文章编号:1000-0887(2014)06-0684-08

时不变分数阶系统反周期解的存在性*

杨绪君[1], 宋乾坤[2]

(1. 重庆交通大学 信息科学与工程学院, 重庆 400074;
2. 重庆交通大学 理学院, 重庆 400074)

(我刊编委宋乾坤来稿)

摘要: 反周期解问题是非线性微分系统动力学的重要特征.近年来,非线性整数阶微分系统的反周期解问题得到了广泛的研究,非线性分数阶微分系统的反周期解问题也得到了初步的讨论.不同于已有的工作,该文研究时不变分数阶系统反周期解的存在性问题.证明了时不变分数阶系统在有限时间区间内不存在反周期解,而当分数阶导数的下限趋近于无穷大时,时不变分数阶系统却存在反周期解.

关 键 词: 分数阶微积分; 分数阶系统; 反周期解

中图分类号: O175.13 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.06.010

引 言

分数阶微积分几乎与 Newton-Leibniz 传统微积分同时出现,最早可以追溯至 Leibniz 和 Hospital 在 1695 年的研究工作,距今已有 300 多年的历史[1].然而,由于缺乏相应的物理背景,分数阶微积分一直未能得到广泛的应用和发展.直到 20 世纪晚期,计算技术的发展和工业技术的提高为分数阶微积分的发展提供了客观条件[2].近 20 年来,分数阶微分系统的应用迅速渗透到电子信息、人工智能、材料科学、生物工程、经济管理等领域.在混沌理论中,混沌控制的思想是基于这样一个事实:混沌吸引子是由无数个不稳定的周期轨道镇定而形成的.因此,在研究分数阶系统的混沌控制中,给出系统是否存在周期解是很有必要的[3].在文献[4]中,作者证明了时不变分数阶系统没有周期解;在文献[5]中,作者证明了以 T 为周期的函数在求分数阶次微分后得到的函数不可能以 T 为周期;在文献[6]中,作者指出尽管在有限时间区间内分数阶系统没有周期解,但是当考虑了系统的稳定状态响应时,能够检测到周期轨道;在文献[7]中,作者讨论了 3 类不同定义的分数阶系统,即 Caputo 分数阶导数定义的系统、Riemann-Liouville 分数阶定义的系统和 Grünwald-Letnikov 分数阶定义的系统,证明了它们都没有周期解;在文献[8]中,作者通过设计线性反馈控制器研究了分数阶混沌系统不稳定周期轨线的镇定问题;在文献[9]中,作者讨论了线性分数阶微分系统周期解的不存在性问题,并在渐近周期函数空间中研究了半线性分数阶微分系统周期解的存在性和唯一性问题.

---

* **收稿日期:** 2014-03-24; **修订日期:** 2014-05-06
基金项目: 国家自然科学基金(61273021);重庆市自然科学基金(重点)(CQcstc2013jjB40008)
作者简介: 杨绪君(1989—),男,江苏徐州人,硕士生(E-mail: xujunyangcquc@163.com);
宋乾坤(1963—),男,四川岳池人,教授,博士(通讯作者. E-mail: qiankunsong@163.com).

众所周知,反周期解问题是非线性微分系统动力学的重要特征,最先由日本学者 Okochi 提出并进行研究[10].近年来,非线性微分系统的反周期解问题得到了广泛的研究[11-12].在文献[11-17]中,作者研究了整数阶非线性微分系统的反周期解问题,给出了系统存在反周期解的若干充分条件;在文献[18-21]中,作者研究了具有反周期边界值条件的分数阶微分系统解的存在性问题,获得了系统有解的一些判定条件.不同于已有的工作,本文研究了时不变分数阶系统反周期解的存在性问题.

1 预备知识

分数阶微积分算子是整数阶微积分算子的推广,可以用如下广义的基本算子表示:

$$
{}_aD_t^{\alpha}=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}t^{\alpha}}, & \alpha>0,\\ 1, & \alpha=0,\\ \displaystyle\int_a^t(\mathrm{d}\tau)^{-\alpha}, & \alpha<0,\end{cases}
$$

其中,α 是分数阶微积分的阶次,a 和 t 分别是算子的下限和上限.分数阶微积分的定义有多种形式,目前,广泛应用的有 Grünwald-Letnikov 定义,Riemann-Liouville 定义和 Caputo 定义.本文采用 Caputo 分数阶导数定义.

定义 1[22] $[a,b]$ 为实数轴 R 上的有限区间,$\alpha\in\mathbf{R}_+$, $f(t)$ 为定义在$[a,b]$ 上的连续函数,则$f(t)$ 的 Riemann-Liouville 型 α 阶积分定义为

$$
{}_aI_t^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)\mathrm{d}\tau,\qquad t\in[a,b],
$$

其中,${}_aI_t^{\alpha}$ 表示 α 阶积分算子,$\Gamma(\cdot)$ 表示 gamma 函数算子.

定义 2[22] $[a,b]$ 为实数轴 R 上的有限区间,$\alpha\in\mathbf{R}_+$, $f(t)\in C^n[a,b]$,则$f(t)$ 的 Caputo 型 α 阶导数定义为

$$
{}_a^{\mathrm{C}}D_t^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(\tau)\mathrm{d}\tau,\qquad t\in[a,b],
$$

其中,当 $\alpha\in\mathbf{N}$ 时,$n=\alpha$;当 $\alpha\notin\mathbf{N}$ 时,$n=[\alpha]+1$.

根据定义 1 和定义 2, 很容易得到 ${}_a^{\mathrm{C}}D_t^{\alpha}f(t)={}_aI_t^{n-\alpha}\,{}_a^{\mathrm{C}}D_t^{n}f(t)$, n 是不小于 α 的最小整数.而当 $0<\alpha<1$ 时,有

$$
{}_a^{\mathrm{C}}D_t^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{-\alpha}f'(\tau)\mathrm{d}\tau,\qquad t\in[a,b].
$$

本文考虑如下时不变分数阶系统:

$$
\begin{cases}{}_a^{\mathrm{C}}D_t^{\alpha_i}=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n),\\ x_i(a)=x_{ia},\end{cases}\tag{1}
$$

其中, $i=1,2,\cdots,n$, $0<\alpha_i<1$, $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是时不变连续函数.方程$f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ 的解称为系统(1)的平衡点.在文献[22]中,作者证明了系统(1)解的存在性和唯一性问题;在文献[2]中,作者证明了系统(1)等价于如下 Volterra 积分方程:

$$
x_i(t)=x_i(a)+\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int_a^t(t-\tau)^{\alpha_i-1}g_i(\tau)\mathrm{d}\tau,\tag{2}
$$

其中, $g_i(t)=f_i(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))$.

定义 3[11] 系统(1)的一个非常数解 $x(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))$ 称为系统(1) 的一个 T- 反周期解,如果存在一个常数 $T>0$, 使得

$$x(t)=-x(t+T)$$

对任意的 $t\geqslant 0$ 都成立.

2 主要结果

假设 $\tilde{x}(t)=(\tilde{x}_1(t),\tilde{x}_2(t),\cdots,\tilde{x}_n(t))$ 是系统(1) 的一个 T- 反周期解.也就是 $\tilde{x}(t)=-\tilde{x}(t+T)$ 对任意的 $t\geqslant 0$ 都成立.显然,$\tilde{x}(t)=\tilde{x}(t+2T)$ 对任意的 $t\geqslant 0$ 都成立.由式(2)便得

$$\int_a^{a+2T}(a+2T-\tau)^{\alpha_i-1}\tilde{g}_i(\tau)\mathrm{d}\tau=0,\qquad i=1,2,\cdots,n,\tag{3}$$

其中, $\tilde{g}_i(t)=f_i(\tilde{x}_1(t),\tilde{x}_2(t),\cdots,\tilde{x}_n(t))$.

引理 1 如果 $\tilde{x}(t)=(\tilde{x}_1(t),\tilde{x}_2(t),\cdots,\tilde{x}_n(t))$ 是系统(1) 的一个 T- 反周期解,则

$$\int_a^{a+2T}(a+2pT-\tau)^{\alpha_i-1}\tilde{g}_i(\tau)\mathrm{d}\tau=0,\qquad i=1,2,\cdots,n\tag{4}$$

对任意 $p\in\mathbf{N}$ 恒成立.

证明 由式(3)可知,当 $p=1$ 时,式(4) 显然成立.根据数学归纳法,假设式(4) 对任意 $p=1,2,\cdots,k,k\in\mathbf{N},k<n$ 都成立.下面证明,当 $p=k+1$ 时,式(4)成立.

由式(2)和 $\tilde{x}_i(a)=\tilde{x}_i(a+2(k+1)T)$ 可得

$$\int_a^{a+2(k+1)T}(a+2(k+1)T-\tau)^{\alpha_i-1}\tilde{g}_i(\tau)\mathrm{d}\tau=0,\qquad i=1,2,\cdots,n.\tag{5}$$

上式可记为

$$\sum_{j=1}^{k+1}S_{ij}=0,\qquad i=1,2,\cdots,n,\tag{6}$$

其中

$$S_{ij}=\int_{a+2(j-1)T}^{a+2jT}(a+2(k+1)T-\tau)^{\alpha_i-1}\tilde{g}_i(\tau)\mathrm{d}\tau,\qquad i=1,2,\cdots,n.\tag{7}$$

定义 $\tau^*=\tau-2(j-1)T$,则

$$S_{ij}=\int_a^{a+2T}(a+2(k-j+2)T-\tau^*)^{\alpha_i-1}\tilde{g}_i(\tau^*+2(j-1)T)\mathrm{d}\tau^*,\qquad i=1,2,\cdots,n.\tag{8}$$

而 $\tilde{g}_i(t)$ 是时不变的连续函数,即 $\tilde{g}_i(\tau^*+2(j-1)T)=\tilde{g}_i(\tau^*)$.因此,式(8)等价于

$$S_{ij}=\int_a^{a+2T}(a+2(k-j+2)T-\tau^*)^{\alpha_i-1}\tilde{g}_i(\tau^*)\mathrm{d}\tau^*,\qquad i=1,2,\cdots,n.\tag{9}$$

根据归纳假设可知, $S_{ij}=0,i=1,2,\cdots,n,\ j=2,3,\cdots,k+1$.因此,由式(6) 即得 $S_{i1}=0,i=1,2,\cdots,n$.证毕.

引理 2 如果式(4)对任意 $p\in\mathbf{N}$ 恒成立,则式(10)成立.

$$\int_a^{a+2T}\tilde{g}_i(\tau)\mathrm{d}\tau=0,\qquad i=1,2,\cdots,n.\tag{10}$$

证明 下面用归谬法证明式(10)成立.

假设 T_i^+ 表示曲线 $\tilde{g}_i(t)$ 与 t 轴所围成的位于 t 轴上方的区域的面积,T_i^- 表示曲线 $\tilde{g}_i(t)$ 与 t 轴所围成的位于 t 轴下方的区域的面积.则

$$\int_a^{a+2T}\tilde{g}_i(\tau)\mathrm{d}\tau=T_i^+-T_i^-,\qquad i=1,2,\cdots,n.\tag{11}$$

设 $h_i(t)$, $i=1,2,\cdots,n$ 是定义在区间 $[a,a+2T]$ 内的正函数, 即 $h_i(t)>0$, $a\leqslant t\leqslant a+2T$, $i=1,2,\cdots,n$. 则

$$m_iT_i^+-M_iT_i^-\leqslant\int_a^{a+2T}h_i(\tau)\tilde{g}_i(\tau)\mathrm{d}\tau\leqslant M_iT_i^+-m_iT_i^-,\qquad i=1,2,\cdots,n,\tag{12}$$

其中

$$\begin{cases}m_i=\min h_i(t), & a\leqslant t\leqslant a+2T,\ i=1,2,\cdots,n,\\ M_i=\max h_i(t), & a\leqslant t\leqslant a+2T,\ i=1,2,\cdots,n.\end{cases}\tag{13}$$

如果 $h_i(t)=(a+2pT-t)^{\alpha_i-1}$, 则 $m_i=(2pT)^{\alpha_i-1}$, $M_i=(2pT-2T)^{\alpha_i-1}$. 于是

$$\begin{aligned}&(2pT)^{\alpha_i-1}T_i^+-(2pT-2T)^{\alpha_i-1}T_i^-\leqslant\int_a^{a+2T}(a+2pT-\tau)^{\alpha_i-1}\tilde{g}_i(\tau)\mathrm{d}\tau_i\leqslant\\&\qquad(2pT-2T)^{\alpha_i-1}T_i^+-(2pT)^{\alpha_i-1}T_i^-.\end{aligned}\tag{14}$$

接下来,证明式(11)左侧积分的值不可能为正数. 于是,只需证

$$T_i^-/T_i^+<1.\tag{15}$$

而

$$\lim_{p\to\infty}\frac{(2pT)^{\alpha_i-1}}{(2pT-2T)^{\alpha_i-1}}=1.\tag{16}$$

由式(15)和(16),必存在一个足够大的数 $p\in\mathbf{N}$ 使得

$$\frac{(2pT)^{\alpha_i-1}}{(2pT-2T)^{\alpha_i-1}}>\frac{T_i^-}{T_i^+}.\tag{17}$$

即 $(2pT)^{\alpha_i-1}T_i^+-(2pT-2T)^{\alpha_i-1}T_i^->0$, 结合式(14)左侧,则

$$\int_a^{a+2T}(a+2pT-\tau)^{\alpha_i-1}\tilde{g}_i(\tau)\mathrm{d}\tau>0,\qquad i=1,2,\cdots,n.\tag{18}$$

与式(4)矛盾. 因此,式(11)左侧积分的值不可能为正数. 同理,易证式(11)左侧积分的值不可能为负. 证毕.

引理 3　如果式(4)对任意 $p\in\mathbf{N}$ 恒成立,则式(19)成立.

$$\int_a^{a+2T}\tau^m\tilde{g}_i(\tau)\mathrm{d}\tau=0,\qquad m\in\mathbf{N},\ i=1,2,\cdots,n.\tag{19}$$

证明　设 $h_i(t)$, $i=1,2,\cdots,n$ 是定义在区间 $[a,a+2T]$ 内的正函数, c 是常数, 且满足 $c>(a+2T)^m$. 则

$$\begin{aligned}&m_iT_i^+-M_iT_i^-\leqslant\\&\qquad\int_a^{a+2T}h_i(\tau)(c-\tau^m)\tilde{g}_i(\tau)\mathrm{d}\tau\leqslant M_iT_i^+-m_iT_i^-,\qquad i=1,2,\cdots,n,\end{aligned}\tag{20}$$

其中

$$\begin{cases}m_i=\min h_i(t), & a\leqslant t\leqslant a+2T,\ i=1,2,\cdots,n,\\ M_i=\max h_i(t), & a\leqslant t\leqslant a+2T,\ i=1,2,\cdots,n.\end{cases}\tag{21}$$

T_i^+ 表示曲线 $(c-\tau^m)\tilde{g}_i(t)$ 与 t 轴所围成的位于 t 轴上方的区域的面积, T_i^- 表示曲线 $(c-\tau^m)\tilde{g}_i(t)$ 与 t 轴所围成的位于 t 轴下方的区域的面积. 如果

$$h_i(t)=\frac{(a+2pT-t)^{\alpha_i-1}}{c-t^m},$$

则

$$m_i = \frac{(2pT)^{\alpha_i - 1}}{c - a^m},\ M_i = \frac{(2pT - 2T)^{\alpha_i - 1}}{c - (a + 2T)^m}.$$

于是,式(20)可以写成

$$\frac{(2pT)^{\alpha_i - 1}}{c - a^m} T_i^+ - \frac{(2pT - 2T)^{\alpha_i - 1}}{c - (a + 2T)^m} T_i^- \leqslant \int_a^{a+2T} h_i(\tau)(c - \tau^m)\tilde{g}_i(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant$$
$$\frac{(2pT - 2T)^{\alpha_i - 1}}{c - (a + 2T)^m} T_i^+ - \frac{(2pT)^{\alpha_i - 1}}{c - a^m} T_i^-,\qquad i = 1,2,\cdots,n. \tag{22}$$

由式(22)和引理1,可得

$$\begin{cases} \dfrac{(2pT)^{\alpha_i - 1}}{c - a^m} T_i^+ - \dfrac{(2pT - 2T)^{\alpha_i - 1}}{c - (a + 2T)^m} T_i^- \leqslant 0, \\ \dfrac{(2pT - 2T)^{\alpha_i - 1}}{c - (a + 2T)^m} T_i^+ - \dfrac{(2pT)^{\alpha_i - 1}}{c - a^m} T_i^- \geqslant 0. \end{cases} \tag{23}$$

即

$$\begin{cases} \dfrac{(2pT)^{\alpha_i - 1}}{(2pT - 2T)^{\alpha_i - 1}} T_i^+ - \dfrac{c - a^m}{c - (a + 2T)^m} T_i^- \leqslant 0, \\ \dfrac{(2pT - 2T)^{\alpha_i - 1}}{(2pT)^{\alpha_i - 1}} T_i^+ - \dfrac{c - (a + 2T)^m}{c - a^m} T_i^- \geqslant 0. \end{cases} \tag{24}$$

因为

$$\lim_{p\to\infty} \frac{(2pT)^{\alpha_i - 1}}{(2pT - 2T)^{\alpha_i - 1}} = 1,$$ 由式(24)可得

$$T_i^+ - \frac{c - a^m}{c - (a + 2T)^m} T_i^- \leqslant 0 \leqslant T_i^+ - \frac{c - (a + 2T)^m}{c - a^m} T_i^-. \tag{25}$$

而 $\int_a^{a+2T}(c - \tau^m)\tilde{g}_i(\tau)\mathrm{d}\tau = T_i^+ - T_i^-$, 代入式(25)可得

$$\begin{cases} \displaystyle\int_a^{a+2T}(c - \tau^m)\tilde{g}_i(\tau)\mathrm{d}\tau + T_i^- - \frac{c - a^m}{c - (a + 2T)^m} T_i^- \leqslant 0, \\ \displaystyle\int_a^{a+2T}(c - \tau^m)\tilde{g}_i(\tau)\mathrm{d}\tau + T_i^- - \frac{c - (a + 2T)^m}{c - a^m} T_i^- \geqslant 0. \end{cases} \tag{26}$$

即

$$\left(\frac{c - (a + 2T)^m}{c - a^m} - 1\right) T_i^- \leqslant \int_a^{a+2T}(c - \tau^m)\tilde{g}_i(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant \left(\frac{c - a^m}{c - (a + 2T)^m} - 1\right) T_i^-. \tag{27}$$

于是

$$\lim_{c\to\infty}\int_a^{a+2T}(c - \tau^m)\tilde{g}_i(\tau)\mathrm{d}\tau = 0, \tag{28}$$

$$\lim_{c\to\infty} c\int_a^{a+2T}\tilde{g}_i(\tau)\mathrm{d}\tau - \int_a^{a+2T}\tau^m\tilde{g}_i(\tau)\mathrm{d}\tau = 0. \tag{29}$$

由引理2,即可得

$$\int_a^{a+2T}\tau^m\tilde{g}_i(\tau)\mathrm{d}\tau = 0. \tag{30}$$

证毕.

引理4 如果式(10)和(19)成立,则

$$\int_a^{a+2T}(\tau-t_0)^m\tilde{g}_i(\tau)\mathrm{d}\tau=0,\qquad i=1,2,\cdots,n \tag{31}$$

对任意 $t_0\in(a,a+2T)$，$m\in\mathbf{N}\cup\{0\}$ 恒成立.

证明　由引理 2 和引理 3，式(31)显然成立.证毕.

定理 1　时不变分数阶系统(1)不存在反周期解.

证明　引入级数

$$\exp\left(-\frac{(\tau-t_0)^2}{b^2}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\tau-t_0)^{2k}}{b^{2k}k!}. \tag{32}$$

由引理 4，即得

$$\int_a^{a+2T}\frac{\exp(-(\tau-t_0)^2/b^2)}{b\sqrt{\pi}}\tilde{g}_i(\tau)\mathrm{d}\tau=0,\qquad i=1,2,\cdots,n, \tag{33}$$

其中，$t_0\in[a,a+2T]$，$b>0$.由 Gauss 函数性质知

$$\lim_{b\to 0^+}\frac{\exp(-(\tau-t_0)^2/b^2)}{b\sqrt{\pi}}=\delta(\tau-t_0), \tag{34}$$

其中，$\delta(t)$ 表示 Dirac(狄拉克) 函数.因此，当 $b\to 0^+$ 时，有

$$\int_a^{a+2T}\delta(\tau-t_0)\tilde{g}_i(\tau)\mathrm{d}\tau=0,\qquad i=1,2,\cdots,n. \tag{35}$$

又 $\tilde{g}_i(\tau)$，$i=1,2,\cdots,n$ 是连续函数，由上式即得 $\tilde{g}_i(t)=0$ 对任意 $t\in(a,a+2T)$ 恒成立.因此，$\tilde{g}_i(a)=f_i(\tilde{x}_1(a),\tilde{x}_2(a),\cdots,\tilde{x}_n(a))=0$，$i=1,2,\cdots,n$.这意味着，$(\tilde{x}_1(a),\tilde{x}_2(a),\cdots,\tilde{x}_n(a))$ 实际上是分数阶系统(1) 的不动点.因此，$\tilde{x}(t)=(\tilde{x}_1(t),\tilde{x}_2(t),\cdots,\tilde{x}_n(t))$ 是常值函数，这与定义 3 矛盾.证毕.

引理 5[12]　如果 $f(x)$ 满足 Lipschitz 条件，那么下述分数阶系统的解是记忆依赖的：

$${}^{\mathrm{C}}_{a}D^{\alpha}_{t}x=f(x),\ x(a)=x_a.$$

这意味着，上述方程的解 $\Psi(t,x_a)$，和下述方程：

$${}^{\mathrm{C}}_{b}D^{\alpha}_{t}y=f(y),\ y(b)=y_b\triangleq\Psi(b,x_a),\qquad b>a$$

的解 $\Psi(t,y_b)$，在 $t\geqslant b$ 上不一致.

反周期轨道是状态空间解，由于分数阶系统导数的记忆依赖性，为了获得反周期轨道，所有可记忆的解都应该被考虑进来.这样的话，分数阶系统导数上下限的差应该足够大.这意味着，为了检测到反周期解，分数阶系统导数的下限应当趋近于无穷大.

定理 2　当时不变分数阶系统(1)导数的下限趋近于±∞ 时，系统(1)存在反周期解.

证明　假设式(1)有一个 T- 反周期解 $x(t)$，则

$$x(t)=x(a)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{36}$$

$$x(t+2T)=x(a)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t+2T}(t+2T-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{37}$$

记 $\tau^*=\tau-2T$，式(37)即为

$$x(t+2T)=x(a)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a-2T}^{t}(t-\tau^*)^{\alpha-1}f(\tau^*+2T)\mathrm{d}\tau^*. \tag{38}$$

由于假设了系统(1)有一个 T- 反周期解，且系统又是时不变分数阶系统.因此，$x(t)=x(t+2T)$，$f(\tau^*+2T)=f(\tau^*)$.于是

$$x(t+2T)=x(a)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a-2T}^{t}(t-\tau^{*})^{\alpha-1}f(\tau^{*})\mathrm{d}\tau^{*}. \tag{39}$$

由式(36)和(39)得

$$x(t+2T)-x(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a-2T}^{a}(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{40}$$

当$f(\tau)\neq 0$时,应用$x(t)=x(t+2T)$可得式(40)的积分上下限相等,即$a=a-2T$.而$T\neq 0$,因此,必有$a\to\pm\infty$.证毕.

3 结　　论

尽管整数阶系统可以看做是一类特殊的分数阶系统,但是它们的动力学行为仍存在较大的差异.本文证明出了 Caputo 导数意义下的分数阶时不变系统在有限时间区间内不存在反周期解,而当分数阶导数的下限趋近于无穷时却存在反周期解.

参考文献(References):

[1] Butzer P L, Engels W, Wipperfürth U. An extension of the dyadic calculus with fractional order derivatives. further theory and applications[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 1986, **12A**(8): 921-943.

[2] Diethelm K, Ford N J. Analysis of fractional differential equations[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2002, **265**(2): 229-248.

[3] Tavazoei M S, Haeri M. Describing function based methods for predicting chaos in a class of fractional order differential equations[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2009, **57**(3): 363-373.

[4] Tavazoei M S, Haeri M. A proof for non existence of periodic solutions in time invariant fractional order systems[J]. *Automatica*, 2009, **45**(8): 1886-1890.

[5] Tavazoei M S. A note on fractional-order derivatives of periodic functions[J]. *Automatica*, 2010, **46**(5): 945-948.

[6] Yazdani M, Salarieh H. On the existence of periodic solutions in time-invariant fractional order systems[J]. *Automatica*, 2011, **47**(8): 1834-1837.

[7] Kaslik E, Sivasundaram S. Non-existence of periodic solutions in fractional-order dynamical systems and a remarkable difference between integer and fractional-order derivatives of periodic functions[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2012, **13**(3): 1489-1497.

[8] Rahimi M A, Salarieh H, Alasty A. Stabilizing periodic orbits of fractional order chaotic systems via linear feedback theory[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2012, **36**(3): 863-877.

[9] Wang J R, Fečkan M, Zhou Y. Nonexistence of periodic solutions and asymptotically periodic solutions for fractional differential equations[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2013, **18**(2): 246-256.

[10] Okochi H. On the existence of periodic solutions to nonlinear abstract parabolic equations[J]. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 1988, **40**(3): 541-553.

[11] Haraux A. Anti-periodic solutions of some nonlinear evolution equations[J]. *Manuscripta Mathematica*, 1989, **63**(4): 479-505.

[12] Okochi H. On the existence of anti-periodic solutions to nonlinear parabolic equations in noncylindrical domains[J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 1990, **14**(9): 771-783.

[13] Chen Y Q. Anti-periodic solutions for semilinear evolution equations[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2006, **315**(1): 337-348.

[14] Liu B W. Anti-periodic solutions for forced Rayleigh-type equations[J]. *Nonlinear Analysis: Real World*

Applications, 2009, **10**(8): 2850-2856.

[15] Liu A M, Feng C H. Anti-periodic solutions for a kind of high order differential equations with multi-delay[J]. *Communications in Mathematical Analysis*, 2011, **11**(1): 137-150.

[16] Liu Y J. Anti-periodic solutions of nonlinear first order impulsive functional differential equations[J]. *Mathematica Slovaca*, 2012, **62**(4): 695-720.

[17] Tian Y, Henderson J. Anti-periodic solutions of higher order nonlinear difference equations: a variational approach[J]. *Journal of Difference Equations and Applications*, 2013, **19**(8): 1380-1392.

[18] Ahmad B, Nieto J J. Existence of solutions for anti-periodic boundary value problems involving fractional differential equations via Leray-Schauder degree theory[J]. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 2010, **35**(2): 295-304.

[19] Ahmad B, Nieto J J. Existence of solutions for impulsive anti-periodic boundary value problems of fractional order[J]. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 2011, **15**(3): 981-993.

[20] Chen A P, Chen Y. Existence of solutions to anti-periodic boundary value problem for nonlinear fractional differential equations [J]. *Differential Equations and Dynamical Systems*, 2011, **19**(3): 237-252.

[21] Cernea A. On the existence of solutions for fractional differential inclusions with anti-periodic boundary conditions[J]. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 2012, **38**(1/2): 133-143.

[22] Kilbas A, Srivastava H M, Trujillo J J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* (*North-Holland Mathematics Studies 204*)[M]. Amsterdam: Elsevier, 2006.

On the Existence of Anti-Periodic Solutions in Time-Invariant Fractional Order Systems

YANG Xu-jun[1], SONG Qian-kun[2]

(1. *School of Information Science and Engineering*, *Chongqing Jiaotong University*, *Chongqing* 400074, *P.R.China*;

2. *School of Science*, *Chongqing Jiaotong University*, *Chongqing* 400074, *P.R.China*)

(Contributed by SONG Qian-kun, M. AMM Editorial Board)

Abstract: The anti-periodic solution problem makes an important characteristic of dynamics for nonlinear differential systems. In recent years, the anti-periodic solution problem in integer order nonlinear differential systems had been widely studied, while the anti-periodic solution problem in fractional order nonlinear differential systems had been preliminarily discussed. Other than the previous work, the existence of anti-periodic solutions in time-invariant fractional order systems was investigated. It is shown that although within a finite time interval the solutions do not show any anti-periodic behavior, when the lower limit of the fractional order derivative tends to infinity the anti-periodic orbits will be obtained.

Key words: fractional order calculus; fractional order system; anti-periodic solution

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(61273021)