

# 基于时间有限元方法的旋转 柔性叶片动力学响应分析\*

王新栋<sup>1</sup>, 邓子辰<sup>1,2</sup>, 王艳<sup>1</sup>, 冯国春<sup>1</sup>

(1. 西北工业大学 工程力学系, 西安 710072;

2. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116023)

(本刊编委邓子辰来稿)

**摘要:** 将时间有限元方法引入到柔性多体系统的数值计算中,研究了旋转柔性叶片系统的刚-柔耦合响应问题.首先,基于非线性梁理论,建立了旋转柔性叶片系统的中心刚体-柔性梁模型,构造柔性叶片系统考虑一次近似耦合的 Lagrange 函数;其次,采用假设模态方法对空间坐标进行离散,建立系统的时间有限元格式;最后,通过数值实验,分析了柔性叶片的动力学响应.该方法直接构造了系统的离散积分格式,并自动保证了该格式是保辛的,因而具有较高的数值精度和稳定性.数值结果表明:时间有限元可以有效地求解旋转柔性叶片系统内低频大范围运动与高频弹性振动之间的刚-柔耦合问题.

**关键词:** 一次近似耦合; 假设模态; 时间有限元; 保辛

**中图分类号:** O241; V476.5      **文献标志码:** A

**doi:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.04.002

## 引 言

现代旋转机械的转速越来越快,叶片越来越长,柔性越来越大,对系统运行精度的要求也越来越高.传统的刚体系统动力学方法和采用小变形假设的建模方法越来越显现出其局限性.柔性叶片在工作的过程中,叶片的大范围旋转运动与弹性振动的相互耦合导致叶片的动力学响应是高度非线性的,属于柔性多体系统动力学的研究范畴<sup>[1]</sup>.

在柔性多体系统动力学中,普遍的做法是将旋转柔性叶片系统简化为中心刚体-柔性梁系统.针对这一系统,国内外学者开展了大量的研究.柔性多体系统的建模方法根据坐标系选取的不同,可以分为三类<sup>[2]</sup>:运动-弹性动力学(KED)法<sup>[3]</sup>、浮动坐标法和绝对坐标法.传统的KED建模方法将多刚体动力学与结构动力学进行了简单的迭加,由于忽略柔性梁的轴向变形与横向变形之间的耦合,往往导致计算结果不收敛.1987年,Kane等<sup>[4]</sup>在用浮动坐标法研究旋转柔性梁时,提出了“动力刚化”的概念,并指出了传统的KED方法的缺陷.杨辉、洪嘉振等<sup>[5]</sup>

\* 收稿日期: 2013-12-11; 修订日期: 2014-02-20

基金项目: 国家自然科学基金(11172239;11372252);高校博士点基金(20126102110023)

作者简介: 王新栋(1989—),男,山东人,硕士研究生(E-mail: dynwang@outlook.com);

邓子辰(1964—),男,辽宁人,教授,博士生导师(通讯作者. E-mail: dweifan@nwpu.edu.cn).

基于浮动坐标法提出了旋转柔性梁的一次近似耦合模型(FOAC),并从理论上解释了“动力刚化”现象的物理本质.蔡国平等<sup>[6]</sup>基于一次近似耦合模型,采用假设模态法对旋转运动柔性梁的动力特性进行了研究,给出了简化的控制模型.相比于浮动坐标法,绝对节点坐标法起步较晚.1997年,Shabana<sup>[7]</sup>基于非线性有限元理论提出柔性多体系统动力学建模的绝对节点坐标方法.目前,绝对节点坐标法已被公认为是多体系统建模理论的一项重要进展.在国内,胡海岩、田强等<sup>[8]</sup>将绝对节点坐标法应用于对大型柔性空间结构展开的模拟中,取得了一系列研究成果.

柔性多体系统的动力学方程通常是无法解析求解的,需要利用数值方法进行求解,传统的数值方法有 Runge-Kutta 方法、Newmark 算法、广义  $\alpha$ - 算法等.Hamilton 系统的辛几何算法是计算多体系统动力学中新兴的数值算法.1984年,Feng(冯康)<sup>[9]</sup>在双微(微分方程和微分流形)国际会议上首次提出基于辛几何原理计算 Hamilton 体系的方法,并指出保守体系的差分格式应当保辛,开创了 Hamilton 力学计算的新方法.王琪等<sup>[10]</sup>研究了树形多体 Hamilton 系统的隐式辛算法,发现该算法计算效率高,并可保持长期数值计算的稳定性.此后在计算力学领域,钟万勰<sup>[11]</sup>对辛几何进行了通俗的表述,并将其应用于应用力学领域的数值研究.Huang 等(黄永安、邓子辰等)<sup>[12]</sup>将辛几何方法引入精细积分算法中,构造了辛精细积分算法,并将其应用于柔性多体系统之中,取得了很好的计算结果.近年来,钟万勰等<sup>[13-14]</sup>根据结构力学与最优控制的模拟理论,提出结构有限元方法同样适用于时间坐标,并指出基于变分原理的时间有限元方法应当是保辛的.隋永枫等<sup>[15]</sup>将时间有限元方法应用于陀螺系统,扩展了时间有限元方法的应用领域.

本文基于非线性梁理论建立柔性叶片系统的一次近似耦合模型,并采用假设模态方法进行离散,根据分析结构力学原理构造与系统的动力学方程等效的离散系统的时间有限元格式.通过数值计算,验证方法的可靠性,并分析柔性叶片的刚-柔耦合运动,期望为柔性叶片系统的分析设计提供有益的参考.

## 1 旋转柔性梁的动力学建模

如图 1 所示,考虑在水平面内定轴旋转的柔性叶片,不计重力的影响,将系统简化为中心刚体-柔性梁系统.设中心刚体的质量为  $M$ ,转动惯量为  $J_H$ ;柔性梁的长度为  $L$ ;梁截面面积为  $A$ ;截面对中性轴的惯性矩为  $I$ ;材料密度为  $\rho$ ;材料弹性模量为  $E$ ;  $\tau$  为作用在旋转柔性梁与基座铰接处的外部驱动力矩;  $\theta$  为大范围运动的角位移.

建立惯性坐标系  $O-XY$  和固结在梁轴线上的浮动坐标系  $o-xy$ ,将柔性梁的运动分解为浮动坐标系  $o-xy$  相对于惯性坐标系  $O-XY$  的大范围牵连运动和梁相对于浮动坐标系  $o-xy$  的变形运动.

如图 2 所示,未发生变形时,柔性梁上任意一点  $P_0$  在浮动坐标系  $o-xy$  中的坐标为  $(x, 0)$ .变形后,该点在惯性坐标系  $O-XY$  下的位置矢量为

$$\mathbf{R}_p = \overrightarrow{OP} = \Theta(\overrightarrow{Oo} + \overrightarrow{oP_0} + \overrightarrow{P_0P}), \quad (1)$$

其中,  $\Theta$  为浮动坐标系相对于惯性坐标系的转换矩阵:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (2)$$

考虑柔性梁的轴向和横向变形的耦合,在浮动坐标系中  $P_0$  点的位移  $\overrightarrow{P_0P}$  可表示为

$$\overrightarrow{P_0 P} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1(x, t) + w_c(x, t) \\ w_2(x, t) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

其中,  $w_1$  为梁的轴向变形,  $w_2$  为梁的挠度,  $w_c$  为横向位移引起的轴向位移的一次耦合项, 即

$$w_c(x, t) = -\frac{1}{2} \int_0^x \left( \frac{\partial w_2(\xi, t)}{\partial \xi} \right)^2 d\xi. \quad (4)$$

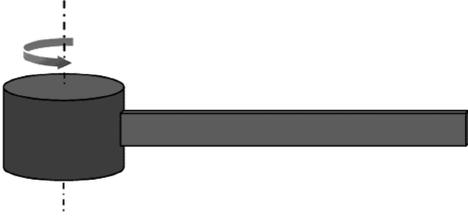


图1 中心刚体-柔性梁系统示意图

Fig.1 The rigid hub-flexible beam structure system

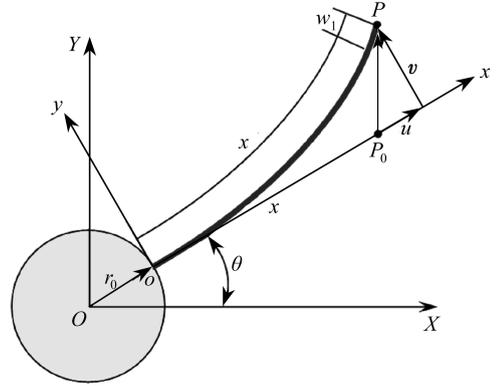


图2 柔性梁的变形位移描述

Fig.2 Deformation of the flexible beam

将方程(3)代入方程(1), 柔性梁上任意一点  $P$  的位置矢量

$$\mathbf{R}_P = \Theta \begin{bmatrix} r_0 + x + w_1(x, t) + w_c(x, t) \\ w_2(x, t) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

一次耦合项  $w_c$  的引入使动力刚化现象成为刚体运动与柔性体振动的耦合的自然结果, 实验表明<sup>[16]</sup>, 一次近似耦合模型能够很好地与实验结果吻合。

$\mathbf{R}_P$  对时间求导数, 可以得到  $P$  点的速度

$$\dot{\mathbf{R}}_P = \dot{\Theta} \begin{bmatrix} r_0 + x + w_1(x, t) + w_c(x, t) \\ w_2(x, t) \end{bmatrix} + \Theta \begin{bmatrix} \dot{w}_1(x, t) + \dot{w}_c(x, t) \\ \dot{w}_2(x, t) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

其中

$$\dot{\Theta} = \Theta_\theta \dot{\theta}, \quad \Theta_\theta = \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix}.$$

通过方程(1)~(6), 可以计算得到柔性梁系统的动能:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} J_H \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \dot{\mathbf{R}}_P^T \dot{\mathbf{R}}_P dx = \\ &= \frac{1}{2} J_H \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \{ [(r_0 + x + w_1 + w_c)^2 + w_2^2] \dot{\theta}^2 - 2w_2(\dot{w}_1 + \dot{w}_c) \dot{\theta} + \\ &\quad 2(r_0 + x + w_1 + w_c) \dot{w}_2 \dot{\theta} + (\dot{w}_1 + \dot{w}_c)^2 + \dot{w}_2^2 \} dx. \end{aligned} \quad (7)$$

系统的总势能和外力伪势能分别如方程(8)和(9)所述:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right)^2 dx, \quad (8)$$

$$W_F = -\tau(t)\theta, \quad (9)$$

其中,  $\tau(t)$  为外力矩随时间变化的函数。

系统的 Lagrange 函数可表达为

$$\begin{aligned}
L = T - (V + W_F) = & \\
& \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \{ [(r_0 + x + w_1 + w_c)^2 + w_2^2] \dot{\theta}^2 - 2w_2(\dot{w}_1 + \dot{w}_c) \dot{\theta} + \\
& 2(r_0 + x + w_1 + w_c) \dot{w}_2 \dot{\theta} + (\dot{w}_1 + \dot{w}_c)^2 + \dot{w}_2^2 \} dx - \\
& \frac{1}{2} \int_0^L EA \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right)^2 dx + \tau \theta. \quad (10)
\end{aligned}$$

已知方程(10),可以通过 Hamilton 原理构造系统的动力学方程及其边界条件<sup>[6]</sup>.

## 2 刚-柔耦合系统求解的分析结构力学方法

Hamilton 力学中,Hamilton 主函数与系统的动力学方程及边界条件一样,能够完全地决定系统的运动.在数值算法上,可以通过插值函数近似系统的 Hamilton 主函数,并基于分析结构力学原理求解系统的动力学方程.

### 2.1 时间有限元

对于一个 Lagrange 力学系统,假设系统的广义坐标  $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_s, \dots\}^T$ ,且 Lagrange 函数为  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ .若  $t_0$  时刻系统的初始条件为  $(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0)^T$ ,根据运动的存在唯一性,该系统从初始状态出发的正轨是已知的.若  $t_1$  时刻系统的末态参数为  $(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1)^T$ ,则可以定义如下的 Hamilton 主函数:

$$S(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{L}(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, t_0, t_1) dt. \quad (11)$$

可以看到 Hamilton 主函数就是以初始参数和末态参数为变元表达的沿正轨的作用量函数.

在  $[t_0, t_1]$  内,沿正轨对 Hamilton 主函数  $S$  求变分:

$$\begin{aligned}
\delta S(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, t_0, t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} \delta L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt = \\
& \int_{t_0}^{t_1} \left( \left\{ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right\}^T \delta \mathbf{q} + \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right\}^T \delta \dot{\mathbf{q}} \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left( \left\{ \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right\}^T \delta \mathbf{q} + \mathbf{p}^T \left\{ \frac{d(\delta \mathbf{q})}{dt} \right\} \right) dt = \\
& \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} (\mathbf{p}^T \delta \mathbf{q}) dt = \mathbf{p}_1^T \delta \mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_0^T \delta \mathbf{q}_0. \quad (12)
\end{aligned}$$

分析可得如下关系:

$$\begin{cases} \mathbf{p}_0 = -\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}_0}, \\ \mathbf{p}_1 = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}_1}. \end{cases} \quad (13)$$

对该动力学系统在时间域内划分图 3 所示的结构化网格.则在时间单元内,有

$$\begin{cases} \mathbf{p}_k = \frac{\partial S_k}{\partial \mathbf{q}_k} & [t_{k-1}, t_k], \\ \mathbf{p}_k = -\frac{\partial S_{k+1}}{\partial \mathbf{q}_k} & [t_k, t_{k+1}], \end{cases} \quad (14)$$

即

$$\frac{\partial S_k(\mathbf{q}_{k-1}, \mathbf{q}_k, t_{k-1}, t_k)}{\partial q_k^i} + \frac{\partial S_{k+1}(\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_{k+1}, t_k, t_{k+1})}{\partial q_k^i} = 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, s - 1, s, s + 1, \dots). \quad (15)$$

可以证明,方程(15)与系统的动力学方程是完全等价的<sup>[13]</sup>.在  $[t_{k-1}, t_k]$  和  $[t_k, t_{k+1}]$  时间单元内,通过对系统的状态参量进行插值近似,可以计算得到在该时间单元内系统近似的 Hamilton 主函数  $\tilde{S}_k$  和  $\tilde{S}_{k+1}$ .代入方程(16),即可构造系统的时间有限元离散格式.

在本文中,通过对网格进行时间域上的结构化的剖分,求解时可以不对方程(16)进行全域上的统一求解.将方程(16)看作系统的状态参量的传递关系,可以降低所求解的方程的阶次,简化计算.

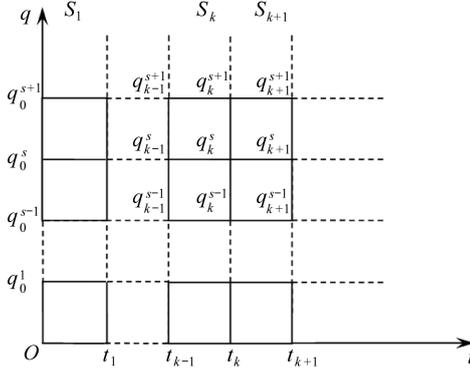


图3 时间坐标的结构化网格

Fig.3 The structured grid of time-coordinate

### 2.2 旋转柔性梁的假设模态离散及其时间有限元计算格式

在旋转柔性梁的柔度、转速均不太大的前提下,可以通过截断柔性悬臂梁的模态函数来近似旋转柔性梁的几何变形.图2中所示的柔性叶片上的任意一点的轴向位移  $w_1$  和横向位移  $w_2$  可以由模态坐标表达为

$$\begin{cases} w_1(x, t) = \sum_{i=1}^m \phi_i(x) \alpha_i(t), \\ w_2(x, t) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x) \beta_i(t), \end{cases} \quad (16)$$

其中,  $\phi_i(x)$  和  $\psi_i(x)$  分别为柔性悬臂梁的轴向和横向振动的模态函数,  $\alpha_i(t)$  和  $\beta_i(t)$  分别为与  $\phi_i(x)$  和  $\psi_i(x)$  对应的模态坐标.  $m$  和  $n$  分别为柔性悬臂梁轴向和横向振动模态的截断阶次.

将方程(16)代入方程(4),可得

$$w_c(x, t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \kappa_{ij} \beta_i \beta_j, \quad \kappa_{ij} = -\frac{1}{2} \int_0^x \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} d\xi. \quad (17)$$

方程(10)所描述的 Lagrange 函数可以表达为

$$\begin{aligned} \tilde{L} = & \chi_1 \dot{\theta}^2 + \sum_{i=1}^m \chi_2^i \alpha_i \dot{\theta}^2 + \sum_{i=1}^n \chi_3^i \dot{\beta}_i \dot{\theta} + \\ & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \chi_4^{ij} (\alpha_i \alpha_j \dot{\theta}^2 + \dot{\alpha}_i \dot{\alpha}_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \chi_5^{ij} (\beta_i \beta_j \dot{\theta}^2 + \dot{\beta}_i \dot{\beta}_j) + \\ & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \chi_6^{ij} (\alpha_i \dot{\beta}_j - \dot{\alpha}_i \beta_j) \dot{\theta} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \chi_7^{ij} \beta_i \beta_j + \\ & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \chi_8^{ijk} (\alpha_i \beta_j \beta_k \dot{\theta} + \dot{\alpha}_i (\dot{\beta}_j \beta_k + \beta_j \dot{\beta}_k)) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \chi_9^{ijk} (\dot{\beta}_i \beta_j \beta_k - \beta_i \dot{\beta}_j \beta_k - \beta_i \beta_j \dot{\beta}_k) \dot{\theta} + \\
& \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \chi_{10}^{ijks} (\beta_i \beta_j \beta_k \beta_s \dot{\theta}^2 + \dot{\beta}_i \beta_j \dot{\beta}_k \beta_s + \beta_i \dot{\beta}_j \dot{\beta}_k \beta_s + \dot{\beta}_i \beta_j \beta_k \dot{\beta}_s + \beta_i \dot{\beta}_j \beta_k \dot{\beta}_s) - \\
& \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \chi_{11}^{ij} \alpha_i \alpha_j - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \chi_{12}^{ij} \beta_i \beta_j + \tau \theta, \tag{18}
\end{aligned}$$

其中

$$\left\{ \begin{aligned}
\chi_1 &= \frac{1}{2} J_H + \frac{1}{2} \rho A \int_0^L (r_0 + x)^2 dx, \\
\chi_2^i &= \rho A \int_0^L (r_0 + x) \phi_i dx, \\
\chi_3^i &= \rho A \int_0^L (r_0 + x) \psi_i dx, \\
\chi_4^{ij} &= \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \phi_i \phi_j dx, \\
\chi_5^{ij} &= \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \psi_i \psi_j dx, \\
\chi_6^{ij} &= \rho A \int_0^L \psi_i \phi_j dx, \\
\chi_7^{ij} &= \rho A \int_0^L (r_0 + x) \kappa_{ij} dx, \\
\chi_8^{ijk} &= \rho A \int_0^L \phi_i \kappa_{jk} dx, \\
\chi_9^{ijk} &= \rho A \int_0^L \psi_i \kappa_{jk} dx, \\
\chi_{10}^{ijks} &= \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \kappa_{ij} \kappa_{ks} dx, \\
\chi_{11}^{ij} &= \frac{1}{2} EA \int_0^L \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dx, \\
\chi_{12}^{ij} &= \frac{1}{2} EI \int_0^L \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x^2} dx.
\end{aligned} \right. \tag{19}$$

在时间单元内,对系统的状态参量作线性插值,即

$$\left\{ \begin{aligned}
[t_{k-1}, t_k]: \quad & \theta = \frac{\theta^{k-1} + \theta^k}{2}, \quad \alpha_i = \frac{\alpha_i^{k-1} + \alpha_i^k}{2}, \quad \beta_i = \frac{\beta_i^{k-1} + \beta_i^k}{2}, \\
& \dot{\theta} = \frac{\theta^k - \theta^{k-1}}{\delta}, \quad \dot{\alpha}_i = \frac{\alpha_i^k - \alpha_i^{k-1}}{\delta}, \quad \dot{\beta}_i = \frac{\beta_i^k - \beta_i^{k-1}}{\delta}, \\
[t_k, t_{k+1}]: \quad & \theta = \frac{\theta^k + \theta^{k+1}}{2}, \quad \alpha_i = \frac{\alpha_i^k + \alpha_i^{k+1}}{2}, \quad \beta_i = \frac{\beta_i^k + \beta_i^{k+1}}{2}, \\
& \dot{\theta} = \frac{\theta^{k+1} - \theta^k}{\delta}, \quad \dot{\alpha}_i = \frac{\alpha_i^{k+1} - \alpha_i^k}{\delta}, \quad \dot{\beta}_i = \frac{\beta_i^{k+1} - \beta_i^k}{\delta}.
\end{aligned} \right. \tag{20}$$

$\delta$  为时间步长.将方程(20)分别代入方程(18)和方程(11)中,即得近似的 Hamilton 主函数

$\tilde{S}_k(\tilde{\mathbf{q}}_{k-1}, \tilde{\mathbf{q}}_k, t_{k-1}, t_k)$  和  $\tilde{S}_{k+1}(\tilde{\mathbf{q}}_k, \tilde{\mathbf{q}}_{k+1}, t_k, t_{k+1})$ , 其中取  $\tilde{\mathbf{q}}_k = \{\theta^k, \alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots, \alpha_m^k, \beta_1^k, \beta_2^k, \dots, \beta_n^k\}^T$ . 代入方程(16), 即可构造中心刚体-柔性梁系统的时间有限元离散迭代格式, 计算过程可由如图4的程序框图实现.

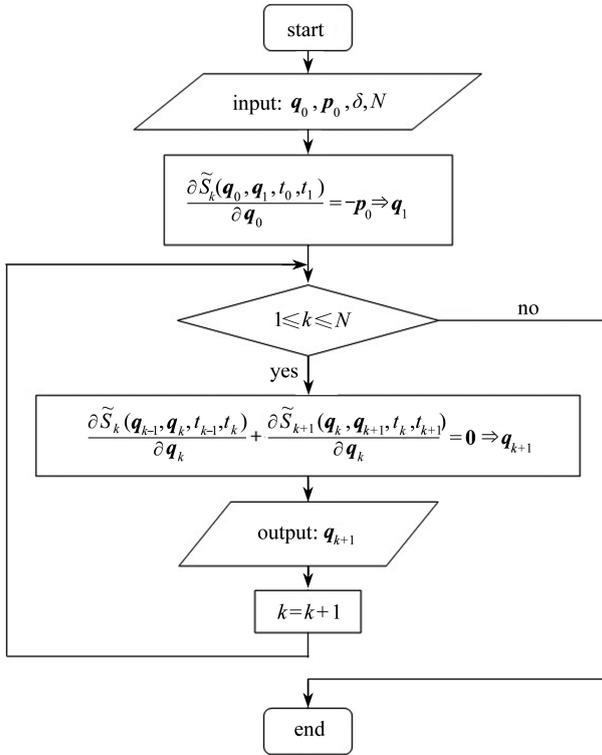


图4 计算程序框图

Fig.4 Program flowchart

### 3 数值算例

本文中对柔性叶片大范围运动已知和未知两种工况下的动力响应进行模拟.

#### 3.1 大范围运动已知条件下的动力学仿真

考虑图1所示的旋转柔性叶片系统, 假定叶片从静止开始运动且运动规律如下:

$$\dot{\theta} = \begin{cases} \frac{\Omega_0}{T} t - \frac{\Omega_0}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right), & 0 \leq t \leq T, \\ \Omega_0, & t > T. \end{cases} \quad (21)$$

取  $T = 15$  s, 并分别取  $\Omega_0 = 4$  rad/s 和  $\Omega_0 = 10$  rad/s 进行计算. 忽略轮毂的体积和质量, 取叶片的力学参数为: 体积密度  $\rho = 2.667 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>, 弹性模量  $E = 6.895 2 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup>, 长度  $L = 8$  m, 横截面积  $A = 7.296 8 \times 10^{-5}$  m<sup>2</sup>, 截面惯性矩  $I = 8.218 9 \times 10^{-9}$  m<sup>4</sup>.

当转速  $\Omega_0 = 4$  rad/s 和  $\Omega_0 = 10$  rad/s 时, 采用时间有限元方法进行模拟时的柔性叶片末端的变形(轴向变形  $w_1$ , 横向变形  $w_2$ ) 分别如图5和图6所示. 图中数据点为文献[6]中的计算结果, 实线为本文结果. 对比图中结果可以看到, 本文的计算结果与参考文献中的结果基本一致. 在转速不至于过大的情况下, 时间有限元方法的计算结果是准确可靠的. 在低速的情况下, 截取柔性叶片的前3阶模态的计算结果已足够准确<sup>[6]</sup>. 本文进行数值模拟时, 分别截取了柔性

梁轴向振动和横向振动的 1 阶和前 3 阶模态.对比柔性叶片末端的横向变形与轴向变形,叶片的横向变形占主导地位,轴向变形相对较小.理论上,随着截断模态数的增加,假设模态方法的结果可以更好地模拟高速运动下柔性叶片的动力学响应.

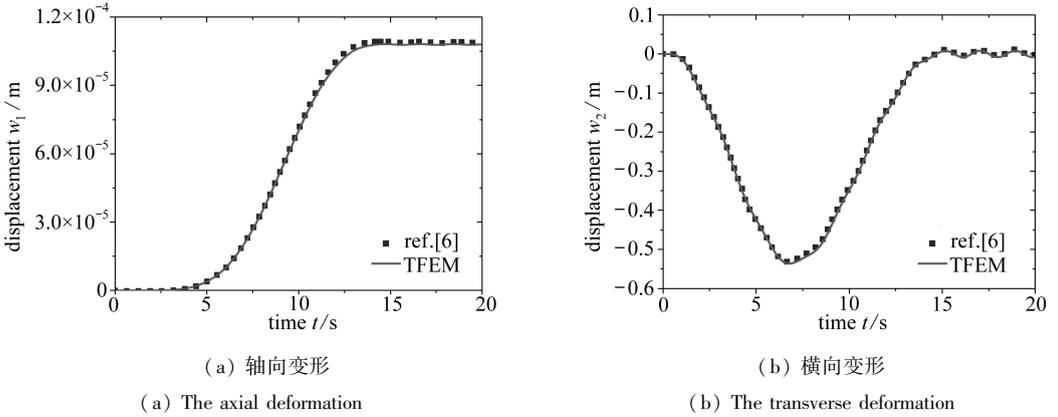


图 5 柔性叶片末端的变形 ( $\Omega_0 = 4 \text{ rad/s}$ )

Fig.5 Tip deformations of the flexible blade ( $\Omega_0 = 4 \text{ rad/s}$ )

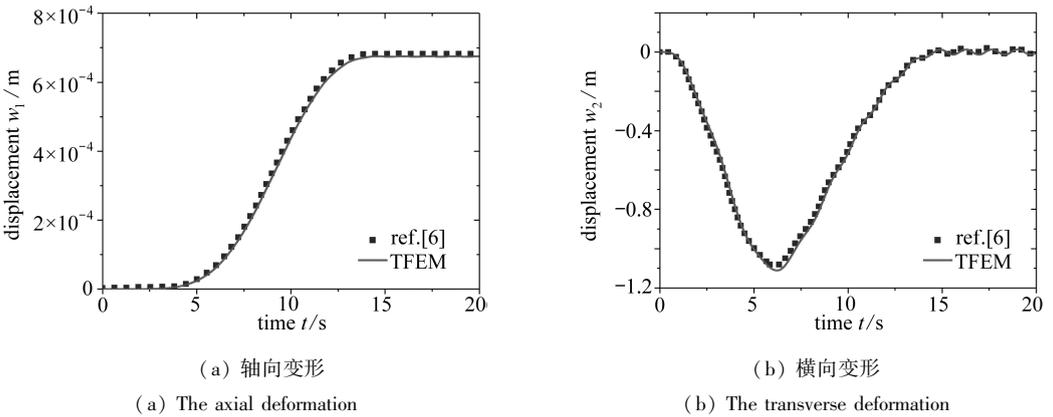


图 6 柔性叶片末端的变形 ( $\Omega_0 = 10 \text{ rad/s}$ )

Fig.6 Tip deformations of the flexible blade ( $\Omega_0 = 10 \text{ rad/s}$ )

### 3.2 大范围运动未知条件下的动力学仿真

假设叶片的参数与 3.1 小节相同,并取中心刚体的半径为 0.1 m,转动惯量为  $3.0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ .作用在转轴上的驱动力矩按如下规律变化:

$$\tau(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right), & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t > T, \end{cases} \quad (22)$$

即驱动力矩在前 10 s 中按正弦函数变化,10 s 以后系统自由运动.计算中取  $T = 10 \text{ s}$ .

图 7 和图 8 分别给出了柔性叶片末端的横向变形  $w_2$  和轮毂的大范围运动角位移  $\theta$  的时程变化.对比刚体假设下的模拟结果<sup>[17]</sup>与图 5 中的结果,可以看到轮毂的运动与柔性梁的变形之间的相互耦合作用使得系统的动力学行为产生了很大的不同.由图 7 可以看出,在  $10 \text{ s} \leq t \leq 15 \text{ s}$  的时间段内,轮毂的角位移在  $\tilde{\theta} = 0.4106 \text{ rad}$  附近作小幅的振动, $\tilde{\theta} = 0.4106 \text{ rad}$  的结果与刚体假设下系统最后停止运动的位置是一致的.

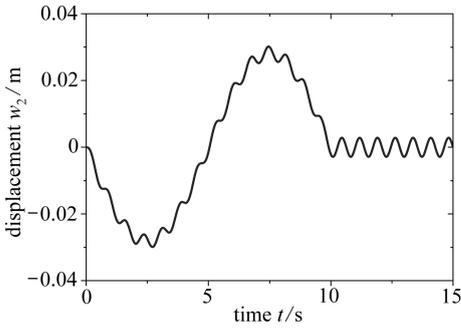


图7 柔性叶片末端的横向变形

Fig.7 Transverse tip deformation of the flexible blade

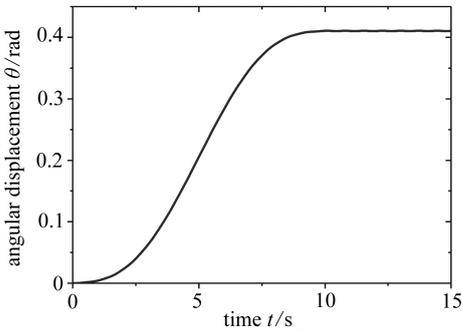
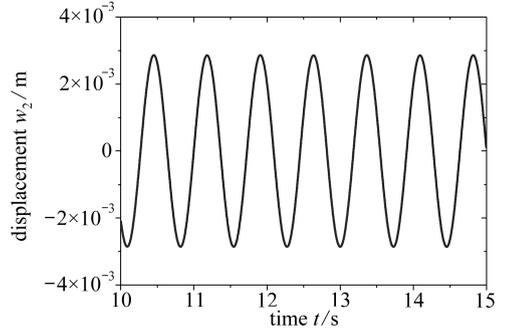
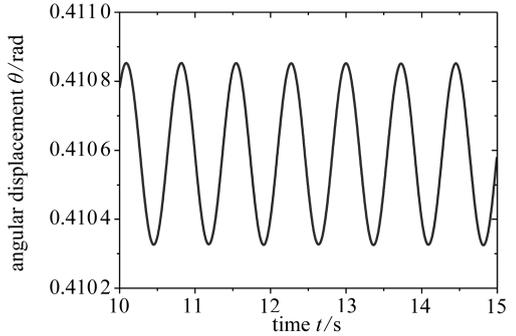


图8 轮毂的角位移

Fig.8 Angular-displacement of the hub



## 4 结 论

本文基于结构力学与最优控制的模拟关系,利用非线性梁理论建立柔性叶片的一次近似耦合模型,构造了中心刚体-柔性梁系统的时间有限元计算方法.仿真的结果表明,时间有限元方法能够有效地求解柔性多体系统计算中的刚-柔耦合问题.在本文中,时间有限元离散时采用了结构化的时空网格,在单元内进行了线性插值,而并未使用非结构网格、保辛摄动等有效手段,因此该时间有限元格式有着极大的改进空间.此外,时间有限元方法还特别适用于解决刚性微分-代数方程时的违约问题<sup>[18]</sup>,进行后续的研究是十分有意义的.最后,本文的计算结果可以为旋转柔性叶片系统的分析设计提供有益的参考.

**感谢** 作者感谢西北工业大学研究生创业种子基金(Z2014123)对本文的资助.

## 参考文献 (References):

- [1] 陆佑方. 柔性多体系统动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1996. (LU You-fang. *Dynamics of Flexible Multibody Systems*[M]. Beijing: Higher Education Press, 1996. (in Chinese))
- [2] 洪嘉振, 刘铸永. 刚柔耦合动力学的建模方法[J]. 上海交通大学学报, 2008, 42(11): 1922-1926. (HONG Jia-zhen, LIU Zhu-yong. Modeling methods of rigid-flexible coupling dynamics [J]. *Journal of Shanghai Jiao Tong University*, 2008, 42(11): 1922-1926. (in Chinese))
- [3] Winfrey R C. Dynamic analysis of elastic link mechanisms by reduction of coordinates[J]. *ASME Journal of Engineering for Industry*, 1972, 94(2): 577-582.

- [4] Kane T R, Ryan R R, Banerjee A K. Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base [J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1987, **10**(2): 139-151.
- [5] 杨辉, 洪嘉振, 余征跃. 刚-柔耦合多体系统动力学建模与数值仿真[J]. 计算力学学报, 2003, **20**(4): 402-408. (YANG Hui, HONG Jia-zhen, YU Zheng-yue. Dynamics modeling and numerical simulation for a rigid-flexible coupling multibody system[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2003, **20**(4): 402-408. (in Chinese))
- [6] 蔡国平, 洪嘉振. 旋转运动柔性梁的假设模式方法研究[J]. 力学学报, 2005, **37**(1): 48-56. (CAI Guo-ping, HONG Jia-zhen. Assumed mode method of a rotating flexible beam[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2005, **37**(1): 48-56. (in Chinese))
- [7] Shabana A A. Flexible multibody dynamics: review of past and recent developments[J]. *Multibody System Dynamics*, 1997, **1**(2): 189-222.
- [8] 胡海岩, 田强, 张伟, 金栋平, 胡更开, 宋燕平. 大型网架式可展开空间结构的非线性动力学与控制[J]. 力学进展. 2013, **43**(4): 390-414. (HU Hai-yan, TIAN Qiang, ZHANG Wei, JIN Dong-ping, HU Geng-kai, SONG Yan-ping. Nonlinear dynamics and control of large deployable space structures composed of trusses and meshes[J]. *Advances in Mechanics*, 2013, **43**(4): 390-414. (in Chinese))
- [9] FENG Kang. On difference schemes and symplectic geometry[C]//*Proceeding of the 1984 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations*. Beijing: Science Press, 1985: 42-58.
- [10] 王琪, 黄克累, 陆启韶. 树形多体 Hamilton 系统辛算法[J]. 计算物理, 1997, **14**(1): 35-39. (WANG Qi, HUANG Ke-lei, LU Qi-shao. Symplectic algorithm for Hamilton multibody system[J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 1997, **14**(1): 35-39. (in Chinese))
- [11] 钟万勰. 应用力学的辛数学方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006. (ZHONG Wan-xie. *Symplectic Solution Methodology in Applied Mechanics*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2006. (in Chinese))
- [12] HUANG Yong-an, DENG Zi-chen, YAO Lin-xiao. An improved symplectic precise integration method for analysis of the rotating rigid-flexible coupled system[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, **299**(1/2): 229-246.
- [13] 钟万勰, 姚征. 时间有限元与保辛[J]. 机械强度, 2005, **27**(2): 178-183. (ZHONG Wan-xie, YAO Zheng. Time domain FEM and symplectic conservation[J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2005, **27**(2): 178-183. (in Chinese))
- [14] 钟万勰, 高强. 时间-空间混和有限元[J]. 动力学与控制学报, 2007, **5**(1): 1-7. (ZHONG Wan-xie, GAO Qiang. Harmony element method for time and space domain[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, **5**(1): 1-7. (in Chinese))
- [15] 隋永枫, 高强, 钟万勰. 陀螺系统时间有限元方法[J]. 振动与冲击, 2012, **31**(13): 95-98. (SUI Yong-feng, GAO Qiang, ZHONG Wan-xie. Time domain finite element method for gyroscopic systems[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2012, **31**(13): 95-98. (in Chinese))
- [16] 杨辉. 刚柔耦合动力学系统的建模理论与实验研究[D]. 博士学位论文. 上海: 上海交通大学, 2002. (YANG Hui. Study on dynamic modeling theory and experiments for rigid-flexible coupling systems[D]. PhD Thesis. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2002. (in Chinese))
- [17] 刘向龙. 旋转柔性叶片系统动力学特性研究[D]. 硕士学位论文. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2007. (LIU Xiang-long. Dynamic characteristics research of rotating flexible blade[D]. Master Thesis. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2007. (in Chinese))
- [18] Hairer E, Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential Al-*

*gebraic Problems*[M]. Springer, 1987.

# Dynamic Behavior Analysis of Rotational Flexible Blades Based on Time-Domain Finite Element Method

WANG Xin-dong<sup>1</sup>, DENG Zi-chen<sup>1,2</sup>, WANG Yan<sup>1</sup>, FENG Guo-chun<sup>1</sup>

(1. *Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P.R.China;*

2. *State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116023, P.R.China)*

(Contributed by DENG Zi-chen, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** The time-domain finite element method was introduced to investigate the dynamic responses of rotational flexible blades. Firstly, the rotational flexible blades were modeled as a classic rigid hub-flexible beam system. Based on the first-order approximate coupling (FOAC) model, the Lagrangian function for the rotational flexible blades system was derived. Then, with the assumed mode method (AMM), the time-domain finite element scheme was constructed. Finally, the dynamic behavior of the rotational flexible blades was analyzed with the time-domain finite element method through numerical simulation. Constructed directly without derivation of the kinetic equations, the proposed discrete scheme is naturally endowed with symplectic conservation, high computational accuracy and good stability. Numerical results show that the time-domain finite element method can effectively solve the rigid-flexible coupling problem, in which the low-frequency large motion and the high-frequency elastic vibration of the blades are interactive.

**Key words:** first-order approximate coupling (FOAC); assumed mode method (AMM); time-domain finite element; symplectic conservation

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(11172239; 11372252)