta \eta^2(\mathbf{u}_{k+1}^{(p)}, \mathcal{T}_{k+1}) &= \\ \delta \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_k^{(p)}\|_{A,\Omega}^2 + (1 - \delta) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_k^{(p)}\|_{A,\Omega}^2 - & \\ \|\mathbf{u}_{k+1}^{(p)} - \mathbf{u}_k^{(p)}\|_{A,\Omega}^2 + \beta \eta^2(\mathbf{u}_{k+1}^{(p)}, \mathcal{T}_{k+1}) \leq & \\ \delta \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_k^{(p)}\|_{A,\Omega}^2 + (1 - \delta) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_k^{(p)}\|_{A,\Omega}^2 - \|\mathbf{u}_{k+1}^{(p)} - \mathbf{u}_k^{(p)}\|_{A,\Omega}^2 + & \\ \rho \beta \eta^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \mathcal{T}_k) + \beta C_\rho \|\mathbf{u}_{k+1}^{(p)} - \mathbf{u}_k^{(p)}\|_{A,\Omega}^2 = & \\ \delta \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_k^{(p)}\|_{A,\Omega}^2 + (1 - \delta) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_k^{(p)}\|_{A,\Omega}^2 + \rho \beta \eta^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \mathcal{T}_k) \leq & \\ \delta \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_k^{(p)}\|_{A,\Omega}^2 + (1 - \delta) C_1 \eta^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \mathcal{T}_k) + \rho \beta \eta^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \mathcal{T}_k) = & \\ \delta \left[\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_k^{(p)}\|_{A,\Omega}^2 + \frac{(1 - \delta) C_1 + \rho \beta}{\delta} \eta^2(\mathbf{u}_k^{(p)}, \mathcal{T}_k) \right]. & \end{aligned} \quad (21)$$

在式 (21) 中选取依赖于 β 的参数 δ , 即

$$\frac{(1 - \delta) C_1 + \rho \beta}{\delta} = \beta \Leftrightarrow \delta = \frac{C_1 + \rho \beta}{C_1 + \beta}.$$

注意到 $\rho \in (0, 1)$, 则有 $\delta \in (0, 1)$. 由此证得式 (20) 成立. \square

3 数值实验

在下面的数值实验中, 采用的范数为能量范数 $\|\cdot\|_{A,\Omega} = a(\cdot, \cdot)^{1/2}$, 弹性模量 $E = 3\,000$ MPa, Poisson 比 $\nu = 0.3$.

例 1(奇点问题) 设 $\Omega = [-1, 1]^2$, 选择适当的右端函数 f 和 Dirichlet 边界函数 \mathbf{g}_s , 使得真解函数 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$ 为

$$u_1(x, y) = u_2(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 0.01}.$$

图 2 为线性有限元的实验结果. 图 2(a) 为加密 17 次的网格图, 可以看出加密单元均集中在真解函数有奇性的地方. 图 2(b) 为 $\theta = 0.1, 0.3, 0.5$ 时真解函数 \mathbf{u} 与有限元函数 \mathbf{u}_k 在能量范

数下的误差曲线图,其中横坐标 N 表示自适应加密过程中自由度的个数.

例 2(边界奇性问题) 设 $\Omega = [0, 4]^2$, 选择适当的右端函数 f 和 Dirichlet 边界函数 g_s , 使得真解函数 $u = (u_1, u_2)^T$ 为

$$u_1(x, y) = u_2(x, y) = \frac{1}{x^2 + 0.01} + \frac{1}{y^2 + 1}.$$

图 3 为线性有限元的实验结果.图 3(a) 为加密 13 次的网格图,可以看出加密单元均集中在真解函数有奇性的地方.图 3(b) 为 $\theta = 0.1, 0.3, 0.5$ 时真解函数 u 与有限元函数 u_k 在能量范数下的误差曲线图,其中横坐标 N 表示自适应加密过程中自由度的个数.

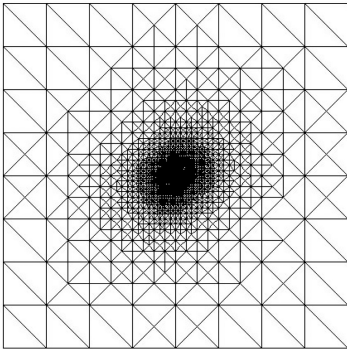


图 2(a) $\theta = 0.5$ 时第 17 次自适应加密后的加密图

Fig.2(a) The grid after the 17th adaptive refinement for $\theta = 0.5$

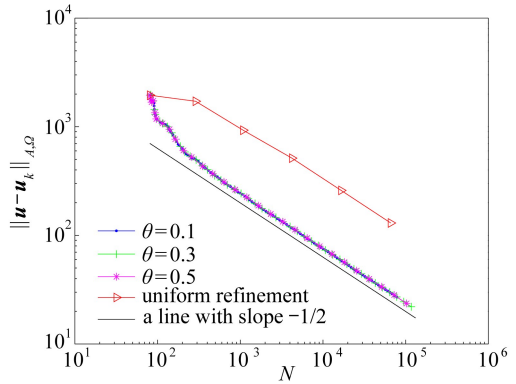


图 2(b) $\theta = 0.1, 0.3, 0.5$ 时 $\|u - u_k\|_{A, \Omega}$ 的误差曲线图

Fig.2(b) The error curves of $\|u - u_k\|_{A, \Omega}$ for $\theta = 0.1, 0.3, 0.5$

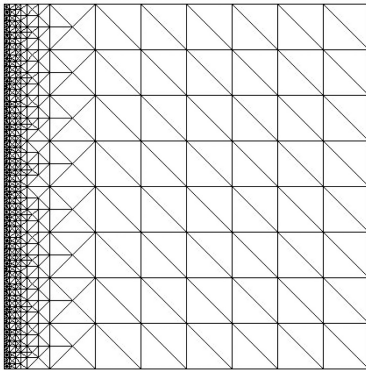


图 3(a) $\theta = 0.5$ 时第 13 次自适应加密后的加密图

Fig.3(a) The grid after the 13rd adaptive refinement for $\theta = 0.5$

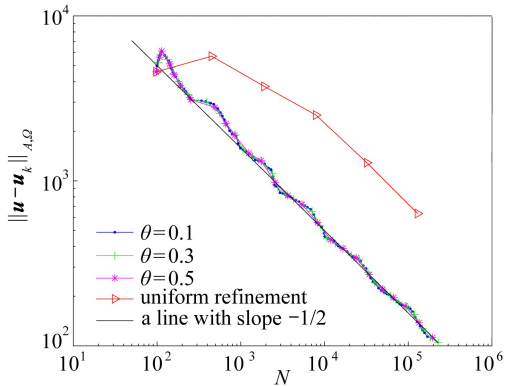


图 3(b) $\theta = 0.1, 0.3, 0.5$ 时 $\|u - u_k\|_{A, \Omega}$ 的误差曲线图

Fig.3(b) The error curves of $\|u - u_k\|_{A, \Omega}$ for $\theta = 0.1, 0.3, 0.5$

例 3(L-shape 型区域问题) 设 $\Omega = [-1, 1]^2 \setminus [0, 1] \times [-1, 0]$, 选择适当的右端函数 f 和 Dirichlet 边界函数 g_s , 使得真解函数 $u = (u_1, u_2)^T$ 为

$$u_1(x, y) = u_2(x, y) = r^{2/3} \sin(2\phi/3).$$

图 4 为线性有限元的实验结果.图 4(a) 为加密 22 次的网格图,可以看出加密单元均集中

在真解函数有奇性的地方.图 4(b)为 $\theta = 0.1, 0.3, 0.5$ 时真解函数 u 与有限元函数 u_k 在能量范数下的误差曲线图,其中横坐标 N 表示自适应加密过程中自由度的个数.

从图 2~图 4 中的图(b)可以看出,真解函数 u 与有限元函数 u_k 在能量范数下的误差曲线平行于斜率 $-1/2$,即自适应算法是收敛的,同时可以看出 $\theta \in (0.1, 0.5)$ 时自适应算法是鲁棒的.

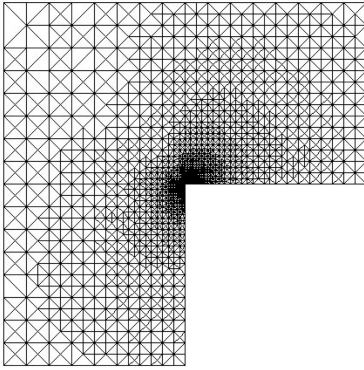


图 4(a) $\theta = 0.5$ 时第 22 次自适应加密后的加密图

Fig.4(a) The grid after the 22nd adaptive refinement for $\theta = 0.5$

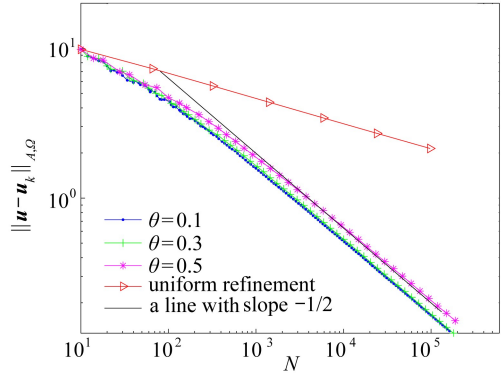


图 4(b) $\theta = 0.1, 0.3, 0.5$ 时 $\|u - u_k\|_{A, \Omega}$ 的误差曲线图

Fig.4(b) The error curves of $\|u - u_k\|_{A, \Omega}$ for $\theta = 0.1, 0.3, 0.5$

致谢 本文第一作者感谢湖南科技学院重点学科建设项目对本文的资助。

参考文献 (References):

- [1] Senturia D S, Aluru N, White J. Simulating the behavior of MEMS devices: computational methods and needs[J]. *Computational Science & Engineering, IEEE*, 1997, **4**(1): 30-43.
- [2] Brenner S C, Li Y S. Linear finite element methods for planar linear elasticity[J]. *Mathematics of Computation*, 1992, **59**(200): 321-338.
- [3] Cai Z Q, Korsawe J, Starke G. An adaptive least squares mixed finite element method for the stress displacement formulation of linear elasticity[J]. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2005, **21**(1): 132-148.
- [4] 陈竹昌, 王建华, 王卫中. 自适应多层网格有限元求解应力集中问题[J]. 同济大学学报, 1994, **22**(3): 203-208. (CHEN Zhu-chang, WANG Jian-hua, WANG Wei-zhong. Adaptive multigrid FEM for stress concentration[J]. *Journal of Tongji University*, 1994, **22**(3): 203-208. (in Chinese))
- [5] 梁力, 林韵梅. 有限元网格修正的自适应分析及其应用[J]. 工程力学, 1995, **12**(2): 109-118. (LIANG Li, LIN Yun-mei. Adaptive mesh refinement of finite element method and its application [J]. *Engineering Mechanics*, 1995, **12**(2): 109-118. (in Chinese))
- [6] Whiler T P. Locking-free adaptive discontinuous Galerkin FEM for linear elasticity problem [J]. *Mathematics of Computation*, 2006, **75**(255): 1087-1102.
- [7] Lonsing M, Verfürth R. A posteriori error estimators for mixed finite element methods in linear elasticity[J]. *Numerische Mathematik*, 2004, **97**(4): 757-778.
- [8] 刘春梅, 肖映雄, 舒适, 钟柳强. 弹性力学问题自适应有限元及其局部多重网格法[J]. 工程力学, 2012, **29**(9): 60-67. (LIU Chun-mei, XIAO Ying-xiong, SHU Shi, ZHONG Liu-qiang. A

- daptive finite element method and local multigrid method for elasticity problems[J]. *Engineering Mechanics*, 2012, **29**(9): 60-67. (in Chinese))
- [9] Carstensen C. Convergence of adaptive finite element methods in computational mechanics [J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2009, **59**(9): 2119-2130.
- [10] Cascon J, Kreuzer C, Nochetto R, Siebert K. Quasi-optimal convergence rate for an adaptive finite element method[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2008, **46**(5): 2524-2550.
- [11] Bänsch E. Local mesh refinement in 2 and 3 dimensions[J]. *IMPACT of Computing in Science and Engineering*, 1991, **3**(3): 181-191.
- [12] Scott L R, Zhang S. Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions[J]. *Mathematics of Computation*, 1990, **54**(190): 483-493.

Convergence of an Adaptive Finite Element Method for 2D Elasticity Problems

LIU Chun-mei¹, ZHONG Liu-qiang², SHU Shi³, XIAO Ying-xiong⁴

(1. *Institute of Computational Mathematics, Department of Mathematical Sciences, Hunan University of Science and Engineering, Yongzhou, Hunan 425199, P.R.China;*

2. *School of Mathematical Sciences, South China Normal University, Guangzhou 510631, P.R.China;*

3. *School of Mathematics and Computational Science, Xiangtan University, Xiangtan, Hunan 411105, P.R.China;*

4. *College of Civil Engineering and Mechanics, Xiangtan University, Xiangtan, Hunan 411105, P.R.China)*

Abstract: For 2D linear elasticity problems, firstly, a standard adaptive finite element method (AFEM) was developed based on the newest vertex bisection grid refinement, which was marked only according to the error estimators without special treatment of the oscillation terms and intended conformance to the interior node properties. Secondly, through analysis of the numerical solution functions and error indicators at all the grid levels, the AFEM was strictly proved to be convergent by means of the orthogonality between the numerical solution functions at adjacent grid levels, the upper bound estimation of the energy errors between the true solution functions and the numerical solution functions, and the approximate compressibility of the error indicators between adjacent grid levels. Finally, several numerical experiments confirm that the presented AFEM is convergent and robust.

Key words: 2D elasticity problem; adaptive finite element method; convergence

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11201159)