

# 空间各向异性弹性问题的二十节点理性单元\*

毛翎, 姚伟岸, 高强, 钟万勰

(大连理工大学 工程力学系; 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

(本刊编委钟万勰来稿)

**摘要:** 常规有限元方法的插值函数通常仅仅从数学层面上考虑单元的几何性质, 忽视了与物理问题相关的物性参数, 因此可能降低数值分析的效果. 理性有限元的构造方法与常规有限元法不同, 其插值函数使用的是控制微分方程解析解的线性组合, 求解过程是在物理域内直接列式, 对单元的应变场和应力场同时进行插值, 并在单元级别考虑分片实验的要求并直接进行修正, 最终形成与问题物性参数紧密相关的单元刚度阵. 该方法避免了传统方法对物理问题和数学问题的割裂, 可显著提高数值分析的稳定性和精度. 利用空间各向异性问题的基本解, 从最小势能原理出发, 构造出两种满足分片实验要求的二十节点理性块体单元. 数值算例表明, 所给出的理性单元不仅具有较高的求解精度, 而且具有良好的数值稳定性.

**关键词:** 一般各向异性; 理性有限元; 二十节点块体单元

**中图分类号:** O242.21      **文献标志码:** A

**doi:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.06.001

## 引 言

三维弹性问题的有限元计算中, 块体单元是一个最基本的单元. 1968年, 空间块体的等参单元<sup>[1]</sup>就已经被提出了, 它与平面问题等参元的提出基本是同时的<sup>[2]</sup>. 除了基于单变量变分原理的位移型有限元格式外, 基于多变量变分原理的杂交/混合元思想也很快被引入这一类型单元的构造, 如 Pian 等提出的控制零能模式的杂交元<sup>[3]</sup>、Punch 等提出的具备较高抗畸变能力的杂交元<sup>[4]</sup>和基于胡-鹭变分原理的混合元 RGD20<sup>[5]</sup>等.

钟万勰等在 1996 年提出了理性有限元法<sup>[6]</sup>, 它以最小势能原理为基础, 并将控制微分方程解析解的线性组合作为插值函数, 在单元级别考虑分片实验并进行修正. 这一方法舍弃了等参元技术, 将问题的位移场、应力场和应变场都视为基本解的叠加, 直接在物理域内列式, 同时对上述场变量进行插值, 避免了传统有限元方法对物理问题和数学问题的割裂, 具备更清晰的力学含义, 提高了场变量的数值精度和计算稳定性. 随后, 钟万勰和纪峥对其收敛性进行了证明<sup>[7]</sup>, 并改善了平面四节点单元基本解的选取, 将其推广至五节点元<sup>[8]</sup>, 王永富等还构造了各向同性问题的空间理性单元<sup>[9]</sup>.

\* 收稿日期: 2014-01-16; 修订日期: 2014-03-21

**基金项目:** 国家重点基础研究发展计划(973 计划)(2010CB832704); 国家自然科学基金(11372065)

**作者简介:** 毛翎(1982—), 男, 辽宁人, 博士生(E-mail: maolingcn@163.com);

高强(1978—), 男, 内蒙古人, 副教授, 博士(通讯作者. Tel: +86-411-84707608; E-mail: qgao@dlut.edu.cn).

材料的各向异性在实际问题中是普遍存在的,如生物力学<sup>[10]</sup>、断裂力学<sup>[11]</sup>、摩擦力学<sup>[12]</sup>等领域对此问题有着深刻而广泛的研究.由于复杂的物性参数,经典弹性力学中各向异性材料的解析解是很少的,只有极个别边界条件规整荷载简单的问题有解析解.在常规有限元中,材料的物性参数在构造单元形函数的时候,并不予以事先考虑,即材料的各向异性并不是作为一种需要考虑的约束条件预先在构造单元时进行考虑.从力学问题的层面看,这割裂了问题本身所具有的特殊性质,从而也会影响计算效果.理性有限元可避免传统方法对物理问题和数学问题的割裂,本文利用空间各向异性问题的基本解,从最小势能原理出发,构造出两种满足分片实验要求的二十节点理性块体单元.

## 1 基本方程和基本解

空间弹性问题在直角坐标系下用位移表示的平衡方程,即 Navier-Láme 方程为

$$\frac{1}{2} C_{ijkl} (u_{k,lj} + u_{l,kj}) = F_i, \tag{1}$$

其中  $i, j, k, l$  的取值范围均为 1, 2 和 3. 这里给出物理方程的刚度-柔度阵形式为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}, \\ \boldsymbol{\sigma} = \left\{ \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{zx} \quad \sigma_{xy} \right\}^T, \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \varepsilon_{yz} \quad \varepsilon_{zx} \quad \varepsilon_{xy} \right\}^T, \end{cases} \tag{2}$$

其中  $\mathbf{C}$  为刚度阵,其元素为  $C_{ij}(i, j = 1, 2, \dots, 6)$ ,  $\mathbf{D}$  为柔度阵,其元素为  $D_{ij}(i, j = 1, 2, \dots, 6)$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  为应力向量,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  为应变向量.

在求解满足平衡方程(1)对应齐次方程基本解的过程中,要充分考虑力学意义.如前 12 阶基本解中,第 1 到 6 项基本解对应的是刚体位移,而第 7 到 12 项基本解见表 1,它们表示的是均匀应力场解.更多高阶的基本解可以按照文献[13]的方法得到,这里略去其具体表达式.

表 1 空间各向异性问题的第 7 到第 12 项基本解

Table 1 The 7th to 12th fundamental solutions of 3D anisotropic elastic problems

$i$	$u_i$	$v_i$	$w_i$	$\boldsymbol{\sigma}_i$
7	$D_{11}x + D_{16}y + D_{15}z$	$D_{16}x + D_{21}y + D_{14}z$	$D_{15}x + D_{14}y + D_{13}z$	$[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$
8	$D_{12}x + D_{26}y + D_{25}z$	$D_{26}x + D_{22}y + D_{24}z$	$D_{25}x + D_{24}y + D_{23}z$	$[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$
9	$D_{13}x + D_{36}y + D_{35}z$	$D_{36}x + D_{23}y + D_{34}z$	$D_{35}x + D_{34}y + D_{33}z$	$[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$
10	$D_{14}x + D_{46}y + D_{45}z$	$D_{46}x + D_{24}y + D_{44}z$	$D_{45}x + D_{44}y + D_{34}z$	$[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$
11	$D_{15}x + D_{56}y + D_{55}z$	$D_{56}x + D_{25}y + D_{45}z$	$D_{55}x + D_{45}y + D_{35}z$	$[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$
12	$D_{16}x + D_{66}y + D_{56}z$	$D_{66}x + D_{26}y + D_{46}z$	$D_{56}x + D_{46}y + D_{36}z$	$[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$

## 2 二十节点理性单元的构造

有了上面的基本解,则理性单元  $\Omega$  内的位移场可由下式确定:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^k a_i u_i, \mathbf{v} = \sum_{i=1}^k a_i v_i, \mathbf{w} = \sum_{i=1}^k a_i w_i, \tag{3}$$

式中  $a_i$  为广义位移,  $u_i, v_i, w_i$  分别是插值函数即基本解中的位移解,  $k$  是基本解的个数.基本解的选取应当满足下列 3 个条件: 1) 基本解按坐标的升序排列; 2) 基本解的个数  $k$  大于或等于单元的自由度数; 3) 保证插值多项式的完备性.根据分析可知,在保证完备性的要求下,基本

解的个数  $k$  和基本解多项式的阶数  $n$  之间有关系:  $k = 3(n + 1)^2$ .

本文研究如图 1 所示的空间二十节点块体单元, 1~8 号节点位于单元的顶点处, 9~20 号节点位于单元的棱中点. 单元共有 60 个自由度, 所以基本解的阶数应取  $n = 4$ , 共需要 75 个基本解. 对应的应力场为

$$\begin{cases} \sigma_x = \sum_{i=1}^{75} a_i \sigma_{xi}, & \sigma_y = \sum_{i=1}^{75} a_i \sigma_{yi}, \\ \sigma_z = \sum_{i=1}^{75} a_i \sigma_{zi}, & \sigma_{yz} = \sum_{i=1}^{75} a_i \sigma_{yzi}, \\ \sigma_{zx} = \sum_{i=1}^{75} a_i \sigma_{zxi}, & \sigma_{xy} = \sum_{i=1}^{75} a_i \sigma_{xyi}. \end{cases} \quad (4)$$

使用最小势能原理, 单元变形能为

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{R} \mathbf{a} = \frac{1}{2} \mathbf{g}^T \mathbf{a}, \quad (5)$$

$\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_{75}]^T$ ,  $\mathbf{R}$  称为广义刚度阵, 它是一个对称阵, 联系着广义位移向量  $\mathbf{a}$  和广义内力向量  $\mathbf{g}$ , 即

$$\mathbf{g} = \mathbf{R} \mathbf{a}, \quad (6)$$

$\mathbf{R}$  的分块形式如下:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 63} \\ \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} \\ \mathbf{0}_{63 \times 6} & \mathbf{R}_{12}^T & \mathbf{R}_{22} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

其中,  $V$  为单元体积, 主对角元分块阵  $\mathbf{0}_{6 \times 6}$  对应于刚体位移解,  $\mathbf{R}_{11}$  对应于均匀应力场,  $\mathbf{R}_{22}$  对应于一阶及以上应力场. 上式中非  $\mathbf{0}$  分块阵的元素可通过式(5)的积分得到, 其中特殊的有

$$\mathbf{R}_{11} = \mathbf{V} \mathbf{D}. \quad (8)$$

这里略去了其它分块阵的具体表达式.

记二十节点块体单元节点位移向量为  $\mathbf{d}$ , 它是 60 维的列向量. 显然, 其维数小于  $k$  ( $k = 75$ ), 不匹配. 可以采用两种方法来解决这一问题. 第 1 种方法是按照一定的规律, 删去 4 阶基本解中任意的 15 个, 即只使用 60 个基本解, 使得  $\mathbf{T}$  阵成为方阵, 能够进行接下来的运算, 称这样的单元为 RD20. 对于 RD20 单元, 节点位移向量  $\mathbf{d}$  与广义位移向量  $\mathbf{a}$  之间的转换关系为

$$\mathbf{d} = \mathbf{T} \mathbf{a}, \quad (9)$$

其中  $\mathbf{T}$  为  $60 \times 60$  的转换矩阵. 将上式代入式(5), 可给出用节点位移向量  $\mathbf{d}$  表示的单元变形能密度为

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d}, \quad (10)$$

其中对应节点位移向量  $\mathbf{d}$  的单元刚度阵为

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^{-T} \mathbf{R} \mathbf{T}^{-1}; \quad (11)$$

而对应的节点力向量为

$$\mathbf{f} = \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{T}^{-T} \mathbf{g}. \quad (12)$$

但这种处理方法, 由于选择的基本解不完备, 可能使得单元具有方向性.

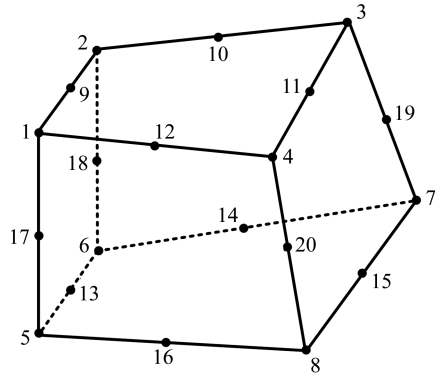


图 1 空间二十节点块体单元

Fig.1 A 20-node brick element

第2种方法是进行单元级别的内部凝聚,在单元形心处增加1个多余节点,在单元6个面中较大的4个面上各增加一个面心节点,即成为增广单元,其节点自由度数为75.将增广后的二十五节点单元的节点位移向量表示为

$$\mathbf{d}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{d}_m \end{bmatrix}, \quad (13)$$

其中 $\mathbf{d}_m$ 是增加的内部节点位移向量,是15维的列向量.增广后的单元节点自由度数正好等于 $k$ ,称这样的单元为RQ20.对于RQ20单元,需要将上面式(9)~(12)中的节点位移向量 $\mathbf{d}$ 替换为增广节点位移向量 $\mathbf{d}_c$ ,相应地,转换矩阵 $\mathbf{T}$ 和单元刚度阵 $\mathbf{K}$ 也要替换为 $\mathbf{T}_c$ 和 $\mathbf{K}_c$ ,它们都是75×75的矩阵.

对于以上两种单元RD20和RQ20,由于插值函数在单元边界上是非线性的,因此它们是无法通过分片实验的,需要对其进行修正.

### 3 分片实验与修正

本文采用文献[6]所提供的方法对单元进行修正,使其通过单元分片实验的要求.由于操作的类似性,以下过程均以RQ20单元的维数作为标准.对于RD20单元,只要将相应的维数变化即可.下面的分析中,除非有明显差异,对上节提到的 $\mathbf{T}$ 与 $\mathbf{T}_c$ , $\mathbf{K}$ 与 $\mathbf{K}_c$ 不再做区分.

单元分片实验的第1项要求是,当节点位移为刚体位移时单元内部不产生应力.设节点位移为刚体位移,根据单元的位移插值函数(3),显然可以得到 $a_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, 6)$ , $a_j = 0 (j = 7, 8, \dots, 75)$ .因此单元的应力插值函数自然地为0,即对刚度阵 $\mathbf{K}$ ,分片实验的第1项要求是通过的.

单元分片实验的第2项要求是,当单元上施加一均匀应力场 $\boldsymbol{\sigma}$ 时,其对应的单元边界力集约到节点上所形成的节点力向量 $\mathbf{f}^{(1)}$ 应当与通过式(12)得到的单元节点力向量 $\mathbf{f}$ 相同.但由于式(13)中存在逆阵,因此本文采用其等价形式,即要求节点力向量 $\mathbf{f}^{(1)}$ 通过转换矩阵得到的广义节点力向量 $\mathbf{g}^{(1)} = \mathbf{T}^T \mathbf{f}^{(1)}$ 与通过式(6)得到的单元节点力向量 $\mathbf{g}$ 相同.

为了使下面行文简单,将转换阵 $\mathbf{T}$ 按列分块为

$$\mathbf{T} = [\mathbf{T}_0 \quad \mathbf{T}_1 \quad \mathbf{T}_2], \quad (14)$$

其中 $\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1$ 和 $\mathbf{T}_2$ 的列数分别为6,6和63.

对于表1中6种均匀应力场,均各自对应一个广义位移向量,将这6个广义位移向量按列排列,表达为矩阵:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{0}_{6 \times 6} \quad \mathbf{I}_{6 \times 6} \quad \mathbf{0}_{6 \times 63}]^T, \quad (15)$$

它是一个75×6矩阵.它们对应的广义力向量的矩阵形式为

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}\mathbf{A} = [\mathbf{0}_{6 \times 6} \quad \mathbf{R}_{11} \quad \mathbf{R}_{12}]^T, \quad (16)$$

即 $\mathbf{R}$ 阵的第7到12列.

另一方面,由于施加给单元的是均匀应力场,则单元的位移场是线性的,那么单元的边界也是保持为线性的,因此可以按照线性插值的方式将单元的边界力集约到单元的节点上,得到单元的集约节点力向量 $\mathbf{f}^{(1)}$ ,记6种均匀应力场对应的集约节点力向量的矩阵形式为 $\mathbf{F}^{(1)}$ ,它是一个75×6矩阵.通过转换矩阵 $\mathbf{T}$ 就可以得到集约后广义力向量组合成的矩阵:

$$\mathbf{G}^{(1)} = \mathbf{T}^T \mathbf{F}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_0^T \mathbf{F}^{(1)} \\ \mathbf{T}_1^T \mathbf{F}^{(1)} \\ \mathbf{T}_2^T \mathbf{F}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

其中第 1 到 6 行对应于刚体位移,第 7 到 12 行对应于线性位移,可验证有

$$\mathbf{T}_0^T \mathbf{F}^{(1)} = \mathbf{0}_{6 \times 6}, \quad \mathbf{T}_1^T \mathbf{F}^{(1)} = \mathbf{D}\mathbf{V} = \mathbf{R}_{11}. \quad (18)$$

因此可知  $\mathbf{G}$  和  $\mathbf{G}^{(1)}$  前 12 列是相等的.但这两个向量从第 13 列以后其元素值一般是不相同的,这是由于二阶及其以上的位移插值函数在单元边界上无法保证单元协调造成的.

由于当前的单元不满足分片实验的第 2 个条件,因此需要修正.要使单元通过分片实验的第 2 项要求,显然应该要求  $\mathbf{G} = \mathbf{G}^{(1)}$ .为此应该修改变换矩阵  $\mathbf{T}$ ,使其满足

$$\mathbf{R}_{12}^T = \mathbf{T}_2^T \mathbf{F}^{(1)}, \quad (19)$$

即需要修改转换矩阵  $\mathbf{T}$  的第 13 到 75 列向量.修改方式是在原有的向量上叠加  $\mathbf{T}_1$ ,即修改后的  $\mathbf{T}_2$  为

$$\mathbf{T}'_2 = \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_1 \mathbf{X}, \quad (20)$$

式中  $\mathbf{X}$  是  $6 \times 63$  待定系数矩阵.将式 (20) 代入式 (19),整理后可得

$$\mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{X} = \mathbf{R}_{12}^T - \mathbf{T}_2^T \mathbf{F}^{(1)}. \quad (21)$$

求解上式,确定待定系数阵  $\mathbf{X}$  后再代入式 (19),即可得修正的转换阵为

$$\tilde{\mathbf{T}} = [\mathbf{T}_0 \quad \mathbf{T}_1 \quad \mathbf{T}'_2]. \quad (22)$$

将上式代入式 (12) 即可得到修正后的单元刚度阵  $\tilde{\mathbf{K}}$ , 即

$$\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{T}}^{-T} \mathbf{R} \tilde{\mathbf{T}}^{-1}, \quad (23)$$

它已经通过了单元分片实验的所有要求.

对于 RD20 单元,修正后的单元刚度阵  $\tilde{\mathbf{K}}$  就是最终的单元刚度阵.对于 RQ20 单元,最后要做的工作是消去多余的位移向量  $\mathbf{d}_m$ , 本文采用内部节点凝聚的方法来处理.为此将修正后的增广单元刚度阵  $\tilde{\mathbf{K}}_e$  按式 (13) 进行相应分块,则单元变形能密度可改写为

$$U_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{d}^T \\ \mathbf{d}_m^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{12}^T & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{d}_m \end{bmatrix}. \quad (24)$$

取  $\mathbf{d}_m$  使  $U_e$  最小,得到

$$\mathbf{d}_m = -\mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{12}^T \mathbf{d}. \quad (25)$$

将上式回代到式 (23),消去  $\mathbf{d}_m$  得

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{d}, \quad (26)$$

其中

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{12}^T, \quad (27)$$

$\bar{\mathbf{K}}$  就是对应二十节点块体单元 RQ20 的单元刚度阵.

单元节点力向量的生成与刚度阵组装、求解思路与传统有限元类似,不再赘述.求得节点位移后,再利用式 (9) 可给出单元的广义位移向量  $\mathbf{a}$ , 从而得到问题的位移场与应力场.

## 4 数值算例

**算例 1** 三维 Cook 悬臂梁. Cook 梁是由 Cook 在 1987 年提出的经典考题,主要用于考查在网格较粗情况下单元的计算精度.考虑如图 2 所示的变截面悬臂梁,厚度为 1 m,其余几何尺寸如图所示,单位为 m,坐标系为右手坐标系,端部受纵向纯弯曲荷载  $Q = 1$  kN 作用.各向同性

的物理参数为弹性模量  $E = 1 \times 10^{11}$  Pa, Poisson 比  $\mu = 0.33$ , 而各向异性的物理参数为

$$C = \begin{bmatrix} 2 & & & & & & \\ 0.3 & 2.2 & & & & & \text{sym} \\ 0.3 & 0.25 & 2.4 & & & & \\ 0.02 & 0.01 & 0 & 1 & & & \\ 0.02 & 0.01 & 0 & 0 & 1.1 & & \\ 0.02 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & \end{bmatrix} \times 10^{11} \text{ Pa} . \quad (28)$$

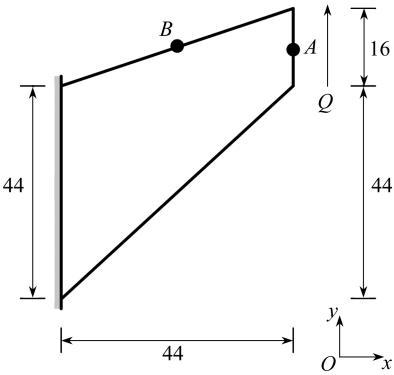


图2 Cook 梁模型  
Fig.2 The Cook beam model

计算  $A$  点纵向位移和  $B$  点的 Mises 应力, 以 ANSYS 划分 10 040 个单元的解作为参考解. 结果如表 2. 其中 RQ20 和 RD20 是本文提出的两种理性单元, Q20 是进行了减缩积分的 20 点等参元, 括号内表示的是相对误差. 从计算结果看, 随着网格的加密, 3 种单元的计算精度均有所提高. 在相同网格下, 与进行了减缩积分的 Q20 单元相比, 本文算法无需进行减缩积分, 仍具有较高的精度, 同时位移场和应力场精度相似, 而 Q20 单元的应力场精度要比位移场差一些. 这是因为本文算法是在位移场和应力场上同时插值, 而等参元 Q20 是只在位移场上插值造成的.

表2 算例 1 的计算结果

Table 2 The results of example 1

element type	mesh	isotropic		anisotropic	
		$w_A / m$	$\sigma_B / \text{MPa}$	$w_A / m$	$\sigma_B / \text{MPa}$
ANSYS result		0.164 8	1 627.22	0.073 92	1 627.98
RQ20	4×4×2	0.158 7(3.689 0%)	1 564.75(3.838 9%)	0.071 19(3.664 0%)	1 567.91(3.689 7%)
	6×6×3	0.159 6(3.127 3%)	1 574.70(3.127 4%)	0.071 60(3.112 0%)	1 575.25(3.238 6%)
	8×8×4	0.161 1(2.272 2%)	1 588.59(2.373 5%)	0.072 06(2.490 2%)	1 587.42(2.491 3%)
	10×10×5	0.162 3(1.501 0%)	1 600.55(1.638 4%)	0.072 87(1.393 3%)	1 605.29(1.393 5%)
RD20	4×4×2	0.158 2(3.994 8%)	1 561.85(4.016 9%)	0.070 83(4.147 5%)	1 560.32(4.155 7%)
	6×6×3	0.159 4(3.274 6%)	1 571.88(3.400 7%)	0.071 44(3.328 7%)	1 573.17(3.366 9%)
	8×8×4	0.160 3(2.751 3%)	1 581.25(2.824 9%)	0.071 85(2.772 3%)	1 581.65(2.845 8%)
	10×10×5	0.162 4(1.4259%)	1 602.51(1.518 5%)	0.072 83(1.445 2%)	1 603.80(1.485 0%)
Q20	4×4×2	0.151 0(8.378 2%)	1 458.84(10.347 6%)	0.067 46(8.706 9%)	1 440.99(11.485 9%)
	6×6×3	0.152 7(7.342 7%)	1 473.19(9.465 3%)	0.068 25(7.647 1%)	1 449.28(10.976 7%)
	8×8×4	0.155 0(5.955 3%)	1 481.77(8.938 7%)	0.069 17(6.400 3%)	1 470.84(9.652 7%)
	10×10×5	0.158 1(4.036 4%)	1 509.57(7.229 8%)	0.070 54(4.544 3%)	1 492.59(8.316 3%)

算例 2 细长三维悬臂梁的计算. 在常规的等参单元中, 长宽比较大的细长单元, 其计算精度往往很低, 只能通过纵向上增加网格密度来提高计算效率. 考虑细长梁的长度  $l = 20$  m, 高  $h = 1$  m, 宽  $b = 1$  m, 一端固定, 在长度方向上均匀地划分为  $n$  个网格. 在不同的网格密度下考查末端界面中心点在  $z$  向弯曲荷载下  $x$  方向位移  $u_{\text{end}}$  与 ANSYS 解 (划分 540 个单元) 的相对误



差,以考查算法对细长单元的适应性.物理参数由方程(28)给出.图3给出了不同的网格密度下使用RQ20单元和RD20单元计算得到的末端界面中心点位移的相对误差.算例表明,在 $n=4$ 的情况下,即单元长宽比在1:5的情况下,这两种单元仍然具有较好的计算精度.相反,在 $n=4$ 的情况下,应用Q20等参单元给出的计算结果完全不可靠,误差高达90%.这说明了在细长单元的情况下,理性有限元的计算精度仍然可以得到保证.

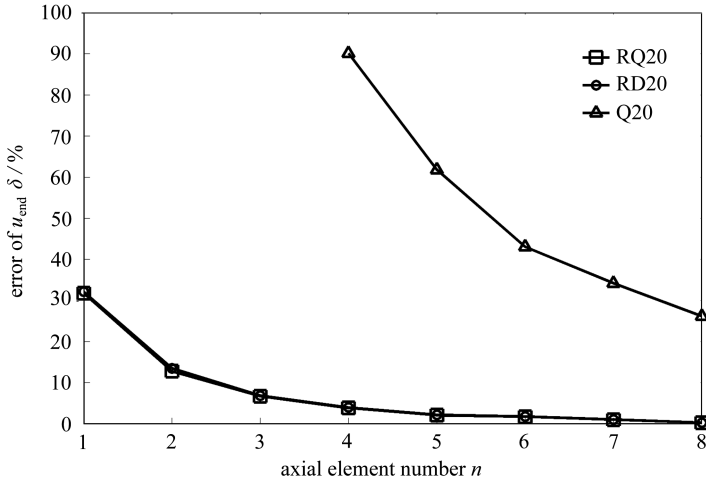


图3  $u_{\text{end}}$  的相对误差

Fig.3 The relative error of  $u_{\text{end}}$

## 5 结 论

作为一种依赖于微分控制方程基本解的有限元法,理性有限元法的插值函数具有明确的物理意义,其单元的构造是在物理域内直接列式,并在单元级别考虑分片实验的要求进行修正.本文通过理性推导,给出了空间一般各向异性理性有限元的构造框架,并具体实现了二十节点理性块体单元的构造.数值算例表明,本文所给出的理性单元具有较高的求解精度和良好的数值稳定性,并对网格畸变有很好的适应性,是相关问题数值分析的一种有效求解方法.本文的工作将理性有限元法进一步推广至空间各向异性问题.

事实上,本文的方法至少还可以向以下两个方向扩展,一是构造更具有针对性的单元,如薄/厚板单元和壳体单元等,二是从更弱化形式的多变量变分原理如HR变分原理和胡-鹭变分原理出发,推导相应形式的理性单元.这些将在余下的工作中进一步开展.

### 参考文献 (References):

- [1] Zienkiewicz O C, Taylor R L. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics* [M]. Burlington: Butterworth-Heinemann, 2005: 24-28.
- [2] Ergatoudis I, Irons B M, Zienkiewicz O C. Curved, isoparametric, "quadrilateral" elements for finite element analysis[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1968, 4(1): 31-42.
- [3] Pian T H H, Chen D. On the suppression of zero energy deformation modes[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1983, 19(12): 1741-1752.

- [4] Punch E F, Atluri S N. Development and testing of stable, invariant, isoparametric curvilinear 2-and 3-D hybrid-stress elements[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1984, **47**(3): 331-356.
- [5] Chen W, Cheung Y K. Three-dimensional 8-node and 20-node refined hybrid isoparametric elements[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992, **35**(9): 1871-1889.
- [6] 钟万勰, 纪峥. 理性有限元[J]. 计算结构力学及其应用, 1996, **13**(1): 1-8.(ZHONG Wan-xie, JI Zheng. Rational finite element[J]. *Computational Structural Mechanics and Applications*, 1996, **13**(1): 1-8.(in Chinese))
- [7] 钟万勰, 纪峥. 平面理性元的收敛性证明[J]. 力学学报, 1997, **29**(6): 676-685.(ZHONG Wan-xie, JI Zheng. The convergence proof of the plane rational finite element[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1997, **29**(6): 676-685.(in Chinese))
- [8] 纪峥, 钟万勰. 平面理性四节点及五节点四边形有限元[J]. 计算力学学报, 1997, **14**(1): 19-27.(JI Zheng, ZHONG Wan-xie. Rational plane quadrilateral four and five nodes finite elements[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 1997, **14**(1): 19-27.(in Chinese))
- [9] 王永富, 钟万勰. 空间理性八节点块体元[J]. 应用力学学报, 2003, **20**(3): 131-135.(WANG Yong-fu, ZHONG Wan-xie. A rational hexahedron 8-node finite element[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2003, **20**(3): 131-135.(in Chinese))
- [10] 王莹, 孙秀珍, 刘迎曦, 于驰, 张军, 于申. OSAHS 患者与正常人上呼吸道流场特性比较[J]. 大连理工大学学报, 2009, **49**(4): 476-481.(WANG Ying, SUN Xiu-zhen, LIU Ying-xi, YU Chi, ZHANG Jun, YU Shen. Comparisons of flow characteristics of upper airway between patients with OSAHS and normal adults[J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 2009, **49**(4): 476-481.(in Chinese))
- [11] 刘钧玉, 林皋, 杜建国. 基于 SBFEM 的多裂纹问题断裂分析[J]. 大连理工大学学报, 2008, **48**(3): 392-397.(LIU Jun-yu, LIN Gao, DU Jian-guo. Fracture analysis of multiple crack problems based on SBFEM[J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 2008, **48**(3): 392-397.(in Chinese))
- [12] Ozaki S, Hikida K, Hashiguchi K. Elastoplastic formulation for friction with orthotropic anisotropy and rotational hardening[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2012, **49**(3): 648-657.
- [13] 王华丽. 理性有限元插值函数的构造[J]. 教育教学论坛, 2010(23): 180-182, 185.(WANG Hua-li. The interpolation function construction of rational finite element [J]. *Education Teaching Forum*, 2010(23): 180-182, 185.(in Chinese))
- [14] Macneal R H, Harder R L. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy [J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1985, **1**(1): 3-20.



## 20-Node Rational Elements for 3D Anisotropic Elastic Problems

MAO Ling, YAO Wei-an, GAO Qiang, ZHONG Wan-xie  
(*State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment;  
Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology,  
Dalian, Liaoning 116024, P.R.China*)

(Contributed by ZHONG Wan-xie, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** For the conventional finite element method, only the geometry and node locations of elements were considered in the interpolation functions, while the physical parameters which reflect the key features of the physical problems were ignored, so its numerical performance may be not satisfying in some cases. The construction of the rational finite element method was different from that of the conventional finite element method. The linear combinations of the fundamental solutions to the problem's controlling differential equations were used as the interpolation functions, so the stress and strain fields were interpolated directly in the physical domain at the same time. The transfer matrix was modified at the element level to pass the patch test, and the resulting element stiffness matrix was related closely to the physical parameters of the problem. The rational finite element avoids the separation between the mathematical and physical aspects of a problem, so the stability and accuracy of numerical analysis could be improved significantly. Two kinds of 20-node rational brick elements based on the principle of minimum potential energy and satisfying the requirements of the patch test, were constructed according to the fundamental solutions to general 3D anisotropic problems. Numerical examples show that the rational elements give numerical results with not only high accuracy, but also good numerical stability.

**Key words:** general anisotropy; rational finite element; 20-node brick element

**Foundation item:** The National Basic Research Program of China (973 Program) (2010CB832704); The National Natural Science Foundation of China (11372065)