

# 压电曲壳结构的形状控制和优化设计\*

闫浩, 姚林泉, 孙晓洁

(苏州大学 城市轨道交通学院, 江苏 苏州 215000)

(本刊编委苟晓凡推荐)

**摘要:** 研究了使用最少和最合理的压电片布置,以及最合理的多点输入电压,对曲壳类结构实施最佳的形状控制.首先,采用 HS-ANS 法,构造能够克服剪切自锁、梯形自锁和厚度自锁的压电曲壳结构实壳单元.然后,利用遗传算法的组合优化,对作动器的数目和位置进行设计,进一步利用遗传算法的数值优化,对各作动器的作用电压值进行优化,并给出一般计算过程.最后的算例表明,给出的实壳单元和优化设计方法,可以非常有效地实现对曲壳类结构的形状控制.

**关键词:** 压电壳; 形状控制; 遗传算法; 实壳单元; 有限元

**中图分类号:** TB381; O343 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.08.004

## 引言

精密仪器设备中的关键部件常常会受到电、磁、热、机械荷载等工作环境的影响而发生形变,或者由于加工误差、材料老化,以及特殊的物理化学环境等不能达到预期的形状,使设备不能正常发挥作用或产生偏差甚至失灵和失效.由于这些因素的复杂性,使得在加工过程中消除它们的影响十分困难,甚至不能实现,因此对如何保持结构在复杂工作环境下维持原来的设计目标提出了更高的要求.这就需要采取主动控制技术,保证结构在多种工况下的稳定性.

由于曲壳本身的特点,对压电曲壳结构的计算要比一般的直梁或平板结构复杂,因此有限元法成为计算壳体结构最主要的方法.李家宇等<sup>[1]</sup>在正交双曲坐标系下,利用状态空间法消去曲面内的应力分量,推导出可独立求解的压电热弹性材料齐次状态方程.王剑等<sup>[2-3]</sup>利用约束方程连接基体壳单元和压电壳单元,推导的空间曲壳压电单元模型,对曲壳结构有很好的适应性,然而他们的计算过程仍略显繁杂,还需要发展更简便的方法.在建立有限元模型的过程中,采用实体板/壳单元,既可以降低方程的复杂性,使计算简便,又可以获得满足精度要求的计算结果.但是,应用一般的实体板单元极易产生自锁,导致计算结果不精确或者失真.Sze 和 Yao<sup>[4-6]</sup>建立了能够克服多种自锁的实体板单元,并用大量算例验证了这种单元的优越性.郑世杰等<sup>[7]</sup>采用混合编码的遗传算法与有限元分析相结合,对复合材料层合板、壳进行了载荷

\* 收稿日期: 2014-02-25; 修订日期: 2014-06-19

基金项目: 国家自然科学基金(11172192)

作者简介: 闫浩(1989—),男,河南林州人,硕士生(E-mail: ama-zon@163.com);  
姚林泉(1961—),男,江苏苏州人,教授,博士,博士生导师(通讯作者).  
E-mail: lqyao@suda.edu.cn).

识别。

用多少个作动器以及如何布置它们是压电结构最优控制的研究内容。关于压电执行元件的位置选择对结构的形状和振动进行控制已有了较多的研究<sup>[8-12]</sup>。但是,在作动器的位置优化上,没有可以利用的梯度信息,使得它的优化相对较难。王中东等<sup>[8-9]</sup>将结构形状变形率定义为智能结构控制静态形状的度量,并用试布置法和数学规划法对压电执行元件位置进行优化。近年来,遗传算法(genetic algorithm, GA)受到人们广泛关注,与传统算法相比,它具有实用、高效、鲁棒性强的特点,适合复杂系统的优化<sup>[13]</sup>。将压电片的布置模式作为遗传算法优化的染色体,模式中的每一个元素作为染色体的基因,具有很好的对应性,且方便和有效。在压电智能结构优化中已经得到了很好的应用<sup>[14-16]</sup>。

当压电作动器的拓扑结构确定之后,如何施加电压是需要解决的另一问题。传统的简便方法是采用相同的电压。显然,这种方法不是最佳的,应该针对压电片位置的不同采用不同的电压进行多点输入,使其产生最好的控制效果。在作动器的电压优化上,王剑等<sup>[2-3]</sup>用最小二乘法和非线性优化法控制结构形状。邓年春等<sup>[17]</sup>从位移函数出发,用 Hamilton 原理推导了压电梁结构的有限元方程,并采用灵敏度分析的方法,优化结构的控制电压。

本文采用 HS-ANS(hybrid stress-assumed natural strain)法,构造能够克服剪切自锁、梯形自锁和厚度自锁的八节点实体板/壳单元。鉴于同时考虑作动器位置优化和输入电压优化的复杂性,本文的优化过程分两步进行。第一步利用遗传算法的组合优化设计作动器的铺设位置;第二步利用遗传算法的数值优化设计作动器的作用电压,将两者结合起来,得到优化解。通过计算曲壳结构形状控制的算例,充分验证遗传算法的高效、便捷和广泛的适用性。

## 1 实体板/壳单元和有限元方程

如图 1 所示八节点实体板/壳单元,其中  $r, s$  和  $t$  为自然坐标系,  $t$  坐标正方向沿着曲壳厚度(凸)方向,单元的几何插值函数和位移插值函数可表示为<sup>[6]</sup>

$$\mathbf{X}(r, s, t) = \sum_{i=1}^4 N_i(r, s) \left( \frac{1+t}{2} X_i^+ + \frac{1-t}{2} X_i^- \right), \quad (1)$$

$$\mathbf{U}(r, s, t) = \sum_{i=1}^4 N_i(r, s) \left( \frac{1+t}{2} U_i^+ + \frac{1-t}{2} U_i^- \right) = \mathbf{N} \mathbf{q}^e, \quad (2)$$

其中,  $X_i^+(X_i^-)$ ,  $U_i^+(U_i^-)$  分别为单元第  $i^+(i^-)$  个节点的坐标值和位移值,  $\mathbf{q}^e$  为单元节点位移向量,  $\mathbf{N}$  为形函数矩阵。

$$N_1 = (1-r)(1-s)/4, \quad N_2 = (1+r)(1-s)/4,$$

$$N_3 = (1+r)(1+s)/4, \quad N_4 = (1-r)(1+s)/4.$$

由几何插值函数式(1)和位移插值函数式(2),可得单元自然应变为

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \mathbf{X}_{,r}^T \mathbf{U}_{,r}, \quad \varepsilon_s = \mathbf{X}_{,s}^T \mathbf{U}_{,s}, \quad \gamma_{rs} = \mathbf{X}_{,r}^T \mathbf{U}_{,s} + \mathbf{X}_{,s}^T \mathbf{U}_{,r}, \\ \varepsilon_t = \mathbf{X}_{,t}^T \mathbf{U}_{,t}, \quad \gamma_{ts} = \mathbf{X}_{,t}^T \mathbf{U}_{,s} + \mathbf{X}_{,s}^T \mathbf{U}_{,t}, \quad \gamma_{tr} = \mathbf{X}_{,t}^T \mathbf{U}_{,r} + \mathbf{X}_{,r}^T \mathbf{U}_{,t}, \end{cases} \quad (3)$$

其中  $(\cdot)_{,r}$  表示关于  $r$  的偏导数。

局部坐标系 ( $O-xyz$ ) 下的应变由自然坐标下的应变经坐标转换可得

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_r^2 & x_s^2 & 2x_r x_s \\ y_r^2 & y_s^2 & 2y_r y_s \\ x_r y_r & x_s y_s & x_r y_s + x_s y_r \end{bmatrix}^{-T} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_r \\ \boldsymbol{\varepsilon}_s \\ \boldsymbol{\gamma}_{rs} \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_{zx} \\ \boldsymbol{\gamma}_{zy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{z_l} \begin{bmatrix} x_r & x_s \\ y_r & y_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_{tr} \\ \boldsymbol{\gamma}_{ts} \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_z = \frac{1}{z_l^2} \boldsymbol{\varepsilon}_t, \end{cases} \quad (4)$$

其中,  $x_r = \mathbf{e}_x^T \mathbf{X}_{,r}, y_r = \mathbf{e}_y^T \mathbf{X}_{,r}, x_s = \mathbf{e}_x^T \mathbf{X}_{,s}, y_s = \mathbf{e}_y^T \mathbf{X}_{,s}, z_l = \mathbf{e}_z^T \mathbf{X}_{,l}$ . 这里  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  分别是局部直角坐标系 ( $O-xyz$ ) 的轴向单位向量.

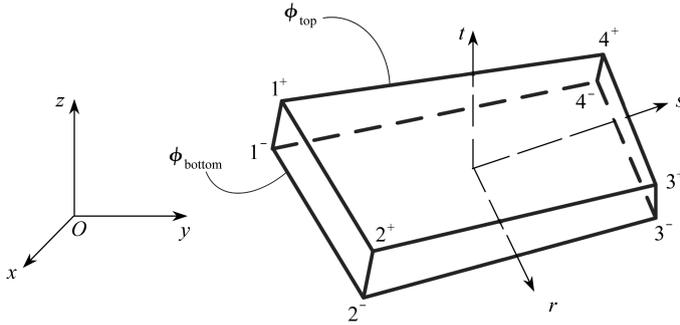


图 1 八节点实体板/壳单元

Fig.1 The eight-node solid plate/shell element

为克服板壳单元的剪切自锁和梯形自锁,将剪切应变和正应变采用 ANS (assumed natural strain) 法进行修正<sup>[6]</sup>:

$$\begin{cases} \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_{tr} = \frac{1}{2}(1-s)\boldsymbol{\gamma}_{tr}|_{r=0,s=-1} + \frac{1}{2}(1+s)\boldsymbol{\gamma}_{tr}|_{r=0,s=1}, \\ \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_{ts} = \frac{1}{2}(1-r)\boldsymbol{\gamma}_{ts}|_{r=-1,s=0} + \frac{1}{2}(1+r)\boldsymbol{\gamma}_{ts}|_{r=1,s=0}, \\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_t = N_1 \boldsymbol{\varepsilon}_t|_{r=-1,s=-1} + N_2 \boldsymbol{\varepsilon}_t|_{r=1,s=-1} + N_3 \boldsymbol{\varepsilon}_t|_{r=1,s=1} + N_4 \boldsymbol{\varepsilon}_t|_{r=-1,s=1}. \end{cases} \quad (5)$$

由式(3),(4)和式(5)可得局部物理坐标系下的修正应变向量为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{\varepsilon}_x \quad \boldsymbol{\varepsilon}_y \quad \boldsymbol{\varepsilon}_z \quad \boldsymbol{\gamma}_{zy} \quad \boldsymbol{\gamma}_{zx} \quad \boldsymbol{\gamma}_{xy}]^T = \mathbf{B} \mathbf{q}^e, \quad (6)$$

这里  $\mathbf{B}$  为局部物理坐标下的应变矩阵.

设压电片的极化方向沿板厚方向,把单元的电势节点简化为上电极层电势  $\phi_{top}$  和下电极层电势  $\phi_{bottom}$ , 如图 1 所示<sup>[6]</sup>. 则沿厚度方向的电势线性插值为

$$\phi(t) = \frac{1+t}{2} \phi_{top} + \frac{1-t}{2} \phi_{bottom}. \quad (7)$$

由此可以得到自然坐标系下的电场强度,再转化为局部直角坐标下的电场强度为

$$\mathbf{E} = \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Phi_{,z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mathbf{B}_e \boldsymbol{\Phi}^e \end{Bmatrix}, \mathbf{B}_e = \frac{1}{z_l^2} \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Phi}^e = [\phi_{top} \quad \phi_{bottom}]^T. \quad (8)$$

为了提高减缩积分单元的精度和稳定性,克服单元厚度自锁,本文采用应力杂交元(HS, hybrid stress)方法,将单元内应力  $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \quad \tau_{xy}\}^T$  表示为

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P} \boldsymbol{\beta}, \quad (9)$$

式中,  $\boldsymbol{\beta}$  为应力系数矢量,  $\mathbf{P}$  为应力形状函数矩阵<sup>[4]</sup>. 压电体在弹性限度范围内, 应变和电位移与应力和电场之间的本构方程是<sup>[18]</sup>

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{D} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{d}^T \\ \mathbf{d} & \boldsymbol{\epsilon} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{E} \end{Bmatrix}, \quad (10)$$

式中,  $\mathbf{D}$  为电位移向量,  $\mathbf{S}$  为柔度张量,  $\mathbf{d}$  为压电应变常数张量,  $\boldsymbol{\epsilon}$  为介电常数张量. 在求解空间曲壳结构问题时, 局部物理坐标系和整体坐标系一般并不一致, 需要进行坐标转换<sup>[18]</sup>. 为书写方便, 经坐标转化后的物理量及系数仍采用原符号.

为得到有限元方程, 下面采用 Hellinger-Reissner 广义变分原理, 其单元泛函表示为

$$\begin{aligned} \Pi_e = & \int_{V_e} \left( -\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ -\mathbf{E} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{S} & -\mathbf{d}^T \\ -\mathbf{d} & \boldsymbol{\epsilon} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ -\mathbf{E} \end{Bmatrix} + \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{b}^T \mathbf{U} \right) dv - \\ & \int_{S_\sigma^e} \mathbf{t}^T \mathbf{U} ds + \int_{S_Q^e} \mathbf{Q}^T \Phi ds. \end{aligned} \quad (11)$$

将式(6), (8)和(9)代入式(11)得到

$$\begin{aligned} \Pi_e = & -\frac{1}{2} [\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\beta} - (\Phi^e)^T \mathbf{L}^T \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{L} \Phi^e + (\Phi^e)^T \mathbf{R} \Phi^e] + \\ & \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{G} \mathbf{q}^e - \mathbf{f}_b^e \mathbf{q}^e - \mathbf{f}_\sigma^e \mathbf{q}^e - \mathbf{f}_Q^e \Phi^e, \end{aligned} \quad (12)$$

其中,  $\mathbf{H} = \int_{V_e} \mathbf{P}^T \mathbf{S} \mathbf{P} dv$ ,  $\mathbf{L} = \int_{V_e} \mathbf{P}^T \mathbf{d}^T \mathbf{B}_e dv$ ,  $\mathbf{R} = \int_{V_e} \mathbf{B}_e^T \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{B}_e dv$ ,  $\mathbf{G} = \int_{V_e} \mathbf{P}^T \mathbf{B} dv$ ,  $\mathbf{f}_b^e = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dv$  为单元体力荷载列阵,  $\mathbf{f}_\sigma^e = \int_{S_\sigma^e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} ds$  为单元面力荷载列阵,  $\mathbf{f}_Q^e = -\int_{S_Q^e} \mathbf{Q}^T ds$  为单元电荷列阵. 这里  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{t}$  和  $\mathbf{Q}$  分别为体力、面力和面电荷.

式(12)是独立变量  $\boldsymbol{\beta}$ ,  $\mathbf{q}^e$  和  $\Phi^e$  的泛函, 令其变分为 0 可得独立变量的 3 组耦合方程, 消去应力参数  $\boldsymbol{\beta}$  后可得关于单元位移和电势的有限元方程为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{mm}^e & \mathbf{k}_{me}^e \\ (\mathbf{k}_{me}^e)^T & \mathbf{k}_{ee}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^e \\ \Phi^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_b^e + \mathbf{f}_\sigma^e \\ \mathbf{f}_Q^e \end{Bmatrix}, \quad (13)$$

式中,  $\mathbf{k}_{mm}^e = \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}$  为单元刚度矩阵,  $\mathbf{k}_{me}^e = \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{L}$  为单元压电耦合刚度矩阵,  $\mathbf{k}_{ee}^e = \mathbf{L}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{L} - \mathbf{R}$  为介电刚度矩阵.

## 2 优化方法

### 2.1 压电片位置优化

为了实现对主结构的形状控制, 同时为了获得最大的弯曲效果, 可将压电材料对称地粘贴在主结构的上下表面. 设作用在每块压电片上的电势差相同, 对其位置的布置进行优化. 将主结构表面划分为  $n$  个区域, 用向量  $\bar{\mathbf{X}}$  表示作动器铺设模式,  $\bar{\mathbf{X}}$  的第  $i$  个元素  $x_i$  代表在某个区域是否粘贴压电层(作动器), 即

$$\bar{\mathbf{X}} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad x_i = \begin{cases} 1, & \text{with actuator,} \\ 0, & \text{without actuator.} \end{cases}$$

$\bar{\mathbf{X}}$  即为压电片位置优化的设计变量.

用  $\bar{d}_i$  和  $d_i$  分别表示主结构第  $i$  个节点位移的计算值和目标值, 计算值与作动器的布置模式  $\bar{\mathbf{X}}$  有关. 将对结构形状进行控制的目标转变为以下的位置组合优化问题:

$$\begin{cases} \text{find: } \bar{\mathbf{X}}, \\ \text{min: } F(\bar{\mathbf{X}}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{|\bar{d}_i - d_i|}{d_i}, \end{cases} \quad (14)$$

式中  $m$  为节点总数。

将压电片的布置模式  $\bar{\mathbf{X}}$  作为遗传算法优化的染色体,  $\bar{\mathbf{X}}$  的每一个元素  $x_i$  作为染色体的基因, 偏差值  $F(\bar{\mathbf{X}})$  作为适应度函数. 应用遗传算法组合优化的具体步骤为

- 1) 确定群体总数, 即初始布置模式的个数. 本文取群体总数为 20.
- 2) 以二进制编码 0-1 为基因, 生成初始个体.
- 3) 由式 (14) 对每种布置模式进行计算, 确定各自的适应度.
- 4) 确定交叉概率  $P_c$ , 变异概率  $P_m$ , 及计算代数  $g_e$ . 用遗传算子进行选择、交叉和变异, 生成新的群体. 为提高计算效率, 本文取  $P_c = 0.8, P_m = 0.2, g_e = 100$ .
- 5) 重复步骤 3), 4), 直至最后一代, 获得最终优化结果.

## 2.2 压电片电压优化

在压电片的铺设位置不变的情况下, 可以对作用在作动器上的电压进行优化. 由于每块压电片作用的电压可以不同, 所以电压的优化是多点输入问题. 向量  $\mathbf{V}$  表示作用在压电片上的电压,  $\mathbf{V}$  的第  $i$  个元素  $V_i$  为作用在第  $i$  块作动器上的电压值, 即  $\mathbf{V} = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ ,  $n$  为作动器的个数.  $\mathbf{V}$  即为电压分布优化的设计变量.

用  $\bar{d}_i$  和  $d_i$  分别表示主结构第  $i$  个节点位移的优化值和目标值, 计算值与作用在作动器上的电压  $\mathbf{V}$  有关. 将对结构形状进行控制的目标转变为以下的优化问题:

$$\begin{cases} \text{find: } \mathbf{V}, \\ \text{min: } F(\mathbf{V}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{|\bar{d}_i - d_i|}{d_i} \\ \text{s.t. } V_{\min} \leq V_j \leq V_{\max}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (15)$$

采用遗传算法进行优化, 压电片的布置模式  $\mathbf{V}$  就是优化时的染色体,  $\mathbf{V}$  的每一个元素  $V_i$  是染色体的基因, 偏差值  $F(\mathbf{V})$  为适应度函数, 只要按照约束条件控制  $V_i$  的变化, 就可容易地得到满足约束条件的结果, 计算简单方便. 应用遗传算法数值优化时, 只需将基因变为浮点数, 其它步骤与 2.1 小节的相同.

## 3 算 例

主结构材料的弹性模量和 Poisson(泊松) 比为:  $E = 68.0 \text{ GPa}, \nu = 0.3$ . 压电材料 (PZT5H) 的材料参数为

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_{22} = 12.6 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}, & C_{33} &= 11.7 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}, \\ C_{12} &= 7.95 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}, & C_{13} &= C_{23} = 8.41 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}, \\ C_{44} &= C_{55} = 2.3 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}, & C_{66} &= 2.33 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}, \\ e_{31} &= e_{32} = -6.5 \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}, & e_{33} &= 23.3 \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}, & e_{16} &= e_{25} = 17 \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}, \\ \epsilon_{11}^e &= \epsilon_{22}^e = 1.503 \times 10^{-8} \text{ F/m}, & \epsilon_{33}^e &= 1.3 \times 10^{-8} \text{ F/m}. \end{aligned}$$

由材料参数之间的关系  $\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}, \mathbf{d} = \mathbf{eS}, \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \mathbf{dCd}^T$  可以得到相应参数值.

### 3.1 悬臂板

设左端固定右端自由的悬臂铝质平板结构,长宽厚分别为  $L = 0.2 \text{ m}$ ,  $D = 0.01 \text{ m}$ ,  $h = 0.001 \text{ m}$ .为使自由端产生一定量的竖直向下载移  $\delta$ ,如何在悬臂板的上方局部合理铺设压电片使其达到理想的位移? 这一问题的对偶提法是,原结构(平板)受外界干扰后在自由端产生了某一位移  $\delta$ ,为了使结构恢复原形状如何合理布置压电片和作用电势? 根据结构的约束条件及要求,设主结构中面被控制成  $z = -x^2L^{-2}\delta$  的抛物柱面.设压电片的尺寸为  $(L/20) \times D \times (h/5)$ ,额定电压范围为  $0 \sim 100 \text{ V}$ .初始时在主结构表面整面铺设,从而划分出  $20 \times 1$  的铺设网格.有限元计算时,主结构用  $20 \times 1 \times 1$  的单元网格.

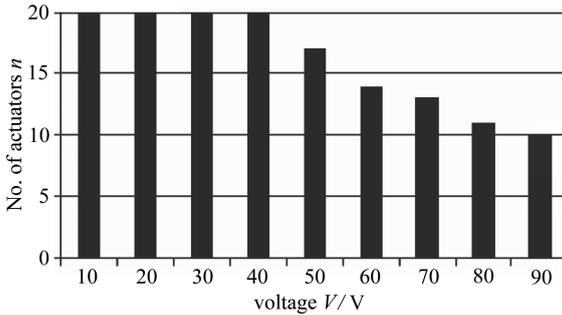


图2 不同作用电压需要的压电片个数

Fig.2 No. of piezoelectric actuators at different voltages

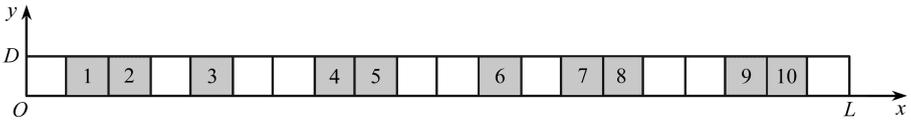


图3 悬臂板压电片布置

Fig.3 Layout of piezoelectric actuators on the cantilever plate

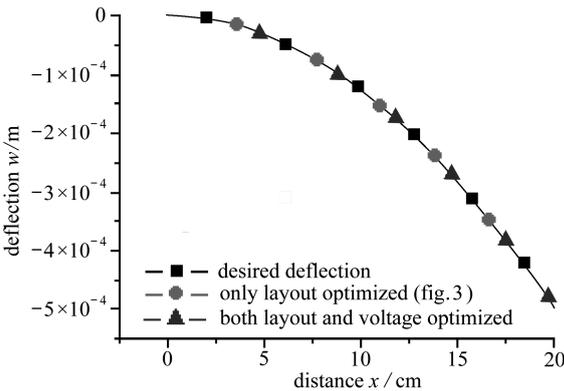


图4 悬臂板的挠度控制曲线

Fig.4 Deflection of cantilever plate

第一步为压电片优化布置.设每片压电片具有给定的电压值,对压电片布置(包括数量和位置)进行优化,找出较为重要的铺设位置.应用遗传算法优化设计,得到不同电压下所需压电片个数,如图2所示.图2显示,对于作用电压越小,控制能力越弱,需要的压电片个数也就越多.从节省材料的角度考虑,采用电压为  $90 \text{ V}$  时如图3所示的优化布置方式较合理.在这种条件下,适应度函数  $F(\bar{X})$  随遗传算法计算代数的增加而减少,在第8代就得到了优化解,计算效率高.

第二步为电压值优化.在压电片位置优化的基础上(图3),进一步优化电压.设电压的范围为  $0 \sim 100 \text{ V}$ ,结果如表1所示.随着计算代数逐渐增加,在第15代时适应度函数  $F(V)$  就可以收敛到最优解.图4给出了主结构的目标位移、仅优化压电片布置(图3)、压电片位置及电压均优化3种情况下的形状曲线.可以看出,经过优化后,节点位移接近目标值的程度很高.

表 1 悬臂板的电压优化

Table 1 Optimal voltages for the cantilever plate

| order of the actuator | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |
|-----------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| voltage $V/V$         | 85.5 | 98.8 | 79.2 | 98.6 | 93.3 | 86.2 | 94.1 | 92.1 | 79.1 | 84.9 |

### 3.2 柱壳形状的控制

左边固支, 右边简支, 另两边自由的矩形平板, 长宽厚分别为  $L = 0.2 \text{ m}$ ,  $D = 0.2 \text{ m}$ ,  $h = 0.001 \text{ m}$ . 这里的问题是, 优化压电片的布置和电压值使平板的形状变为正弦柱壳. 或与这一问题等价的提法是, 平板受环境条件影响发生了正弦柱壳形状的形变, 通过优化压电片布置和作用电压使板的形变消失, 恢复到平板状态, 本算例按前者进行. 设正弦柱壳的中面方程表示为  $z = (1/16)h\sin(\pi x/L)$ . 为提高控制效果, 在主结构上下表面局部对称铺设压电片, 并设布置模式关于  $y = D/2$  处的截面对称.

设所有压电片尺寸是  $(L/8) \times (D/8) \times (h/5)$ , 这样就在主结构表面划分出  $8 \times 8$  的压电片铺设网格. 有限元计算时, 主结构剖分为  $16 \times 16 \times 1$  的单元网格. 各材料参数与算例 3.1 相同.

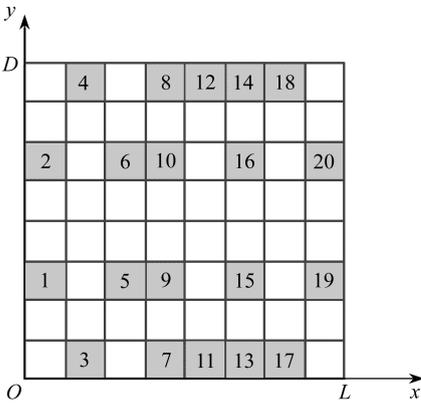


图 5 正弦柱壳控制的压电片布置

Fig.5 Layout of piezoelectric actuators on the sinusoidal column shell

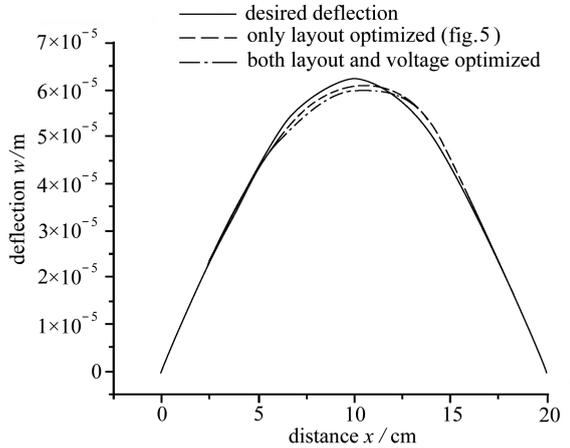


图 6 正弦柱壳控制的挠度控制曲线

Fig.6 Control deflection of the sinusoidal column shell

第一步, 对压电片的位置和数目进行优化. 设每个压电片作用电压  $70 \text{ V}$ , 应用遗传算法优化, 得到的布置模式如图 5 所示.

第二步, 在压电片位置优化的基础上 (图 5) 进一步优化电压. 设电压在  $0 \sim 100 \text{ V}$  范围内优化, 结果如表 2 所示. 在第 15 代就可以得到很好的结果, 计算效率仍然很高. 图 6 给出了主结构  $y = D/2$  处截面沿  $x$  方向的目标位移、仅优化压电片布置 (图 5) 和压电片位置及电压均优化 3 种情况下的挠度曲线. 可以看出, 优化后的节点位移很接近目标值. 经计算验证, 虽然在 64 个铺设位置上全部铺设压电片并优化电压能得到更好的控制效果, 但材料、能量等成本很高, 且控制精度并不能提高很多, 综合来看本例优化的控制方法更经济高效.

表 2 正弦柱壳控制的电压优化

Table 2 Optimal voltages for the sinusoidal column shell

| order of the actuator | 1,2  | 3,4  | 5,6  | 7,8  | 9,10 | 11,12 | 13,14 | 15,16 | 17,18 | 19,20 |
|-----------------------|------|------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| voltage $V/V$         | 54.0 | 52.9 | 42.8 | 61.5 | 47.9 | 57.7  | 52.3  | 42.5  | 50.2  | 44.8  |

### 3.3 双曲壳的控制

为比较更为复杂条件下的计算和优化效果,将 3.2 小节算例的控制目标换成双曲壳.设双曲壳的中面为  $z = (1/16)h \cdot \sin(\pi x/L) \cdot \sin(\pi y/D)$ , 其它条件不变.

表 3 双曲壳控制的电压优化

Table 3 Optimal voltages for the double-curved shell

|                       |       |       |       |       |       |       |       |
|-----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| order of the actuator | 1,2   | 3,4   | 5,6   | 7,8   | 9,10  | 11,12 | 13,14 |
| voltage $V/V$         | 59.3  | 42.2  | 39.4  | 45.3  | 57.4  | 45.7  | 58.4  |
| order of the actuator | 15,16 | 17,18 | 19,20 | 21,22 | 23,24 | 25,26 | 27,28 |
| voltage $V/V$         | 52.4  | 48.3  | 57.2  | 41.6  | 54.0  | 55.4  | 44.3  |

使用相同的计算方法,得到的优化布置模式如图 7 所示,电压优化结果如表 3 所示.图 8 给出了主结构的目标位移、仅优化压电片布置(图 7)、压电片位置及电压均优化 3 种情况下的挠度曲线.经过优化后,主结构形状非常接近目标形状,达到了优化控制的目的,说明本文的方法对复杂问题也有很好的效果.

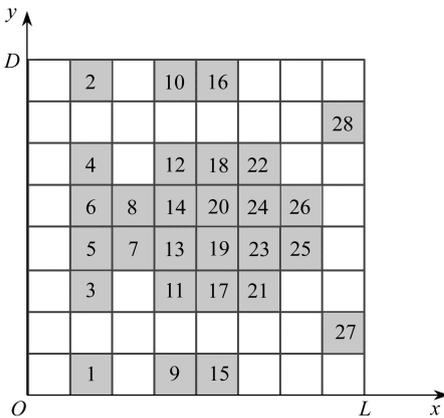


图 7 正弦双曲壳控制的压电片布置

Fig.7 Layout of piezoelectric actuators on the double-curved shell

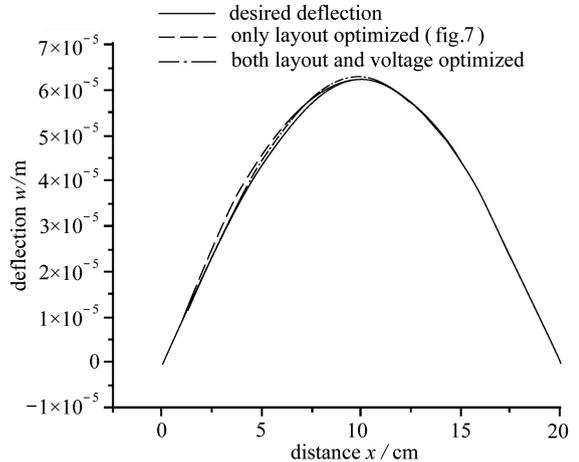


图 8 双曲壳控制的挠度控制曲线

Fig.8 Control deflection of the double-curved shell

## 4 结 论

本文采用 HS-ANS 法,构造了能够克服各种自锁的压电曲壳结构实壳单元,并使用遗传算法的组合优化设计作动器的数目和位置,进一步利用遗传算法的数值优化设计各作动器的作用电压.悬臂梁算例,表明本文方法可以使用最少和最合理的压电片布置以及最合理的多点输入电压非常准确地控制基体形变.正弦柱壳和正弦双曲壳的计算结果说明本文方法对解决复杂问题依然简便有效.3 个算例共同说明了本文给出的八节点实体板/壳单元,能准确计算板壳类结构的问题,使用遗传算法优化,既能达到控制目的,且有优良的收敛性能.

### 参考文献(References):

- [1] 李家宇,程秀全,卿光辉. 四边简支压电热弹性层合正交双曲壳的精确解[J]. 工程力学, 2010, 27(8): 83-89. (LI Jia-yu, CHENG Xiu-quan, QING Guang-hui. Exact solution for laminated piezothermoelastic generic shells with four simply supported edges [J]. *Engineering Mechan-*

- ics, 2010, **27**(8): 83-89.(in Chinese))
- [2] 王剑, 赵国忠, 张洪武. 压电曲壳结构形状控制和优化设计[J]. 力学学报, 2007, **39**(5): 618-625.(WANG Jian, ZHAO Guo-zhong, ZHANG Hong-wu. Shape control and design optimization of the piezoelectric curved shell structures[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2007, **39**(5): 618-625.(in Chinese))
- [3] 王剑, 赵国忠, 刘宝山. 压电曲壳单元及其形状控制[J]. 工程力学, 2008, **25**(4): 224-229. (WANG Jian, ZHAO Guo-zhong, LIU Bao-shan. Shape control of piezoelectric shell structures [J]. *Engineering Mechanics*, 2008, **25**(4): 224-229.(in Chinese))
- [4] Sze K Y, Yao L Q. A hybrid stress ANS solid-shell element and it's generalization for smart structure modeling—part 1: solid-shell element formulation[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, **48**(4): 545-564.
- [5] Sze K Y, Yao L Q. A hybrid stress ANS solid-shell element and it's generalization for smart structure modeling—part 2: smart structure modeling[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, **48**(4): 565-582.
- [6] Sze K Y, Yao L Q. Modeling smart structures with segmented piezoelectric sensors and actuators[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, **235**(3): 495-520.
- [7] 郑世杰, 郭腾飞, 董会丽, 宋振. 基于混合编码遗传算法和有限元分析的压电结构载荷识别[J]. 计算力学学报, 2009, **26**(3): 330-335.(ZHENG Shi-jie, GUO Teng-fei, DONG Hui-li, SONG Zhen. Load identification of piezoelectric structures by using genetic algorithm and finite element analysis[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2009, **26**(3): 330-335.(in Chinese))
- [8] 王中东, 关伟, 陈塑寰. 压电智能结构振动控制中执行元件最优位置的选择[J]. 振动工程学报, 1999, **12**(4): 141-147.(WANG Zhong-dong, GUAN Wei, CHEN Su-huan. Selection of the optimal actuator locations for active vibration control of piezoelectric intelligent structures[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 1999, **12**(4): 141-147.(in Chinese))
- [9] 王中东, 雷玉祥, 陈塑寰. 智能结构静态形状控制中压电执行元件最优位置选择[J]. 吉林大学自然科学学报, 1998, **2**(2): 15-18.(WANG Zhong-dong, LEI Yu-xiang, CHEN Su-huan. Selection of optimal actuator locations for static shape control of the intelligent structure[J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Jilinensis*, 1998, **2**(2): 15-18.(in Chinese))
- [10] 靳玉佳, 徐斌, 姜节胜. 区间参数压电智能连续体多目标拓扑优化[J]. 机械科学与技术, 2011, **30**(7): 1150-1153, 1158.(JIN Yu-jia, XU Bin, JIANG Jie-sheng. Multi-objective topology optimization of piezoelectric smart continuum structures with interval parameters[J]. *Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering*, 2011, **30**(7): 1150-1153, 1158.(in Chinese))
- [11] 王军, 杨亚东, 张家应, 苏洪波. 面向结构振动控制的压电作动器优化配置研究[J]. 航空学报, 2012, **33**(3): 494-500.(WANG Jun, YANG Ya-dong, ZHANG Jia-ying, SU Hong-bo. Investigation of piezoelectric actuator optimal configuration for structural vibration control[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2012, **33**(3): 494-500.(in Chinese))
- [12] 吕永桂, 陈凯, 魏燕定. 智能杆致动器优化配置及扭转主动控制试验[J]. 振动、测试与诊断, 2010, **30**(4): 400-404, 472-473.(LÜ Yong-gui, CHEN Kai, WEI Yan-ding. Intelligent actuator placement and active torsional vibration control experiment on a circular tube[J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2010, **30**(4): 400-404, 472-473.(in Chinese))
- [13] 雷英杰, 张善文, 李续武, 周创明. MATLAB 遗传算法工具箱及应用[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2005.(LEI Ying-jie, ZHANG Shan-wen, LI Xu-wu, ZHOU Chuang-ming. *MAT-*

- LAB GA Toolbox and Application*[M]. Xi'an: Xidian University Press, 2005.(in Chinese)
- [14] Sadri A M, Wright J R, Wynne R J. Modeling and optimal placement of piezoelectric actuators in isotropic plates using genetic algorithms[J]. *Smart Mater Struct*, 1999, **8**(4): 490-498.
- [15] Gao F, Shen Y P, Li L X. The optimal design of piezoelectric actuators for plate vibroacoustic control using genetic algorithms with immune diversity[J]. *Smart Mater Struct*, 2000, **9**(4): 485-491.
- [16] 钱锋, 王建国, 曲磊. 压电结构振动控制及压电片位置优化的遗传算法[J]. 固体力学学报, 2011, **32**(4): 398-404.(QIAN Feng, WANG Jian-guo, QU Lei. Optimal placements of piezoelectric patch using genetic algorithm in structure vibration control[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2011, **32**(4): 398-404.(in Chinese))
- [17] 邓年春, 邹振祝. 智能梁的静态形状控制[J]. 应用力学学报, 2003, **20**(2): 129-132, 166. (DENG Nian-chun, ZOU Zhen-zhu. Static shape control of smart beam[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2003, **20**(2): 129-132, 166.(in Chinese))
- [18] 王矜奉, 苏文斌, 王春明, 盖志刚. 压电振动理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2011.(WANG Jin-feng, SU Wen-bin, WANG Chun-ming, GAI Zhi-gang. *Piezoelectric Vibration Theory and Application*[M]. Beijing: Science Press, 2011.(in Chinese))

## Shape Control and Optimal Design of Piezoelectric Shell Structures

YAN Hao, YAO Lin-quan, SUN Xiao-jie

(School of Urban Rail Transportation, Soochow University,  
Suzhou, Jiangsu 215000, P.R.China)

(Recommended by GOU Xiao-fan, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** The problem of shape control of curved shell structures with the least piezoelectric actuators in the most reasonable layout at optimal multi-point voltages was addressed. First, a solid shell element for shell structures was constructed with the HS-ANS method, to overcome shear locking, trapezoidal locking and thickness locking. Second, the layout of actuators was designed through the GA combinatorial optimization and the input actuator voltage was decided with the GA numerical optimization. The general computation processes were also built respectively. The following examples show the effectiveness of the proposed solid shell element and optimization method to control deformation of the curved shell structures.

**Key words:** piezoelectric shell; shape control; genetic algorithm; solid shell element; finite element method

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(11172192)