

基于径向基函数逼近的结构 动力响应计算方法*

徐绩青^{1,2}, 李正良³, 吴林键^{1,2}

- (1. 重庆交通大学 国家内河航道整治工程技术研究中心,
水利水运工程教育部重点实验室,重庆 400074;
2. 重庆交通大学 河海学院,重庆 400074;
3. 重庆大学 土木工程学院,重庆 400045)

(我刊编委陈飙松推荐)

摘要: 提出将“时间间隔”替换“空间距离”作为径向基函数的自变量,利用径向基函数逼近的思想,结合加权余量配点法,用于结构动力响应的数值分析.并且针对结构动力学的特点,发展了位移、速度、加速度联合插值的径向基函数表达式,提出了精密计算的概念和标准.根据实际算例表明,该方法对比传统的 Newmark 法、Wilson- θ 法、Runge-Kutta(龙格-库塔)法,在求解强刚性动力学方程,结构瞬态段的动力响应方面具有明显的优势,其计算精度与精细时程积分法相当.该方法与计算效率相关的动力特征矩阵,以及问题的自由度无关,因此针对大规模问题具有很好的适用性,是构建结构动力响应计算方法的新途径.

关键词: 径向基函数; 加权余量配点法; 结构动力学; 精细时程积分法

中图分类号: TV312 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.05.007

引 言

结构动力响应分析一直是学术界和工程界非常关心的课题,自从 20 世纪 70 年代初以来,其数值计算方法已广泛应用于工程实践.但这些方法的建立主要基于两个假设^[1]:

1) 不是刻意要求在任何时刻满足结构动力方程,而是在离散的时间间隔点上满足结构动力方程;

2) 在时间间隔 Δt 内,加速度、速度、位移反应按某种假定的规律变化.

直接积分方法,如差分方法(中心差分法, Houbolt 法),线性加速度法及改进的线性加速度法(Wilson- θ 法, Newmark 法, Hilbert 法),由于理论上的假设存在着明显的弊端,因此这些方法一般只具有一阶精度或二阶精度,精度不高(结构动力瞬态反应段的计算误差很大,其原因就在于加速度真实的变化根本不满足线性规律),尤其在高频阶段更是精度较低;另外,这些方法均具有算法阻尼,这种算法阻尼难以有效地控制,从而使计算结果产生较大的误差.对

* 收稿日期: 2014-03-07; 修订日期: 2014-04-08

基金项目: 重庆市教委科学技术研究项目(KJ100417)

作者简介: 徐绩青(1974—),男,重庆人,博士(通讯作者. E-mail: plappk@sina.com).

于结构动力的非线性反应,还存在所谓“切线刚度”或“割线刚度”带来的误差,即使用有迭代的切线刚度,时间间隔内的解答也不是准确的,因为结构动力方程不是在时间间隔内所有瞬时刻都得到满足^[2]。

鉴于传统数值计算方法的缺陷,我国的钟万勰院士在 1994 年提出精细时程积分法,由于其具有很高的计算精度和计算效率,这种新的逐步积分法引起了学术界的广泛关注.与精细积分相比,以往的逐步积分都是差分类的近似,谈不到计算机上的精确解之说.精细积分虽也有近似,但其误差已在计算机浮点数表示精度之外,所以说在合理的步长 η 范围内精细积分是不会发生稳定性和刚性问题的.需要指出的是:

1) 以上结论是在常系数微分方程,指数矩阵的范围之内的.以精细积分为基础,用于变系数方程,非线性动力方程等作数值计算,当然还要引进某种近似,例如摄动法等.由于这些近似,仍会产生一些问题,尚需继续实践探讨.

2) 对于实际工程中的大型结构,由于自由度数目多,而指数矩阵一般是满阵,导致其存储量及计算工作量大量增长,限制了精细积分法的应用.为了解决指数矩阵尺度太大带来的问题,钟万勰院士提出了子域精细积分法,既可利用精细积分法无条件稳定、精度高的优点,又有带宽小的好处.但对于具体的动力学问题,子域如何选取并无一般的经验可循,实际应用不太方便.

从目前工程应用的情况来看,精细积分法还不能完全取代传统的逐步积分法.能否找到一种结构动力响应分析的新方法,它既克服了传统数值计算方法理论上的不足,又具有较高的计算精度(不低于精细积分法),而且对于非线性动力反应、大型结构的计算又较精细积分法具有更广泛的适用性,这无疑是国内外相关研究领域的学者心目中理想的方法.

1 径向基函数方法介绍与算法思路

径向基函数^[3](radial basis function, RBF)是处理多元问题的一种有效方法.其实质是通过定义在 $[0, +\infty)$ 上的一元函数 ϕ 与 R^d 上的 Euclid(欧几里德)范数 $\|\cdot\|_2$ 来表示 d 元函数 $\phi = \phi(R_i)$,其中以点 x 到节点 x_i 的距离为自变量, $R_i = \|x - x_i\|_2$.RBF 具有形式简单、各向同性等优点,数学界已对其进行了大量的研究,成功地运用于多变量插值中.

人们欣赏径向基函数不仅因为它强烈的应用背景,而且因为它的重要优点:其表示与计算均非常简单(由一个给定的一元函数表示).另外,径向基函数子空间具有强大的逼近功能:径向基函数可以逼近几乎所有的函数.由于径向基函数的突出优点,某些从事应用数学研究的学者将它与加权余量法^[4]相结合,发展出一种微分方程数值解的新方法——无网格法^[5].这种方法已经在弹塑性静力学、气动弹性力学、流体力学中开始应用,并取得了良好的效果.但是,从目前国内外应用径向基函数求解微分方程的范围来看,他们都是为了解决微分方程边值问题(空间问题),其主要原因在于径向基函数定义“空间距离”(或与之相关的“2”范数)作为自变量,并未涉及到时间参数.不过笔者认为时间坐标与空间坐标在代数意义上并无本质区别,径向基函数既然能够逼近空间函数,那么同样也能够逼近时间函数,这就为求解微分方程初值问题(时间问题)奠定了理论基础.例如,求解时间区域 Ω 用 N 个节点 t_i (其中: $I = 1, 2, \dots, N$) 离散,位移函数 $u(t)$ 在区域 Ω 里边近似的函数 $u^h(t)$ 可以用各节点 t_i 为中心的径向基函数 $\phi_i(t)$ 表示为

$$u^h(t) = \sum_{j=1}^N a_j \phi_j(t) = \Phi^T(t) \mathbf{a}, \quad (1)$$

式中, a_j 是待定系数, 其中 $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_N]^T$; $\Phi(t) = [\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_N(t)]^T$. 式(1)有 N 个未知数, 规定近似函数 $u^h(t)$ 在节点 t_i 处的取值与函数 $u(t)$ 在相同节点处得到的值 u_i 相等, 即 $u^h(t_i) = u_i$, 可以得到 N 个线性方程组:

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{u}, \quad (2)$$

式中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \Phi^T(t_1) \\ \Phi^T(t_2) \\ \vdots \\ \Phi^T(t_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(t_1) & \phi_2(t_1) & \cdots & \phi_N(t_1) \\ \phi_1(t_2) & \phi_2(t_2) & \cdots & \phi_N(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(t_N) & \phi_2(t_N) & \cdots & \phi_N(t_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_N]^T.$$

由式(2)解出系数矩阵 \mathbf{a} , 将其代入式(1)可得

$$u^h(t) = \Phi^T(t)\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{N}(t)\mathbf{u}. \quad (3)$$

定义 \mathbf{A} 为动力特征矩阵, $\mathbf{N}(t)$ 为时间特征函数(类似于有限元中的形函数). 由于 $u^h(t)$ 是解析表达式, 故对其求一阶导数、二阶导数、三阶导数就可推出速度、加速度、急动度的表达式.(注: 急动度的概念已在混沌理论、非线性动力学、机械设计、高层建筑抗风抗震设计等领域得到应用, 传统的数值分析方法都不能计算出急动度.) 然后将其代入动力平衡方程, 再结合加权余量配点法, 在区域 Ω 内形成 N 个代数方程组(线性或非线性), 根据初始条件就可求解出 $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_N]^T$. 在计算过程中, 对时间间隔 Δt 内加速度、荷载的变化规律无须作出任何假设(精细积分法在求解非齐次方程时, 必须对时间间隔内的荷载变化规律作出某种线性或非线性假设), 所以比较传统的数值计算方法, 径向基函数逼近的方法在理论上更加完善, 而且动力特征矩阵 \mathbf{A} 仅与时间区域 Ω 有关, 却与自由度无关, 这就意味着计算大型结构时, 它又比精细积分法具有更广泛的适用性. 如果计算历时过长, 那么动力特征矩阵 \mathbf{A} 就较大, \mathbf{A}^{-1} 计算精度就成了计算速度、最后求解精度的关键所在^[6].

为了保持 \mathbf{A}^{-1} 具有较高的计算精度, 本文提出了精密计算的概念和标准: 设 \mathbf{A} 为 n 阶矩阵, \mathbf{B} 为 \mathbf{A} 的逆矩阵(计算机上的解), \mathbf{E} 为 n 阶单位阵, 运用 Frobenius(弗罗贝尼乌斯)范数: $F = (\|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} - \mathbf{E}\|_{\text{Fro}} + \|\mathbf{B}\cdot\mathbf{A} - \mathbf{E}\|_{\text{Fro}})/2$, 令矩阵求逆的相对误差 $\eta = F/n$, 若 $\eta < 0.001$ 即为精密计算. 通过数值实验发现, 如 $n < 300$, 选择适当的奇异值截断, 则 \mathbf{B} 一般都能达到精密计算的要求, 以 $\Delta t = 0.02$ s 为例, 计算历时 $t \leq 6$ s.

借鉴弹塑性静力学的区域分解法, 将计算时程分为若干区段, 以前一段计算终点的位移、速度、加速度作为后一段计算的初始条件, 然后把每段的方程组联立起来, 其系数阵为带状稀疏矩阵, 这也有利于大型、长历时问题的求解. 因为每一段动力特征矩阵 \mathbf{A} 并不大, 所以求逆的精度很高, 计算速度也较快. 当面对实际工程情况, 时间间隔 Δt 与计算分段还可以根据需要灵活调整.

2 结构动力学方程算法实施

以单自由度有阻尼体系对任意荷载的反应为例, 本文方法在结构动力学中实施过程如下:

- 1) 建立动力平衡方程: $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)$.
- 2) 确定计算历时 t 和时间间隔 Δt , 以及配点数目 $l = t/\Delta t + 1$.
- 3) 选择合适的紧支柱正定径向基函数^[7] $\phi(r)$, $r = (t - t_i)/d_i$, 其中 t_i 为各配点处的时刻,

t 为任意时刻, d_l 为各配点的支撑域半径(本文建议以配点处时刻为中心,覆盖整个计算区间),当 $r \geq 1$ 时, $\phi(r) = 0$.

4) 根据各配点时刻计算 l 阶动力特征矩阵 \mathbf{A} , 并求其 $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$.

5) 建立任意时刻 t 位移的径向基函数表达式: $u(t) = \Phi^T(t) \mathbf{B} \mathbf{u} = \mathbf{N}(t) \mathbf{u}$, 其中 $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_l]^T$, 表示各配点时刻的位移值.

6) 对任意时刻 t 位移的径向基函数表达式求一阶导数、二阶导数、三阶导数, 就分别推出任意时刻 t 的速度、加速度、急动度的表达式.

7) 将各配点时刻位移、速度、加速度的径向基函数表达式、外荷载的值代入动力平衡方程, 建立 l 个方程的线性方程组(注:如果是非线性结构体系,将构成非线性方程组),未知数向量为 $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_l]^T$.

8) 求解方程组,得到各配点时刻的位移值 $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_l]^T$, 将其代入相应的径向基函数表达式,就得到了任意时刻 t 位移、速度、加速度、急动度的解.

此处需要说明的是:

1) 因为考虑满足初始条件,所以第 1 个方程通常被初始条件代替.

2) 对于多自由度结构体系,每个自由度将按以上的步骤建立方程组,然后把每个方程组联立起来整体求解,其中动力特征矩阵 \mathbf{A} 仍然是 l 阶满阵,最后方程组的系数阵 \mathbf{C} 为 p 阶方阵(注: $p = l \times m$, m 是自由度,根据多自由度结构动力平衡方程组的特点, \mathbf{C} 为带状稀疏矩阵),未知数向量为 $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_{l \times m}]^T$, 求解之后就得到每个自由度各配点时刻的位移值.

3 算例分析

3.1 算例 1

在算例 1^[8]中考虑微分方程组的数值解,计算到 $t = 20$ s, 则

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -2000u_1 + 999.75u_2 + 1000.25, \\ \dot{u}_2 = u_1 - u_2, \\ u_1(0) = 0, u_2(0) = -2. \end{cases}$$

求得其特征矩阵的本征值 $\lambda_1 = -2000.5$, $\lambda_2 = -0.5$. 从计算结果上看,本征值相差如此大,是强刚性方程.其刚性比是 4001,远大于 10.对这个方程用 4 阶 Runge-Kutta 法计算,根据计算稳定性要求,时间步长最大只能取 0.00138,计算到 $t = 20$ s 需 14493 步.步数很多,计算量很大,还有误差积累.然而用精细积分法计算,不论在该时间段内划分多少段,总得 $u_1(20) = 0.9999319$, $u_2(20) = 0.9998638$,结果直逼解析解,非常精密.如果运用径向基函数逼近的配点法,取到 $t = 25$ s(根据笔者的经验,对于微分方程初值问题的求解,一般取要求计算历时为实际计算历时的 70% ~ 80% 比较合适),时间间隔 $\Delta t = 0.2$ s,配点数 $l = 126$,选用我国学者提出的紧支柱正定径向基函数^[7]: $\phi(r) = (1-r)^5(1+5r+9r^2+5r^3+r^4)$,插值表达式为式(1),计算效果如图 1 所示.

从图 1 中可以看出,数值解与解析解吻合得很好,

$$u_1(20) = 0.9999317, u_2(20) = 0.9998635,$$

其结果与精细积分法求解非常接近(注: $\eta = 2.85 \times 10^{-7}$,属于精密计算).由此可见,应用径向基函数逼近的思想求解微分方程初值问题,不仅实践上是可行的,而且效果上也不输于精细积分法.

3.2 算例 2

算例 2^[9]中的单层平面刚架(如图 2 所示)受简谐地面激励,柱距 12 m,层高 $h = 6$ m,钢柱为箱形截面,尺寸为 $460 \times 460 \times 1 \text{ mm}^3$,集中质量 $M = 72 \text{ 000 kg}$,阻尼比 $\xi = 0.02$,框架柱的侧向刚度 $k/2 = 12EI/h^3$,地面运动加速度 $\ddot{u}_g = g_0 \sin(\theta t)$, $g_0 = 0.1 \times 9.8 \text{ m/s}^2$, $\theta = 4\pi \text{ s}^{-1}$.初始条件为 $X(0) = \dot{X}(0) = 0$,动力平衡方程为

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_n\dot{u} + \omega_n^2u = -\ddot{u}_g, \tag{4}$$

式中, $\omega_n = 2\pi/T$, T 为结构自振周期.

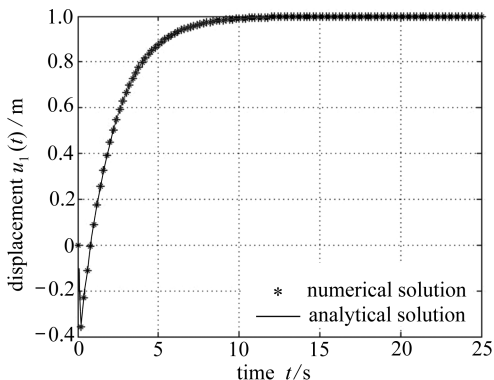


图 1 基于径向基函数的计算结果

Fig.1 Calculation results based on RBF

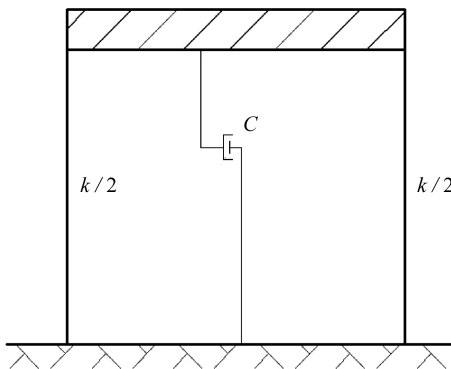


图 2 单层平面刚架结构示意图

Fig.2 Schematic of a single-storey plane rigid frame

针对结构动力反应的计算特点,加速度(位移的二阶导数)已成为主要的计算目标,而常规配点法的最大缺陷在于高阶导数会出现严重的数值振荡.为了有效地控制数值振荡,本文借鉴弹塑性静力学的处理方法,提出了位移、速度、加速度联合插值的径向基函数表达式:

$$u^h(t) = \sum_{j=1}^N a_j\phi_j(t) + b_1 \frac{d\phi_1(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2\phi_1(t)}{dt^2}. \tag{5}$$

式(5)与式(1)相比,增加了初始时刻径向基函数的一阶导数、二阶导数的线性组合,所以式(2)的 $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_N, v_1, v_2]^T$,其中 v_1, v_2 是附加未知量,配点法与此相对应,不但要满足结构动力平衡方程,而且还必须满足初始时刻的位移、速度、加速度,这样才能很好地消除数值振荡的影响,获得满意的结果.

本例单层平面刚架的自振周期 $T = 0.355 \text{ s}$,取 $\Delta t = 0.02 \text{ s}$,计算历时 $t = 3 \text{ s}$,应用 ANSYS 软件计算得到的自振周期为 $T = 0.356 \text{ s}$,说明 ANSYS 建模是正确的.精细积分法、解析解、ANSYS 的计算结果(瞬态反应阶段)如表 1.

表 1 柱顶位移反应峰值(简谐激励)

Table 1 Peak displacement response at the column top within the transient phase(harmonic excitation)

	precise integration method	ANSYS method	analytic solution
peak displacement u/m	-0.009 720	-0.010 13	-0.009 775
appeared time t/s	0.62	0.64	0.62

在瞬态反应阶段,ANSYS 的计算误差不仅有反应峰值,而且还有相位,这是传统数值计算方法的固有缺陷造成的.如果运用径向基函数逼近的配点法,取到 $t = 15 \text{ s}$,时间间隔 $\Delta t =$

0.02 s, 配点数 $l = 751$, 选用算例 1 的紧支柱正定径向基函数, 插值表达式为式 (5)。由此可得 $\eta = 0.0107$, 故不满足精密计算的标准。若采用区域分解法, 将计算历时分为两个区段 ($t_1 = 6$ s, $t_2 = 6$ s), 第一段 6 s 末的位移、速度、加速度作为后一段计算的初始条件, 然后把两段的方程组联立起来解。因为每一段的动力特征矩阵 \mathbf{A} 不大, 所以求逆的精度很高: $\eta = 8.82 \times 10^{-4}$, 达到了精密计算的要求。在实际工程计算中, 如果每一区段的计算历时、 Δt 都相同, 那么动力特征矩阵 \mathbf{A} 就是常量, 求逆矩阵运算只需一次, 不但精度很高, 而且无论总的计算历时有多长, 计算效率也是很高的。计算效果如图 3 所示。

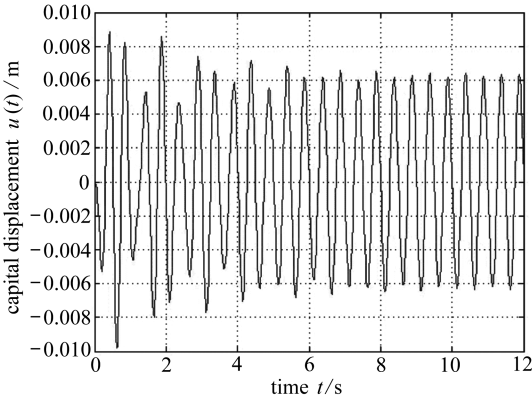


图 3 柱顶位移反应

Fig.3 Displacement response at the column top

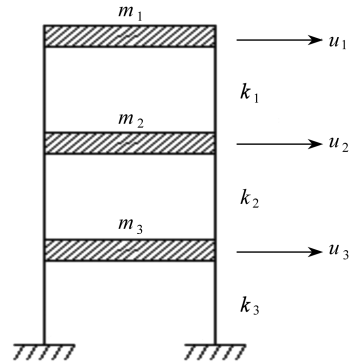


图 4 3 层剪切型框架结构

Fig.4 Schematic of three-storey shear frame

从图 3 可以看出, 柱顶位移反应峰值 $u(0.62) = -0.009823$ m, 其结果与解析解相差无几。

3.3 算例 3

算例 3^[5] 如图 4 所示的 3 层剪切型框架结构, 已知各楼层的质量 (包括柱子的质量) 自上到下分别为 $m_1 = 1.8 \times 10^5$ kg, $m_2 = m_3 = 2.7 \times 10^5$ kg, 各层的侧向刚度分别为 $k_1 = 9.8 \times 10^7$ N/m, $k_2 = 1.96 \times 10^8$ N/m, $k_3 = 2.45 \times 10^8$ N/m。假定结构阻尼为 Rayleigh 阻尼, 前两阶振型阻尼比 $\xi_1 = \xi_2 = 0.05$ 。如果系统的初始条件为 $(u(t) = 0, \dot{u}(t) = 0)$, 分别应用中心差分法、Newmark 法、Wilson- θ 法、精细积分法和径向基函数配点法计算框架结构在水平地震时的加速度 $\ddot{u}_g(t) = \cos t$ 作用下的动力反应 (图 5 为解析解)。

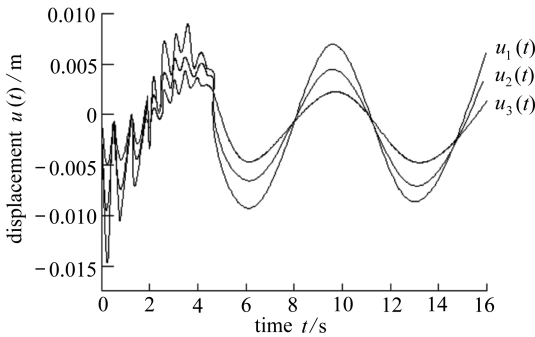


图 5 3 自由度系统的位移反应

Fig.5 Displacement response of the 3-DOF system

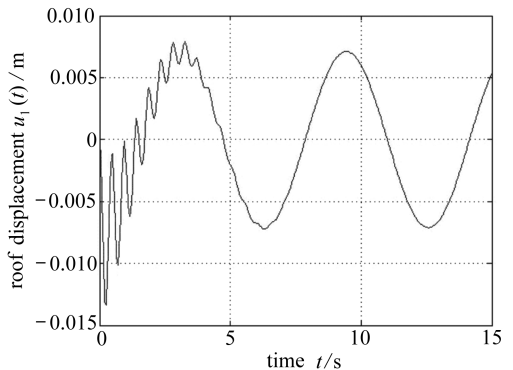


图 6 顶层位移反应

Fig.6 Roof displacement response

选用算例 1 的紧支柱正定径向基函数,插值表达式为式(5),取到 $t = 15$ s,由此可得计算效果如图 6 所示.而顶层位移反应的解析解与数值解结果如表 2 所示.

表 2 顶层位移反应的解析解与数值解(单位: m)

Table 2 Analytical solution and numerical solution of the roof displacement response(unit: m)

		$t = 1$ s	$t = 2$ s	$t = 5$ s	$t = 10$ s	$t = 12$ s
analytic solution		-0.001 29	0.002 651	-0.002 13	0.005 917	-0.006 020 0
central difference method	$\Delta t = 0.02$ s	-0.002 140 6	0.002 122 2	-0.002 068 6	0.005 910 8	-0.006 047 4
	$\Delta t = 0.01$ s	-0.001 688 2	0.002 419 1	-0.002 072 4	0.005 950 6	-0.006 191 9
Newmark method	$\Delta t = 0.02$ s	-0.000 381 38	0.003 390 2	-0.002 192 1	0.005 998 0	-0.005 974 8
	$\Delta t = 0.01$ s	-0.000 892 73	0.002 940 3	-0.002 101 1	0.005 991 8	-0.005 973 8
Wilson- θ method	$\Delta t = 0.02$ s	-0.000 052 55	0.004 063 6	-0.002 247 9	0.006 007 7	-0.005 973 5
	$\Delta t = 0.01$ s	-0.000 554 08	0.003 215 6	-0.002 149 6	0.005 994 6	-0.005 974 6
precise integration method	$\Delta t = 0.02$ s	-0.001 330 2	0.002 627 3	-0.002 047 1	0.005 989 9	-0.005 972 8
	$\Delta t = 0.01$ s	-0.001 330 2	0.002 627 3	-0.002 047 2	0.005 990 0	-0.005 972 9
the present method	$\Delta t = 0.05$ s	-0.001 274 1	0.002 654 4	-0.002 051 7	0.005 990 1	-0.005 973 1
	$\Delta t = 0.02$ s	-0.001 328 1	0.002 628 5	-0.002 047 3	0.005 990 2	-0.005 972 8

从表 2 可知(注:在 Newmark 法,取 $\gamma = 0.5, \beta = 0.25$;在 Wilson- θ 法,取 $\theta = 1.4$;在精细积分法,取 $N = 20$),传统算法的时间步长越小时,其数值解越接近解析解;它们的计算误差在瞬态反应衰减段内要比稳态反应阶段大一些,这是因为传统数值方法固有的理论缺陷.相比之下,精细积分法具有较大的计算优势.从径向基函数配点法的计算方案可以看出, $\Delta t = 0.05$ s, $\eta = 2.94 \times 10^{-4}$; $\Delta t = 0.02$ s, $\eta = 0.010 7$,它的计算效果与精细积分法相当.需要指出的是:虽然从理论上讲,配点数目越多,径向基函数的逼近效果越好,但实际计算中要受动力特征矩阵 \mathbf{A} 求逆精度的限制;如果配点过密造成 \mathbf{A} 过大,而使求逆精度明显降低,就会导致最终的计算精度反而下降.因此要进一步提高计算精度,就必须将计算历时分段处理,瞬态反应阶段配点密集一些,保证每段动力特征矩阵的求逆精度满足精密计算的要求.总之,必须考虑配点密度和动力特征矩阵求逆精度两者的综合影响,才能取得最好的计算效果.

4 结 论

通过以上的算例表明,本文方法相比传统的数值计算方法:

- 1) 在求解强刚性动力学方程,结构瞬态段的动力反应方面,理论上更加完善,具有明显的优势,其计算精度与精细时程积分法不相上下;
- 2) 对于多自由度问题,每个自由度对应的动力矩阵 \mathbf{A} 与时间步数相关,可适用于多种类型的动力学问题;
- 3) 在有关急动度的计算方面,本文方法具有优势.

综上所述,本文方法依托径向基函数强大的逼近能力,并结合加权余量法,有希望发展成为结构动力响应计算的通用方法.

参考文献(References):

- [1] 刘章军, 陈建兵. 结构动力学[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2012. (LIU Zhang-jun, CHEN Jian-bin. *Structural Dynamics* [M]. Beijing: China Water Conservancy and Hydropower

- Press, 2012.(in Chinese))
- [2] Chopra A K. *Dynamics of Structures; Theory and Applications to Earthquake Engineering* [M]. 1993.(影印版.第1版.清华大学出版社,2005).
- [3] 马利敏. 径向基函数逼近中的若干理论、方法及其应用[D]. 博士学位论文. 上海: 复旦大学, 2009.(MA Li-min. Some theory, methods and application in RBF approaching[D]. PhD Thesis. Shanghai: Fudan University, 2009.(in Chinese))
- [4] 徐次达, 陈学潮, 郑瑞芬. 新计算力学加权残值法——原理、方法及应用[M]. 上海: 同济大学出版社, 1997.(XU Ci-da, CHEN Xue-chao, ZHENG Rui-fen. *A New Computational Mechanics of Weighted Residual Method—Principle, Method and Application* [M]. Shanghai: Tongji University Press, 1997.(in Chinese))
- [5] 张雄, 刘岩. 无网格法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.(ZHANG Xiong, LIU Yan. *Meshless Method* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.(in Chinese))
- [6] 刘桂荣, 顾元通. 无网格法理论及程序设计[M]. 王建明, 周学军 译. 济南: 山东大学出版社, 2007.(LIU Gui-rong, GU Yuan-tong. *An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming* [M]. WANG Jian-ming, ZHOU Xue-jun transl. Jinan: Shandong University Press, 2007.(in Chinese))
- [7] 吴宗敏. 径向基函数、散乱数据拟合与无网格偏微分方程数值解[J]. 工程数学学报, 2002, 19(2): 1-12.(WU Zong-min. Radial basis function scattered data interpolation and the meshless method of numerical solution of PDEs[J]. *Journal of Engineering Mathematics*, 2002, 19(2): 1-12.(in Chinese))
- [8] 钟万勰. 应用力学的辛数学方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.(ZHONG Wan-xi. *Symplectic Mathematics Method in Applied Mechanics* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2006.(in Chinese))
- [9] 储德文. 结构动力响应的精细时程积分法研究[D]. 硕士学位论文. 北京: 北方交通大学, 2002.(CHU De-wen. Study on precise time interval integration method in structural dynamics response[D]. Master Thesis. Beijing: Northern Jiaotong University, 2002.(in Chinese))

A Calculation Method for Structural Dynamic Responses Based on the Approximation Theory of Radial Basis Function

XU Ji-qing^{1,2}, LI Zheng-liang³, WU Lin-jian^{1,2}

(1. *National Engineering Technology Research Center for Inland Waterway Regulation,
Key Laboratory of Hydraulic & Waterway Engineering of the Ministry of Education,*

Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, P.R.China;

2. *School of River & Ocean Engineering, Chongqing Jiaotong University,
Chongqing 400074, P.R.China;*

3. *College of Civil Engineering, Chongqing University,
Chongqing 400045, P.R.China)*

(Recommended by CHEN Biao-song, M. AMM Editorial Board)

Abstract: A new numerical calculation method for structural dynamic responses was proposed based on the approximation theory of radial basis function (RBF) and weighted residual collocation point method, with the time interval to replace the space distance as the independent variable of RBF for the first time. Aimed at the numerical characteristics of structural dynamics, a new RBF expression of joint interpolation combining displacement, velocity and acceleration was developed, and the concept and standard for precise calculation put forward. According to the numerical examples, the new method has significant advantages in solving strong stiff dynamic equations and structural transient-phase dynamic responses, compared with the Newmark method, Wilson- θ method and Runge-Kutta method. Its calculation accuracy is equivalent to that of the precise time-integration method. This new calculation method is independent of the computation efficiency-related dynamic eigen-matrix and the degrees of freedom of a problem. It has good applicability to some large-scale problems, and makes a promising way to the calculation of structural dynamic responses.

Key words: radial basis function; weighted residual collocation point method; structural dynamics; precise time-integration method