

一种抑制激波计算中数值振荡现象的 双重小波收缩方法*

赵 勇¹, 宗 智^{2,3}, 王天霖¹

- (1. 大连海事大学 交通运输装备与海洋工程学院, 辽宁 大连 116026;
2. 大连理工大学 运载工程与力学学部船舶工程学院, 辽宁 大连 116024;
3. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

摘要: 在激波数值计算中,容易出现数值振荡的问题,振荡激烈时会掩盖真实解,为此提出了许多高精度复杂计算格式或采用人工粘性抑制数值振荡.从信号处理的角度,提出双重小波收缩方法,它能自适应提取激波数值振荡解中的真实物理解.先用局部微分求积法求解浅水波方程和理想流体 Euler 运动方程中的激波问题,发现其数值振荡现象严重,然后采用双重小波收缩方法对其处理,获得了无数值振荡解,它能准确捕捉激波的位置并且保持激波结构,相比于复杂的 Riemann(黎曼)求解格式,借助小波收缩方法,可以采用相对简单的计算格式如微分求积法求解激波问题.

关键词: 激波; 数值振荡; 小波收缩; 微分求积法; 浅水波方程; Euler 方程

中图分类号: O351 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.06.004

引 言

对激波问题求解容易发生数值振荡的问题,人们发展了各类复杂的数值方法,Godunov^[1]首先引入所谓的 Riemann 求解器,并应用于求解非线性双曲型守恒方程.为了提高计算效率, Roe 基于计算节点两侧的密度均方根,提出二阶精度的 Roe 数值方法^[2].在此基础上,又发展了 HLL 及 HLLC 方法^[3].这些工作主要集中在间断的捕捉方面,不可避免的引入了数值振荡.为了准确计算激波,人们发展了多种高阶精度复杂格式,这方面的贡献主要有 TVD^[4],ENO^[5]及 WENO^[6-7]等格式.

在传统工作之外,Shyy 等提出采用非线性收缩器的方法来抑制数值振荡问题^[8].该方法能有效地滤去短波振荡,但对长波振荡效果不佳.小波方法是一种先进的信号处理手段,通过小波分解,待分析信号能在序列尺度上实现正交分解,各尺度及局部位置的信息反映在相应的小波系数上,通过对小波系数进行相应的处理以实现信号分析的目的,比如滤波、去噪及提取相干结构信息等^[9-10].可以把包含数值振荡的解看成待分析信号,它由真实物理解 and 数值振荡两

* 收稿日期: 2014-01-21; 修订日期: 2014-02-06

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973 计划)(2013CB036101); 国家自然科学基金(51309040; 51379033; 51379025); 中央高校基本科研业务费专项资金(3132014318; 01780623)

作者简介: 赵勇(1981—),男,江西奉新人,博士(通讯作者. Tel: +86-411-84727985; E-mail: fluid@126.com).

部分构成,对其做小波收缩处理,过滤数值振荡部分,保留真实物理解。

基于这种认识,本文采用小波收缩的方法处理数值振荡解,并且基于激波问题的自身特征,提出双重小波收缩方法,处理浅水波方程及理想流体运动 Euler 方程中的激波数值振荡解。借助于双重小波收缩,可以采用相对简单的数值方法,如本文运用的 LDQ 方法^[11],获得振荡的数值解,之后对其采用双重小波收缩方法得到准确解。本文第 1 节详细介绍双重小波收缩方法;第 2 节简单介绍浅水波方程及 Euler 方程,并给出具体问题的初边界条件及相应的计算参数;第 3 节介绍了数值结果;最后一节归纳了研究结论。

1 双重小波收缩方法

小波分析发展于上世纪八十年代,它是 Fourier(傅立叶)分析发展历程中的一个重大突破。作为一种先进的数学分析工具,目前已广泛应用于信号分析^[10]、偏微分方程数值求解^[12-15]及湍流数值模拟等^[16-20]。如果小波函数 ψ 满足以下关系:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) x^m dx = 0, \quad m = 0, 1, \dots, M - 1. \quad (1)$$

则 M 称为小波消失矩, L 与 M 密切相关,对 Daubechies 小波,有 $L = 2M$ 。若函数在某一有限区间外恒等于 0,则称该函数为有限支撑的(或称为紧支的)。 L 或 M 反映了小波函数和尺度函数的光滑性,它们的值越大,函数越光滑,缺点是支撑长度也同时变大。Daubechies 小波是一类很重要的正交有限支撑小波^[21],广泛应用于信号分析及数值计算领域,该类小波表达式没有显式表达式,由尺度方程迭代得到。图 1 是一阶消失矩及二阶消失矩小波,简称为 DB1 和 DB2,在双重收缩方法中将用到它们。

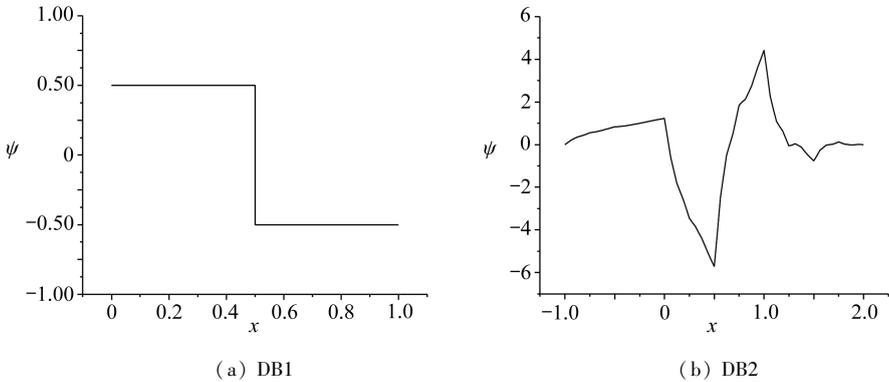


图 1 Daubechies 小波函数

Fig.1 Daubechies wavelet functions

借助于小波基函数及尺度函数,任意平方可积函数 $f(x)$ 可分解在系列子空间 $V_j(j_0 \leq j \leq J)$ 上, j_0, J 分别为最大空间尺度(网格粗糙)和最小空间尺度参数(网格精细),有小波分解表达式如下:

$$f(x) \equiv f_j(x) = \sum_k c_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(x), \quad (2)$$

其中尺度系数 $c_{j_0,k}$,小波系数 $d_{j,k}(j_0 \leq j \leq J - 1)$ 可通过 Mallat 快速算法获得^[22]。对原始小波系数做处理后,获得新的小波系数 $\tilde{d}_{j,k}(j_0 \leq j \leq J - 1)$,由此获得小波分析处理后的函数 $f(x)$ 表达式如下:

$$f_j(x) \approx \sum_k c_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_k \tilde{d}_{j,k} \psi_{j,k}(x). \quad (3)$$

小波分析方法可以推广到多维空间,本文以二维为例,二维空间的小波基函数为

$$\begin{cases} \varphi_{j,kl}(x,y) = \varphi_{j,k}(x) \varphi_{j,l}(y), \\ \psi_{j,kl}^\mu(x,y) = \begin{cases} \psi_{j,k}(x) \varphi_{j,l}(y), & \mu = 1, \\ \varphi_{j,k}(x) \psi_{j,l}(y), & \mu = 2, \\ \psi_{j,k}(x) \psi_{j,l}(y), & \mu = 3, \end{cases} \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\varphi_{j,kl}(x,y)$ 为尺度基函数, $\psi_{j,kl}^\mu(x,y)$, $\mu = 1, 2, 3$ 分别表示水平方向、竖直方向及对角线方向的小波基函数. 同样, 经过小波系数处理后, 二维函数 $f(x,y)$ 有近似小波表达式:

$$f(x,y) \approx \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} \sum_{l=0}^{2^{j_0}-1} c_{j_0,kl} \varphi_{j_0,kl}(x,y) + \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{l=0}^{2^j-1} \sum_{\mu=1}^3 d_{j,kl}^\mu \psi_{j,kl}^\mu(x,y). \quad (5)$$

小波分析的关键问题落实在小波系数的处理上, 根据具体问题及实现目标, 有相应的处理方法. Donoho 等在做信号处理中, 对包含未知相干结构及未知噪音的信号, 基于信号自身统计分析提出自适应的小波收缩方法, 提取出其中蕴含的相干结构^[23]. 受文献[23]启发, 本文把数值振荡看成是未知噪音, 真实的激波解是蕴含在其中的相干结构, 小波收缩方法的目的就是要自动提取出相干结构. Donoho 等在文中指出, 所采用的小波基函数与相干结构, 两者光滑程度越接近, 相干结构的重构效果越好^[23]. 由此可知, 激波问题有完全间断(或者说零阶光滑)的冲击波以及伴有连续但不可导(一阶光滑)的稀疏波, 如果采用同等光滑程度的小波基函数来提取它们, 重构效果理应是最佳的. 基于这种认识, 选用两种光滑程度的小波基函数, 即 DB1 和 DB2 分别提取冲击波和稀疏波. 为此, 在 Donoho 小波收缩的基础上^[23], 本文提出双重小波收缩方法自适应的过滤数值振荡, 提取真实的激波物理解, 它的小波系数处理流程如下:

1) 首先采用 LDQ 方法获得某一时刻 N 个节点上的数值振荡解, 对其做 DB2 小波分解, 获得小波系数 $d_{j,k}$, $j_0 \leq j \leq J-1$, $1 \leq k \leq 2^j$.

2) 设定各尺度 j 的自适应小波系数阈值 $t_j = \sigma_j \sqrt{2 \ln(N_j)} / N_j$, 其中 σ_j 是各自尺度 $d_{j,k}$ 的标准差, N_j 为小波系数个数, 即 $N_j = 2^j$.

3) 按本准则对原始小波系数 $d_{j,k}$ 做收缩处理, 得到 $\tilde{d}_{j,k}$:

$$\tilde{d}_{j,k} = \begin{cases} \text{sgn}(d_{j,k}) (|d_{j,k}| - t_j), & |d_{j,k}| > t_j, \text{sgn 表示取 } d_{j,k} \text{ 的正负号,} \\ 0, & |d_{j,k}| \leq t_j. \end{cases}$$

4) 通过处理后的小波 $\tilde{d}_{j,k}$ 按重构公式(7)提取出相干结构.

5) 以上步骤用 DB1 重复一遍, 获得双重小波收缩后的激波数值解, 进入下一时刻.

根据 Mallat 快速算法, 以上计算量为 $2N \cdot \ln N$ 运算次数, 计算量增加很少.

2 控制方程及相关计算参数

2.1 一维浅水波方程

一维浅水波控制方程(SWEs)如下^[24]:

$$U_t + F(U)_x = \mathbf{0}, \quad (6)$$

$$U = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}, \quad F(U) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + gh^2/2 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

其中 $h(x,t) \geq 0$ 表示水深, $u(x,t)$ 表示流向平均水深, g 是重力加速度. 许多流动现象都可用

浅水波方程描述,如海岸潮汐流、涌浪、河坝决堤等^[25]。本文用它计算一维溃坝模型,水渠长 $L = 2\,000\text{ m}$,初始条件为

$$\begin{cases} u(x,0) = 0, \\ h(x,0) = \begin{cases} 10, & 0 \leq x \leq 1\,000\text{ m}, \\ 5, & 1\,000\text{ m} < x \leq 2\,000\text{ m}. \end{cases} \end{cases} \quad (8)$$

在 $t = 0$ 时刻突然溃坝,结果是冲击波向下游传播,而稀疏波往上游传播,本文要模拟这种情况下的水深变化情况,该情况下有解析解,可参见文献[24]。LDQ 方法中取 $m = 5$ 个相邻节点计算空间导数;时间积分用四阶 Runge-Kutta(龙格-库塔)递进,步长 $\Delta t = 0.05\text{ s}$ 。计算区域取均匀节点 $N = 256$ 个,在双重滤波方法中,小尺度参数 $J = 8$,大尺度参数 $j_0 = 3$ 。

2.2 一维 Euler 方程

一维理想流体运动 Euler 方程如下:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(u(E + p))}{\partial x} = 0, \quad (11)$$

其中 ρ , u , E , p 分别表示气体的密度、速度、单位质量能量及压力。在此基础上,补充状态方程如下:

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho u^2 \right), \quad (12)$$

比热系数 $\gamma = 1.4$,计算区间 $-15\text{ m} \leq x \leq 15\text{ m}$,设置初始条件为

$$(\rho, \rho u, E)^T = \begin{cases} (2, 0, 3)^T, & -15\text{ m} \leq x \leq 0, \\ (1, 0, 1.5)^T, & 0 < x \leq 15\text{ m}. \end{cases} \quad (13)$$

这是一个典型的气体激波管问题,有解析解,可参见文献[3]。LDQ 方法中取 $m = 5$ 个相邻节点计算空间导数;时间积分用四阶 Runge-Kutta 递进,步长 $\Delta t = 0.005\text{ s}$ 。计算区域取均匀节点 $N = 512$ 个,在双重滤波方法中,小尺度参数 $J = 9$,大尺度参数 $j_0 = 3$ 。

2.3 二维 Euler 方程

为验证双重小波收缩的多维处理情况,计算一个二维算例,二维理想气体 Euler 方程如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho v u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(E + p)u}{\partial x} + \frac{\partial(E + p)v}{\partial y} = 0, \\ p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho u^2 - \frac{1}{2} \rho v^2 \right). \end{cases} \quad (14)$$

初始条件设置为

$$(\rho, \rho u, \rho v, E)^T = \begin{cases} (2, 0, 0, 3)^T, & \sqrt{x^2 + y^2} \leq 10 \text{ m}, \\ (1, 0, 0, 1.5)^T, & 10 \text{ m} < \sqrt{x^2 + y^2} \leq 20 \text{ m}. \end{cases} \quad (15)$$

同样, LDQ 方法中取 $m = 5$ 个相邻节点计算空间导数; 时间积分用四阶 Runge-Kutta 递进, 步长 $\Delta t = 0.005 \text{ s}$. 计算区域取均匀节点 512×512 个, 在双重滤波方法中, 小尺度参数 $J = 9$, 大尺度参数 $j_0 = 3$.

3 数值结果

首先, 仅采用 LDQ 方法计算算例 2.1(2.1 小节) 和算例 2.2(2.2 小节). LDQ 方法由本文作者宗智^[11] 提出, 并拓展到许多问题的数值计算, 详细情况可参见其专著[26]. 算例 2.1 中水深 h 在时刻 $t = 50 \text{ s}$ 时的分布如图 2 所示. 可见数值解的数值振荡幅度很大, 随着时间继续累积, 会导致数值发散的程度. 数值振荡幅度最大的地方发生在冲击波的后端, 在稀疏波及冲击波的前沿, 数值振荡也很明显.

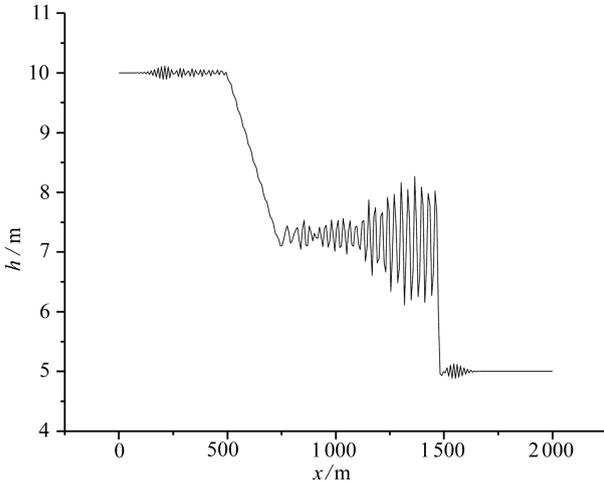


图 2 仅用 LDQ 方法在时刻 $t = 50 \text{ s}$ 时的水深分布

Fig.2 Numerical results of water depth only with the LDQ method at $t = 50 \text{ s}$

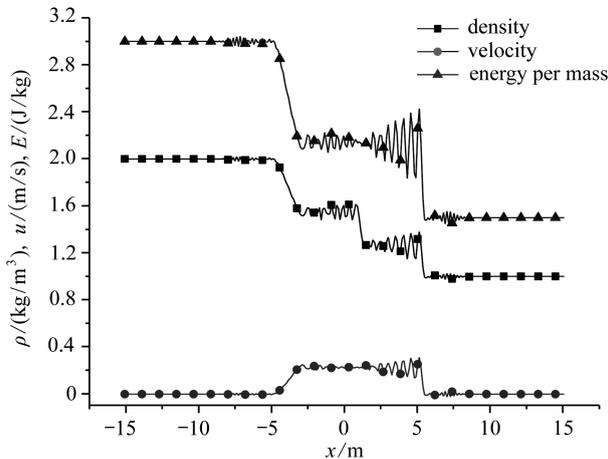


图 3 仅用 LDQ 方法在时刻 $t = 5 \text{ s}$ 时的数值解

Fig.3 Numerical results at $t = 5 \text{ s}$ only with the LDQ method

算例 2.2 中,仅采用 LDQ 方法在时刻 $t = 5 \text{ s}$ 时的密度、速度及单位质量的能量分布如图 3 所示.可见,密度、速度及单位质量的能量在冲击波的后端数值振荡幅度都是最大的,单位质量的能量分布在稀疏波两端及冲击波前沿都有明显的振荡,密度在接触间断点前后及冲击波前沿都有明显的振荡,速度在冲击波前沿有轻微的振荡.可见,仅采用 LDQ 方法,数值振荡很严重,掩盖了真实激波解.

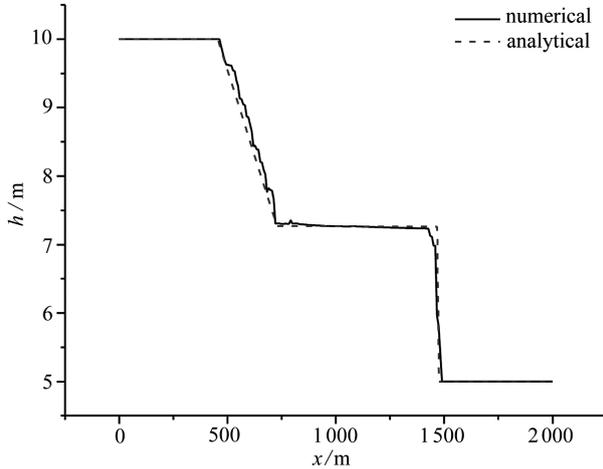


图 4 采用双重小波收缩后在 $t = 50 \text{ s}$ 时刻水深数值结果与相应的解析解的比较

Fig.4 Water depth comparison between analytical solution and numerical result from the dual wavelet shrinkage procedure at $t = 50 \text{ s}$

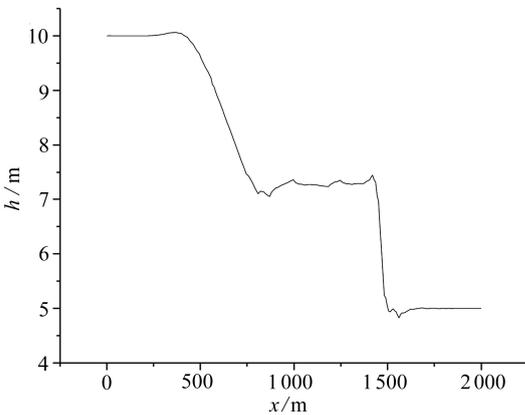


图 5 仅用 DB2 收缩在 $t = 50 \text{ s}$ 时刻的水深分布

Fig.5 Water depth along the channel calculated only with the DB2 method

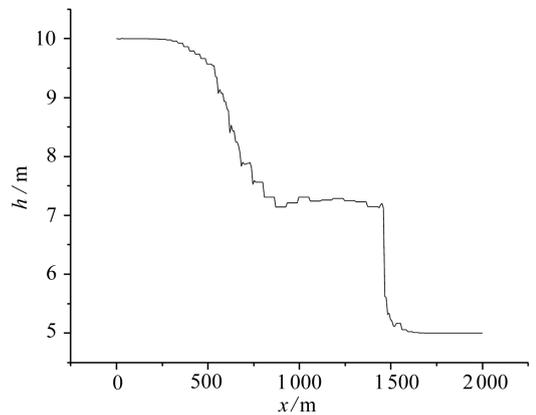


图 6 仅用 DB1 收缩在 $t = 50 \text{ s}$ 时刻的水深分布

Fig.6 Water depth along the channel calculated only with the DB1 method

通过以上两个算例发现,相对简单的数值格式 LDQ 方法计算激波问题,数值振荡现象十分明显,有必要引入双重小波收缩方法.在算例 2.1 中,在 LDQ 获得的数值结果的基础上,做双重小波收缩处理,得到的结果如图 4 所示.由图 4 可见,与解析解相比,处理后的结果不再出现数值振荡相问题,并且能保持冲击波的间断结构.除了在稀疏波内及冲击波后端有小量逼近误差,其它区域与精确解吻合非常良好,这种表现在激波数值计算中是非常难得的.

为了说明双重滤波效果,仅采用 Donoho 提出的单一小波收缩方法.采用 DB2 小波基函数

处理,算例 2.1 在时刻 $t = 50 \text{ s}$ 时的水深函数如图 5 所示.数值振荡滤波效果也很明显,但与图 4 相比,它对冲击波的大梯度结构有些抹平负作用,且它在稀疏波的右端引入较为明显的逼近误差,其形状与 DB2 函数相似,这种现象与 Donoho 指出的重构误差与选用的小波基函数形状是一致的.

同样,对算例 2.1 仅采用 DB1 小波基函数收缩处理,结果如图 6 所示.它的优点是能保持冲击波大梯度结构,但缺点也很明显.在稀疏波内及冲击波后端,导致明显的阶梯状逼近误差.

对算例 2.2,在 LDQ 方法的基础上,采用双重小波收缩方法处理振荡数值结果,在 $t = 5 \text{ s}$ 时刻密度、速度和压力以及它们的解析解如图 7 所示.从图可见,处理后的数值结果不再出现数值振荡现象,除了在密度函数的接触间断点处有些小误差,其余位置重构效果良好,不但能准确地捕捉冲击波及稀疏波的位置,且能保持冲击波的大梯度结构.

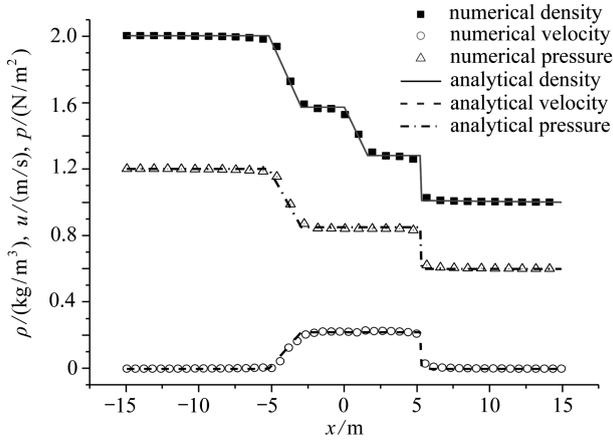


图 7 采用双重小波收缩后在 $t = 5 \text{ s}$ 时刻数值解与相应的解析解的比较

Fig.7 Comparison of numerical results from the dual wavelet shrinkage procedure with the corresponding analytical solutions at $t = 5 \text{ s}$

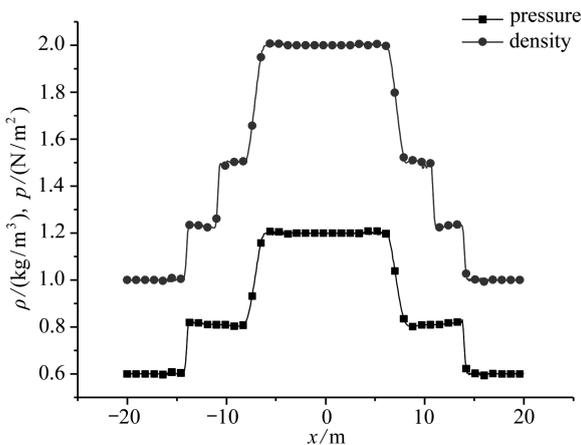


图 8 采用双重小波收缩后 $y = 0$ 位置处 $t = 3.75 \text{ s}$ 时刻压力、密度的数值解

Fig.8 Numerical results of density and pressure at $y = 0$ and $t = 3.75 \text{ s}$ calculated with the dual wavelet shrinkage procedure

对算例 2.3(2.3 小节)中的二维激波情况,采用双重小波收缩方法处理后的压力、密度在 t

= 3.75 s时刻位于 $y = 0$ 位置的分布剖面如图 8 所示.由于是在直角坐标下计算圆形分布初始条件,会轻微影响对称性分布.图 8 显示,冲击波均匀向外传播,稀疏波均匀往外传播,冲击波过后,压力和密度都增加,稀疏波过后,压力和密度都减小,可见 $x = 0$ 两侧对称性保持良好.

通过算例 2.3,说明双重小波收缩方法在多维情况下对数值振荡的处理效果也是非常良好的.通过本节 3 个数值算例,并与解析解情况对比,可见双重小波收缩方法对激波数值计算中的数值振荡具有良好的自适应滤波效果,保留符合真实物理激波解的数值解.

4 结 论

本文提出双重小波收缩方法处理 LDQ 方法得到包含严重数值振荡的解,该方法能自适应地滤去数值振荡,保留符合真实激波中的冲击波及稀疏波.该方法选用 DB2 和 DB1 小波基函数,数学上分别是零阶光滑和一阶光滑,与激波中完全间断的冲击波和一阶连续的稀疏波完全吻合,所以双重小波收缩处理效果更佳.通过 3 个算例,分别是一维情况下的浅水波溃坝问题和一维及二维情况下理想气体激波管和激波面传播问题,双重小波收缩方法不但能捕捉冲击波及稀疏波的位置,且能保留准确的冲击波和稀疏波结构.借助于双重小波收缩方法,使得本文可以采用相对简单的 LDQ 数值计算格式就能获得高质量的激波解.

参考文献 (References):

- [1] Godunov S K. A difference scheme for numerical computation discontinuous solution of hydrodynamic equations[J]. *Matematicheskii Sbornik*, 1959, **47**(3): 271-306.
- [2] Roe P L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1981, **43**(2): 357-372.
- [3] Toro E F. *Riemann Solver and Numerical Methods for Fluid Dynamics*[M]. 2nd ed. Berlin: Springer, 1999.
- [4] Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws[J]. *Journal of Computational Physics*, 1983, **49**(3): 357-393.
- [5] Harten A, Engquist B, Osher S, Chakravathy R. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III[J]. *Journal of Computational Physics*, 1987, **71**(2): 231-303.
- [6] LIU Xu-dong, Osher S, Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1994, **115**(1): 200-212.
- [7] JIANG Guang-shan, SHU Chi-wang. Efficient implementation of weighted ENO schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, **126**(1): 202-228.
- [8] Shyy W, Chen M H, Mittal R, Udaykumar H S. On the suppression of numerical oscillations using a non-linear filter[J]. *Journal of Computational Physics*, 1992, **102**(1): 49-62.
- [9] Beylkin G, Coifman R, Daubechies I, Mallat S, Meyer L, Raphael A, Ruskai M B. *Wavelets and Their Application*[M]. Cambridge, Massachusetts: Jones and Bartlett, 1992.
- [10] Mallat S. *A Wavelet Tour of Signal Processing*[M]. 2nd ed. Academic Press, 1999.
- [11] ZONG Zhi, Lam K Y. A localized differential quadrature (LDQ) method and its application to the 2D wave equation[J]. *Computational Mechanics*, 2002, **29**(4/5): 382-391.
- [12] Qian S, Wiess J. Wavelets and the numerical solution of partial differential equations[J]. *Journal of Computational Physics*, 1993, **106**(1): 155-175.

- [13] Zong Z, Zhao Y, Zou W N. Numerical solution for differential evolutionary equation using adaptive interpolation wavelet method[J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2010, **27**(1): 65-69.
- [14] Vasilyev O V, Paolucci S, Sen M. A multilevel wavelet collocation method for solving partial differential equations in a finite domain[J]. *Journal of Computational Physics*, 1995, **120**(1): 33-47.
- [15] Vasilyev O V, Paolucci S. A dynamically adaptive multilevel wavelet collocation method for solving partial differential equations in a finite domain[J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, **125**(2): 498-512.
- [16] Farge M, Schneider K, Kevlahan N K R. Non-gaussianity and coherent vortex simulation for two-dimensional turbulence using an adaptive orthogonal wavelet basis[J]. *Physics of Fluids*, 1999, **11**(8): 2187-2201.
- [17] Farge M, Schneider K. Coherent vortex simulation (CVS), a semi-deterministic turbulence model using wavelets[J]. *Flow, Turbulence and Combustion*, 2001, **66**(4): 393-426.
- [18] Goldstein D E, Vasilyev O V. Stochastic coherent adaptive large eddy simulation method[J]. *Physics of Fluids*, 2004, **16**(7): 2497-2513.
- [19] Schneider K, Kevlahan N K R, Farge M. Comparison of an adaptive wavelet method and nonlinearly filtered pseudospectral methods for two-dimensional turbulence[J]. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 1997, **9**(3/4): 191-206.
- [20] 赵勇, 宗智, 邹文楠. 涡旋演化的小波自适应模拟[J]. *应用数学和力学*, 2011, **32**(1): 33-43. (ZHAO Yong, ZONG Zhi, ZOU Wen-nan. Numerical simulation of vortex evolution based on adaptive wavelet method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2011, **32**(1): 33-43. (in Chinese))
- [21] Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1988, **41**(7): 909-996.
- [22] Mallat S G. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1989, **11**(7): 674-693.
- [23] Donoho D L, Johnstone I M. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage[J]. *Journal of the American Statistical Association*, 1995, **90**(432): 1200-1224.
- [24] Stoker J J. *Water Waves*[M]. New York: Interscience Publishers, Inc, 1986.
- [25] Delis A I, Katsaounis Th. Relaxation schemes for the shallow water equations[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2003, **41**(7): 695-719.
- [26] ZONG Zhi, ZHANG Ying-yan. *Advanced Differential Quadrature Methods*[M]. Chapman & Hall/CRC, 2009.

A Dual Wavelet Shrinkage Procedure for Suppressing Numerical Oscillation in Shock Wave Calculation

ZHAO Yong¹, ZONG Zhi^{2,3}, WANG Tian-lin¹

(1. *Transportation Equipment and Ocean Engineering College,*

Dalian Maritime University, Dalian, Liaoning 116026, P.R.China;

2. *School of Naval Architecture, Dalian University of Technology,*

Dalian, Liaoning 116024, P.R.China;

3. *State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment,*

Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P.R.China)

Abstract: In the numerical calculation of shock waves, numerical oscillation often occurred and contaminated the real solution in serious cases. For the purpose of suppressing the numerical oscillation, various complicated numerical schemes or artificial viscosity methods had been applied. From the view of signal processing, a dual wavelet shrinkage procedure was formulated to extract the real solution hidden in the numerical solution with oscillation. The localized differential quadrature (LDQ) method was firstly used to solve the shock wave problems governed by the shallow water equations and Euler equations for ideal fluid flow, and heavy oscillation emerged in these cases, then the dual wavelet shrinkage procedure was employed to supplement the LDQ method and the results without numerical oscillation were obtained, in which not only the position of shock/rarefaction wave was captured but the shock wave structure well kept. Compared with the previous complicated schemes, the present procedure enables some relatively simple scheme such as the LDQ method to effectively solve the shock wave problems.

Key words: shock wave; numerical oscillation; wavelet shrinkage method; localized differential quadrature; shallow water equation; Euler equation

Foundation item: The National Basic Research Program of China (973 Program) (2013CB036101); The National Natural Science Foundation of China (51309040; 51379033; 51379025)