

# 刚-柔体动力学方程的保辛摄动迭代法\*

吴 锋, 高 强, 钟万勰

(大连理工大学 工程力学系; 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

(本刊编委钟万勰来稿)

**摘要:** 针对刚-柔体动力学方程,提出保辛摄动迭代算法,该方法把刚-柔体动力学方程的低频运动和高频振动分开处理,用保辛摄动的思想来处理低、高频耦合作用,从而可以采用较大时间步长进行数值积分,即可给出满意的数值结果,很好地解决了刚性积分问题,数值算例表明该方法是可行的。

**关键词:** 刚-柔体; 辛; 摄动; 刚性

**中图分类号:** O313.7      **文献标志码:** A

**doi:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.04.001

## 引 言

刚-柔体动力学方程与多刚体动力学方程的不同在于考虑部分部件的弹性变形,此时的动力学积分是一个挑战<sup>[1]</sup>,因为一般来说,机构运动是低频的,而部件的弹性振动是高频的,两种运动混合在一起积分,容易发生不同时间尺度的问题,其数值表现是刚性,积分若干步后,会因为数值病态而失真,这是刚-柔体动力学方程数值积分必须面对的问题,也被认为是多体系统动力学中的难题之一.针对刚性积分问题,如果用显式算法,则由于数值稳定的限制,往往要求小时间步长,因此目前多用隐式算法如 Newmark 方法<sup>[2]</sup>、Wilson- $\theta$  法<sup>[3]</sup>、Runge-Kutta 方法<sup>[4]</sup>等,但是这些方法对于刚-柔体动力学方程,未必有效.文献[5]曾利用一个考虑弹性变形的单摆问题对这些方法做过比较研究,研究结果表明,当刚性程度过大(高低频率之比大于1 000)时,无论是 Newmark 方法还是 Runge-Kutta 法计算结果均发散.考虑刚-柔体动力学方程的另一个问题就是约束违约问题,目前一个流行的方法是基于违约修正的方法,如文献[6-7].违约修正主要解决的是约束违约的问题,而并没有涉及到刚性积分的问题.文献[8-9]曾提出利用精细积分法计算刚-柔体动力学方程,并指出精细积分法对于高频中快变变量的积分十分有利,优于 Runge-Kutta 法.

如果从大范围整体运动看,大范围运动是掌控全局的,最重要的,属于低频运动.部件的弹性振动虽然参加了整体的运动,但仅是局部起作用,其振动频率远高于整体运动的低频率.如

\* 收稿日期: 2013-11-25; 修订日期: 2014-03-04

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973计划)(2009CB918501)

作者简介: 吴锋(1985—),男,江苏靖江人,博士生(E-mail: wufeng\_chn@163.com);

高强(1978—),男,内蒙古赤峰人,副教授,博士(E-mail: qgao@dlut.edu.cn);

钟万勰(1934—),男,浙江德清人,教授,院士(通讯作者. E-mail: zwoffice@dlut.edu.cn).

果将低、高频区分开来看,大范围低频运动属于多刚体动力学范畴,其研究相对较多,比如文献[10]针对约束体系的微分-代数方程(DAE)提出一种新的 DAE 积分方法,可以精确地满足约束方程,而无需进行约束修正.实际上关于局部高频弹性振动的研究更加成熟,比如模态叠加<sup>[3, 11]</sup>等.不过由于杆件本身在运动,它的弹性振动理论是在非惯性坐标内,说明大范围运动与弹性振动之间有相互作用,因此还需要考虑这种相互作用,也即低、高频耦合作用.实际上这种耦合作用相比而言属于小量,可用摄动法处理之.不过,传统的摄动法总是采用 Taylor 级数展开<sup>[12]</sup>,与 Hamilton 体系的保辛没有关系,也没有正则变换、保辛之说,因此常出现计算结果发散的现象<sup>[13]</sup>.对于刚-柔体动力学方程来说,如果利用传统摄动法,其计算格式复杂,而且同样会出现计算发散现象.辛对称是动力学理论的核心.对于刚-柔体动力学方程的摄动法也应抓住辛对称的核心,正则变换就自动满足了保辛的性质.所以动力学摄动,也应在正则变换的基础上讲述.文献[13-16]系统地阐述了保辛摄动方法,并指出保辛摄动具有长时间仿真的优点.基于这些认识,本文提出针对刚-柔体动力学方程的保辛摄动迭代方法,该方法把刚-柔体动力学方程的大范围运动和局部弹性振动分开处理,用 DAE 积分处理大范围运动,而用摄动的思想处理两者之间的耦合项.

## 1 保辛摄动迭代

本文的研究对象是刚-柔体动力学方程,处理其中的低频大范围运动和局部高频弹性振动.本文的侧重点不在于研究刚-柔体动力学模型,而在分析刚-柔体动力学方程.因此文中只是以一个简单的二维刚-柔杆系模型为例,阐述利用本文方法进行刚柔体动力学方程分析的过程.为方便论述,本文只考虑杆的弯曲变形(这一变形也常常是最主要的),假定各杆长度不变.但需要说明的是,本文方法同样可以处理更加复杂模型的刚-柔体动力学方程.

假设一个二维的刚-柔杆系,共有  $N$  个杆,其中第  $i$  杆的长度为  $L_i$ ,其线密度为  $\rho_i$ ,第  $i$  杆如图 1 所示.

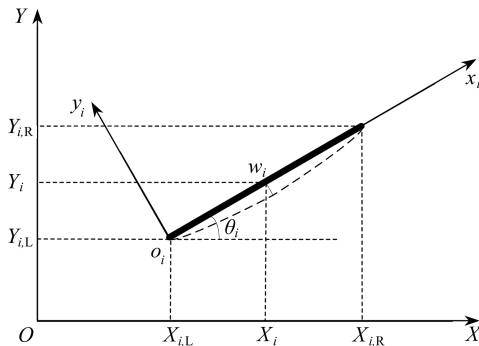


图 1 第  $i$  杆模型

Fig.1 Model of the  $i$ -th rod

图 1 中  $(O, X, Y)$  为绝对坐标,  $(o_i, x_i, y_i)$  为第  $i$  杆的相对坐标,  $(X_{i,L}, Y_{i,L})$  和  $(X_{i,R}, Y_{i,R})$  分别为杆两端的绝对坐标,  $(X_i, Y_i)$  为不考虑弹性变形时,杆中某点的绝对坐标.图中虚线表杆的弹性变形,  $w_i$  为弹性杆的弹性相对位移.刚-柔体动力学方程,虽然有代数方程的约束,仍可用变分原理描述.对于第  $i$  杆,其势能为

$$V_i = \int_0^{L_i} \frac{1}{2} E_i I_i (w_i'')^2 dx_i + \int_0^{L_i} f_i Y_i dx_i, \quad (1)$$

其中  $E_i I_i$  为梁的弯曲刚度,  $f_i$  为该杆所受重力,  $w_i' = \partial^2 w_i / \partial x_i^2$ . 上式描述的是考虑弹性变形的 Euler (欧拉) 梁, 为柔杆. 如果某杆件的弹性变形不考虑, 则为刚性杆. 其与柔杆不同在于, 刚杆无需考虑杆件本身的弹性势能, 仅考虑其外力势能. 由于杆弹性相对变形比杆的牵连运动小得多, 因此在外力势的计算中忽略. 再分析杆动能:

$$T_i = \int_0^{L_i} \frac{1}{2} \rho_i \mathbf{v}_{i,a}^T \mathbf{v}_{i,a} dx_i, \quad (2)$$

$$\mathbf{v}_{i,a}^T \mathbf{v}_{i,a} = \mathbf{v}_{i,t}^T \mathbf{v}_{i,t} + 2\mathbf{v}_{i,t}^T \mathbf{v}_{i,r} + \mathbf{v}_{i,r}^T \mathbf{v}_{i,r}, \quad (3)$$

其中,  $\mathbf{v}_{i,r}, \mathbf{v}_{i,t}$  分别是相对坐标下的弹性相对速度和牵连速度.  $\mathbf{v}_{i,t}^T \mathbf{v}_{i,t}$  是相对坐标内振动的动能, 与牵连速度无关, 属高频局部振动;  $\mathbf{v}_{i,t}^T \mathbf{v}_{i,t}$  则是牵连速度提供的动能, 在 DAE 积分时, 已经考虑了, 是低频非线性运动; 余下的交叉项  $2\mathbf{v}_{i,t}^T \mathbf{v}_{i,r}$  是高、低频结合, 代表高频与低频的耦合作用. 非线性系统的时间积分, 只能用逐步积分法, 就如 DAE 积分那样. 毕竟大范围运动是掌控全局的, 最重要. 局部振动属于高频振动, 可以用精细积分等手段处理. 实际上在一个低频周期之中, 高频位移已经剧烈变动, 将低、高频区分开, 让它们壁垒分明, 而低、高频之间的耦合项则用摄动法处理之, 也即有

$$\mathbf{v}_{i,a}^T \mathbf{v}_{i,a} = \mathbf{v}_{i,t}^T \mathbf{v}_{i,t} + \mathbf{v}_{i,r}^T \mathbf{v}_{i,r} + 2\varepsilon \mathbf{v}_{i,t}^T \mathbf{v}_{i,r}. \quad (4)$$

如果  $\varepsilon = 0$ , 此时, 局部弹性振动与整体的 DAE 方程求解完全分离, 得到的一个是局部振动, 另一个是刚体的整体运动. 实际情况是  $\varepsilon = 1$ ,  $2\mathbf{v}_{i,t}^T \mathbf{v}_{i,r}$  部分恰是高、低频率的耦合项, 相互作用很小, 用摄动法处理是有很有效的.

在相对坐标系下,  $\mathbf{v}_{i,r}, \mathbf{v}_{i,t}$  分别可以表示为

$$\mathbf{v}_{i,r}^T = (0 \quad \dot{w}_i), \quad \mathbf{v}_{i,t}^T = (\dot{X}_i \quad \dot{Y}_i) \mathbf{T}_i^T, \quad (5)$$

其中

$$X_i = N_{i,L} X_{i,L} + N_{i,R} X_{i,R}, \quad Y_i = N_{i,L} Y_{i,L} + N_{i,R} Y_{i,R}, \quad (6)$$

$$N_{i,L} = \frac{L_i - x_i}{L_i}, \quad N_{i,R} = \frac{x_i}{L_i}, \quad (7)$$

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} \cos \theta_i = \mathbf{c}_i^T \mathbf{q}_i, \quad \mathbf{c}_i^T = (-L_i^{-1} & 0 & L_i^{-1} & 0), \\ \sin \theta_i = \mathbf{s}_i^T \mathbf{q}_i, \quad \mathbf{s}_i^T = (0 & -L_i^{-1} & 0 & L_i^{-1}). \end{cases} \quad (8)$$

为叙述方便, 可以令

$$\begin{cases} \mathbf{N} = (N_{i,L} & N_{i,R}), \quad \mathbf{q}_i^T = (X_{i,L} & Y_{i,L} & X_{i,R} & Y_{i,R}), \\ \mathbf{D}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{N} \mathbf{D}_x \\ \mathbf{N} \mathbf{D}_y \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (9)$$

则  $\mathbf{v}_{i,t}$  可以写成:

$$\mathbf{v}_{i,t} = \mathbf{T}_i \mathbf{B}_i \dot{\mathbf{q}}_i. \quad (10)$$

如果把式(3)代入式(2)得

$$T_i = T_{i,t} + T_{i,tr} + T_{i,r}, \quad (11)$$

其中

$$T_{i,t} = \frac{1}{2} \int_0^{L_i} \rho_i \mathbf{v}_{i,t}^T \mathbf{v}_{i,t} dx_i, \quad T_{i,tr} = \int_0^{L_i} \rho_i \mathbf{v}_{i,t}^T \mathbf{v}_{i,r} dx_i, \quad T_{i,r} = \frac{1}{2} \int_0^{L_i} \rho_i \mathbf{v}_{i,r}^T \mathbf{v}_{i,r} dx_i. \quad (12)$$

根据假定, 各杆要求长度不变, 从而有如下形式的约束方程:

$$g_i = \mathbf{q}_i^T \mathbf{A}_i \mathbf{q}_i - L_i^2 = 0, \quad (13)$$

其中

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & -\mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_i^T = (X_{i,L} \quad Y_{i,L} \quad X_{i,R} \quad Y_{i,R}), \quad (14)$$

上式中  $\mathbf{I}_2$  是 2 阶单位矩阵. 对于相对位移  $w_i$ , 可采用各种插值函数或者梁的振型函数来表达:

$$w_i = \Phi_i(x_i) \mathbf{a}_i, \quad (15)$$

其中  $\Phi_i(x_i)$  为近似函数,  $\mathbf{a}_i$  为待定系数. 把公式(5)、(10)和(15)代入动能表达式(12), 可得第  $i$  杆的动能:

$$T_{i,l} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{M}_{l,i} \dot{\mathbf{q}}_i, \quad T_{i,lr} = \dot{\mathbf{a}}_i^T \mathbf{W}_{y,i} \mathbf{q}_i - \dot{\mathbf{a}}_i^T \mathbf{W}_{x,i} \mathbf{q}_i, \quad T_{i,r} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{a}}_i^T \mathbf{M}_{r,i} \dot{\mathbf{a}}_i, \quad (16)$$

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{l,i} = \int_0^{L_i} \rho_i \mathbf{B}_i^T \mathbf{B}_i dx_i, & \mathbf{M}_{r,i} = \int_0^{L_i} \rho_i \Phi_i^T \Phi_i dx_i, \\ \mathbf{W}_{x,i} = \mathbf{s}_i^T \mathbf{q}_i \int_0^{L_i} \rho_i \Phi_i^T \mathbf{N}_i \mathbf{D}_x dx_i, & \mathbf{W}_{y,i} = \mathbf{c}_i^T \mathbf{q}_i \int_0^{L_i} \rho_i \Phi_i^T \mathbf{N}_i \mathbf{D}_y dx_i. \end{cases} \quad (17)$$

把式(15)代入势能表达式(1)可得到第  $i$  杆的势能:

$$V_i = \frac{1}{2} \mathbf{a}_i^T \mathbf{K}_{r,i} \mathbf{a}_i + \mathbf{q}_i^T \mathbf{F}_i, \quad (18)$$

其中

$$\mathbf{K}_{r,i} = \int_0^{L_i} E_i I_i \Phi_i''^T \Phi_i'' dx_i, \quad \mathbf{F}_i = \int_0^{L_i} f_i \mathbf{D}_y^T \mathbf{N}^T dx_i. \quad (19)$$

令

$$\mathbf{q}^T = (X_1 \quad Y_1 \quad X_2 \quad Y_2 \quad \cdots), \quad \mathbf{q}_i = \mathbf{E}_i \mathbf{q}, \quad (20)$$

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_l \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{M}_r \dot{\mathbf{a}} + \dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{W}_y(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{W}_x(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \\ V = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{K}_r \mathbf{a} + \mathbf{q}^T \mathbf{F}, \end{cases} \quad (21)$$

上式中,  $\mathbf{q}$  为整个杆系所有节点位移所组成的位移向量,  $\mathbf{E}_i$  表示  $\mathbf{q}_i$  在  $\mathbf{q}$  中的位置,  $\mathbf{M}_l$  为总杆系的牵连速度所对应的质量矩阵, 相当于把杆系看作是刚体时的质量矩阵. 类似于有限元,  $\mathbf{M}_l$  可以由  $\mathbf{M}_{l,i}$  按自由度排列拼装而成.  $\mathbf{M}_r$  和  $\mathbf{K}_r$  则可以看作是杆系弹性振动的质量和刚度矩阵,  $\mathbf{W}_x$  和  $\mathbf{W}_y$  则是描述耦合项的矩阵, 这些矩阵都可以由单杆相应矩阵按自由度排列拼装而成.  $\mathbf{F}$  是总杆系的外力荷载. 当有动能和势能之后, 可以建立作用量, 然后变分得到系统的运动方程, 但是由于还要考虑约束条件  $g_i$ , 现在通过 Lagrange 乘子法, 得到作用量为

$$S = \int_0^{t_{\text{end}}} \left( T - V + \sum_{i=1}^N \lambda_i (\mathbf{q}_i^T \mathbf{A}_i \mathbf{q}_i - L_i^2) \right) dt. \quad (22)$$

为叙述方便, 令

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i \mathbf{q}_i^T \mathbf{A}_i \mathbf{q}_i = \mathbf{q}^T \mathbf{A}(\boldsymbol{\lambda}) \mathbf{q}. \quad (23)$$

把式(23)代入式(22)有

$$S = \int_0^{t_{\text{end}}} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_l \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{M}_r \dot{\mathbf{a}} + \dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{W}_y(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{W}_x(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{K}_r \mathbf{a} - \mathbf{q}^T \mathbf{F} + \mathbf{q}^T \mathbf{A}(\boldsymbol{\lambda}) \mathbf{q} - \sum_{i=1}^N \lambda_i L_i^2 \right) dt. \quad (24)$$

对上式变分,可得

$$\begin{cases} -M_t \ddot{\mathbf{q}} + 2A(\boldsymbol{\lambda}) \mathbf{q} + \mathbf{F}_q - \mathbf{F} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{g}_i = \mathbf{q}_i^T \mathbf{A}_i \mathbf{q}_i - L_i^2 = 0, \end{cases} \quad (25)$$

$$-M_r \ddot{\mathbf{a}} - \mathbf{K}_r \mathbf{a} + \mathbf{F}_a = \mathbf{0}, \quad (26)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{F}_a = \frac{d(\mathbf{W}_X \dot{\mathbf{q}})}{dt} - \frac{d(\mathbf{W}_Y \dot{\mathbf{q}})}{dt}, \\ \mathbf{F}_q = \dot{\mathbf{a}}^T \left( \frac{\partial \mathbf{W}_Y}{\partial \mathbf{q}} \right) \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{a}}^T \left( \frac{\partial \mathbf{W}_X}{\partial \mathbf{q}} \right) \dot{\mathbf{q}} + \frac{d(\mathbf{W}_X^T \dot{\mathbf{a}})}{dt} - \frac{d(\mathbf{W}_Y^T \dot{\mathbf{a}})}{dt}. \end{cases} \quad (27)$$

式(25)描述的是大范围运动部分的方程,属于 DAE 积分的范畴,而式(26)描述的是弹性变形方程,其中  $\mathbf{F}_q$  和  $\mathbf{F}_a$  是两个体系的耦合量,是小量,属于摄动部分.因此,在一个时间步  $(t_{k-1}, t_k)$  内可以利用保辛摄动迭代来求解,首先求解基本的非摄动的部分:

$$\begin{cases} -M_t \ddot{\mathbf{q}}^{(0)} + 2A(\boldsymbol{\lambda}_0) \mathbf{q}^{(0)} - \mathbf{F} = \mathbf{0}, \\ (\mathbf{q}_i^{(0)})^T \mathbf{A}_i \mathbf{q}_i^{(0)} - L_i^2 = 0, \end{cases} \quad (28)$$

$\mathbf{q}^{(0)}$  相当于  $\varepsilon = 0$  时杆系 DAE 积分的解,此时不考虑弹性变形.得到  $\mathbf{q}^{(0)}$  后代入  $\mathbf{F}_a(\mathbf{q}^{(0)})$  中,把  $\mathbf{F}_a(\mathbf{q}^{(0)})$  作为外荷载代入式(26)求解:

$$-M_r \ddot{\mathbf{a}}^{(1)} - \mathbf{K}_r \mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{F}_a(\mathbf{q}^{(1)}) = \mathbf{0}. \quad (29)$$

$\mathbf{a}^{(1)}$  的求解相当于是一次线性计算,可以利用精细积分精确求解,此时荷载项  $\mathbf{F}_a(\mathbf{q}^{(0)})$  中已经考虑了部分耦合项作用,把  $\mathbf{q}^{(0)}$  和  $\mathbf{a}^{(1)}$  代入  $\mathbf{F}_q$  和  $\mathbf{F}_a$ ,作为外荷载,可以接着进行高阶摄动的计算:

$$\begin{cases} -M_t \ddot{\mathbf{q}}^{(n)} + 2A(\boldsymbol{\lambda}^{(n)}) \mathbf{q}^{(n)} + \mathbf{F}_q(\mathbf{q}^{(n-1)}) - \mathbf{F} = \mathbf{0}, \\ (\mathbf{q}_i^{(n)})^T \mathbf{A}_i \mathbf{q}_i^{(n)} = L_i^2, \end{cases} \quad (30)$$

$$-M_r \ddot{\mathbf{a}}^{(n+1)} - \mathbf{K}_r \mathbf{a}^{(n+1)} + \mathbf{F}_a(\mathbf{q}^{(n)}) = \mathbf{0}. \quad (31)$$

实际进行计算时,在一个时间步  $(t_{k-1}, t_k)$  内,  $\mathbf{F}_q$  和  $\mathbf{F}_a$  可以取为常数,取两个时间节点上的平均值计算.当相邻两次迭代后变量之间的相对差小于允许值时,可以结束迭代,进入下一时间步计算.计算时,方程由两部分所组成,即 DAE 部分式(30)和部件弹性振动部分式(31).式(31)的计算可以采用精细积分方法计算,而式(30)是 DAE 方程,本文采用文献[10]中的方法计算.从计算格式上讲,本文方法与传统摄动格式完全不同,而是保辛摄动的一种实现.首先,本文方法是基于摄动法的思想,把高低频运动的耦合项视作摄动项来处理.这种处理方式显然不同于传统摄动的思想,而且这种摄动用传统方法处理起来也十分复杂.其次,本文方法是一种乘法摄动.如果是一个线性问题,那么两次迭代之间可化为矩阵相乘,可以很明显地看出是乘法摄动.然而对于带约束的刚-柔体动力学方程,则并不能明显地看出是乘法摄动.但实际上在本文方法中,相邻两次迭代之间是映射的乘法,每迭代一次相当于做一次正则变换,且每次迭代均采用保辛方法计算,因此本文方法称为保辛摄动迭代法.

## 2 算 例

**算例 1** 计算如图 2 所示双摆结构.图中  $L_1 = L_2 = 1$  m,第 1 杆的线密度  $\rho_1 = 12.592$  kg/m.第 2 杆为钢材,密度为  $7.87 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>,弹性模量  $E = 2.06 \times 10^{11}$  Pa,其截面为  $0.04 \times 0.04$  m<sup>2</sup> 的方形.图 2 中,两个小球的质量分别为:  $m_1 = 10$  kg 和  $m_2 = 20$  kg,重力加速度取  $10$  m/s<sup>2</sup>.

初始位移为

$$(X_1, Y_1) = (1.0, 0), \text{ m}; (X_2, Y_2) = (1.0, 1.0), \text{ m}. \tag{32}$$

初始速度为

$$(\dot{X}_1, \dot{Y}_1) = (0, 0), \text{ m/s}; (\dot{X}_2, \dot{Y}_2) = (0, 0), \text{ m/s}. \tag{33}$$

本算例的两个约束分别为

$$X_1^2 + Y_1^2 = L_1^2, (X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 = L_2^2. \tag{34}$$

杆 2 视为弹性杆, 杆 1 视为刚性杆. 计算弹性杆的弹性变形时, 选用 3 个梁振动模态计算. 时间积分 100 s, 时间步长为 0.004 s, 弹性杆采用的 3 个模态圆频率分别为: (583.1, 2 332.3, 5 247.6), rad/s. 而整个摆振动一周大约费时 5.4 s, 其圆频率约为: 1.16 rad/s. 计算结果见图 3~图 8.

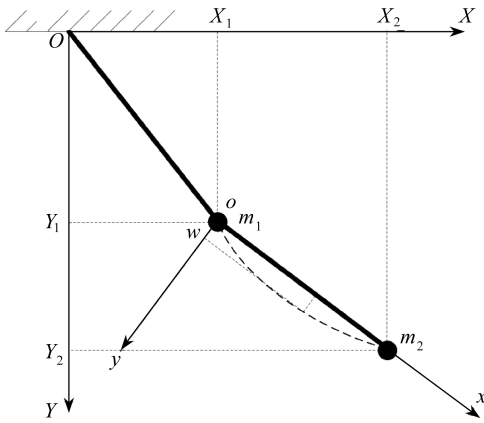


图 2 二摆模型

Fig.2 Model of the double pendulum

图 3 给出的是不同时刻摆的形状, 其中, 弹性杆的相对位移放大 5 000 倍. 图 4 给出了两个质量块的运动轨迹, 其中图 4(a) 描述的是第 1 个质量块的运动轨迹, 可以看到是一个半圆. 图 5 描述了能量的相对误差  $E_e$ . 其中, 能量指的是动能与势能之和, 也即为 Hamilton 函数值. 因为本算例是保守系统, Hamilton 函数值应不随时间变化而变化. 根据初始时刻的位移和速度计算得到初始时刻的 Hamilton 函数值为 -262.960 J, 以此为参考解, 计算各个时间格点上 Hamilton 函数值与此参考解的相对误差, 绘于图 5. 图 6 给出了约束的相对误差, 其纵坐标  $E_c$  表示约束的相对误差, 描述在计算过程中, 各节点的坐标随时间变化时, 满足约束方程

(34) 的情况. 图 7 绘制了一个质点坐标随时间变化的时程响应曲线; 图 8 绘制了弹性杆中点的弹性相对位移时程曲线. 从图 4~6 可见, 保辛摄动方法得到的能量相对误差很小, 约束也充分满足.

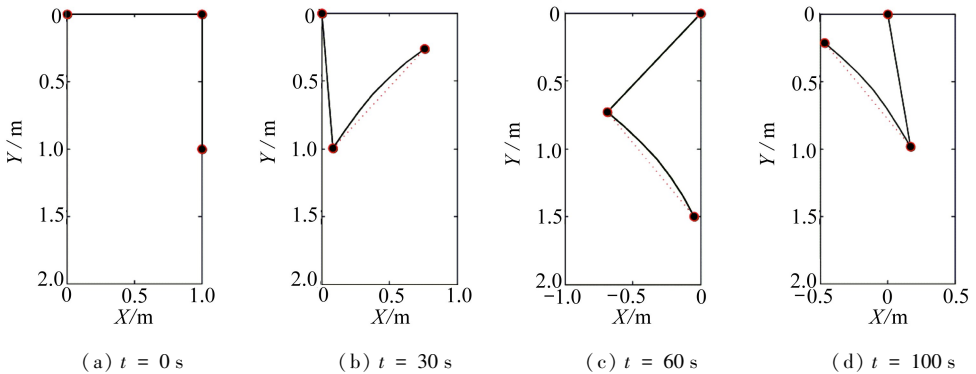
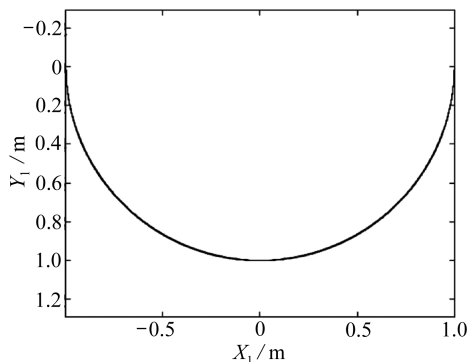


图 3 不同时刻摆的变形(只有动画才能看清)

Fig.3 The double pendulum's shapes at different moments

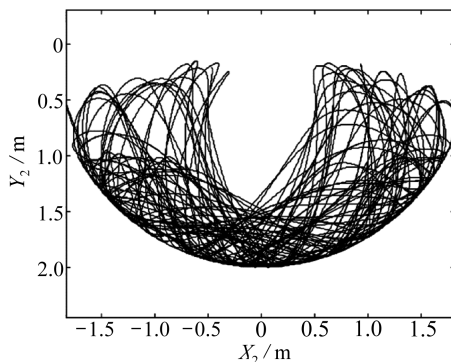
需要注意的是, 本算例中低、高频率相差 500 多倍. 频率相差大, 表明时间积分的刚性高. 直接进行时程积分, 有很大的问题. 保辛摄动迭代算法, 运用了祖冲之方法论, 只要将时间步长取得小些, 收敛已经可以满足.





(a) 第1个质点的轨迹

(a) Trajectory of the 1st mass point



(b) 第2个质点的轨迹

(b) Trajectory of the 2nd mass point

图4 质点的轨迹

Fig.4 Trajectories of the mass points

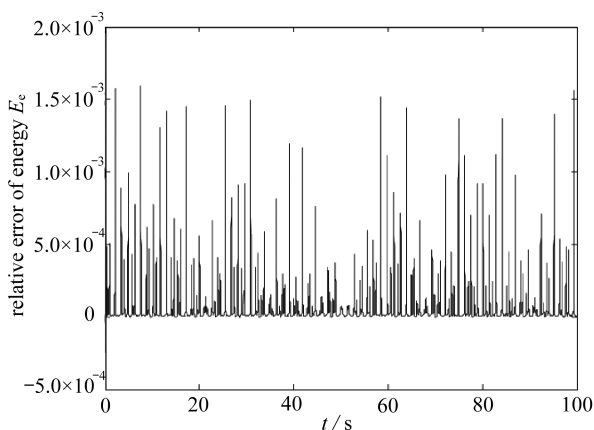
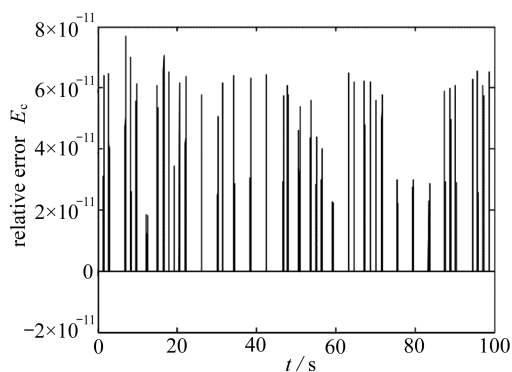


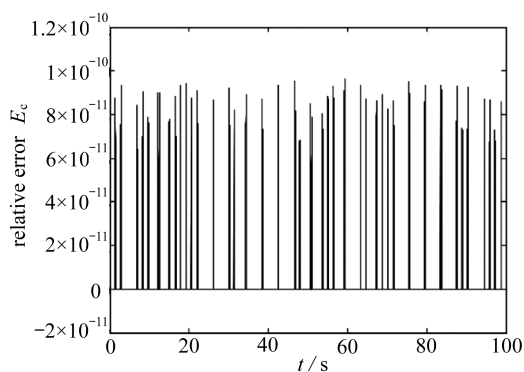
图5 能量的相对误差

Fig.5 Relative error of engery



(a) 第1个约束

(a) The 1st constraint



(b) 第2个约束

(b) The 2nd constraint

图6 约束的相对误差

Fig.6 Relative errors of the constraints

0.004 s 的时间步长对于 (583.1, 2 332.3, 5 247.6), rad/s 的 3 个局部振动频率, 单步已经

是(2.332 4, 9.329 2, 20.9), rad了,表明时间步长大,因 6.28 rad 就是 1 周了.所以,弹性振动部分的解,空间坐标用模态展开,而时间方向用精细积分计算,即所谓半分析法,可得到合理的结果.

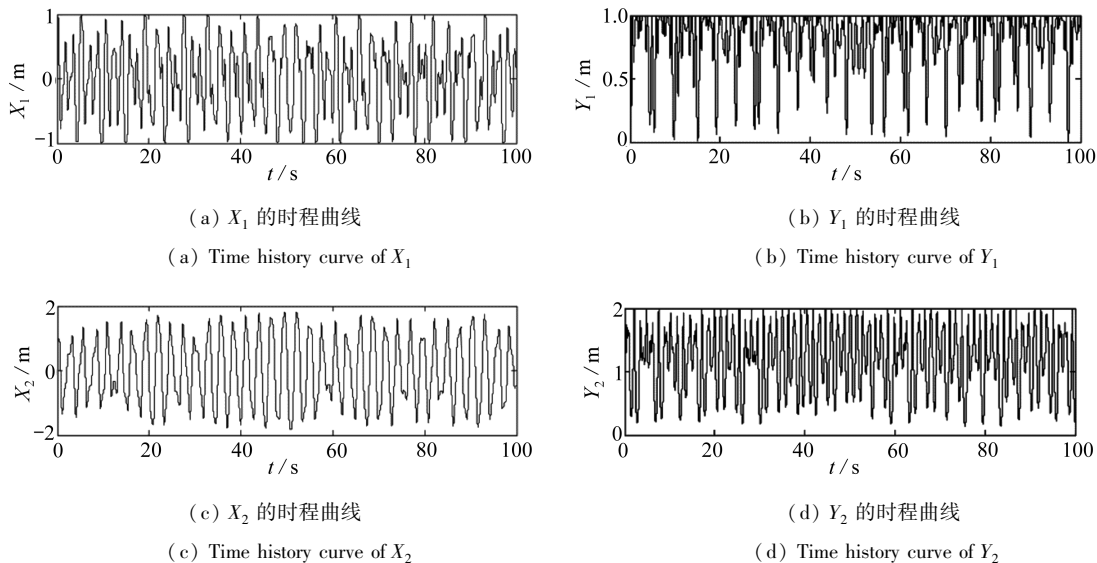


图 7 质点的时程曲线

Fig.7 Time history curves of the mass points' coordinates

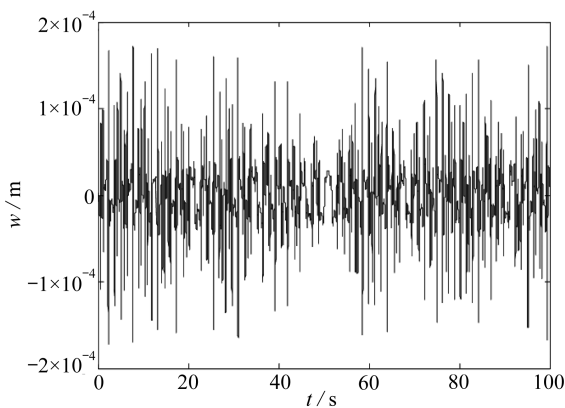


图 8 弹性杆中点相对位移时程曲线

Fig.8 Time history curve of relative displacement at the midpoint of the elastic rod

**算例 2** 计算如图 9 所示的模型,由 3 杆组成,其中  $L_1 = 1$  m,  $L_2 = 2$  m,  $L_3 = 10$  m.第 2 根杆为截面面积  $0.1 \times 0.1$  m<sup>2</sup> 的钢杆,密度为  $7.87 \times 10^3$  kg/m<sup>3</sup>,弹性模量为  $E = 2.06 \times 10^{11}$  Pa.在第 2 根杆  $0.4L_2$  处有一个  $m = 10$  kg 的质量块,因此把第 2 根杆视为弹性杆,而其余两杆看作是刚杆,其线密度均为 15 kg/m.模型中,两个节点的坐标分别为  $(X_1, Y_1)$  和  $(X_2, Y_2)$ ,初始时坐标为

$$(X_1, Y_1) = (1, 0), m, (X_2, Y_2) = (3, 0), m. \quad (35)$$

本算例共考虑 3 个约束方程,分别为

$$\begin{cases} X_1^2 + Y_1^2 = L_1^2, (X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 = L_2^2, \\ (X_2 - 3)^2 + (Y_2 + 10)^2 = L_3^2. \end{cases} \quad (36)$$



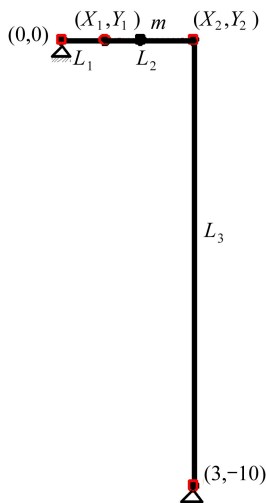


图9 算例2模型

Fig.9 Model of example 2

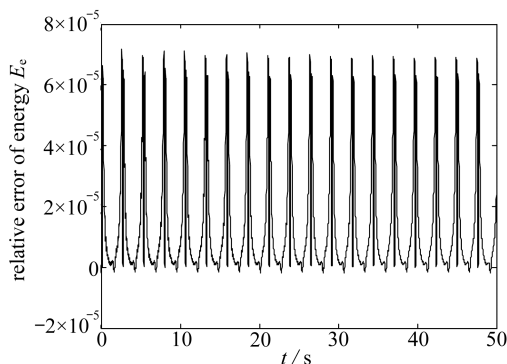


图10 能量的相对误差

Fig.10 Relative error of energy

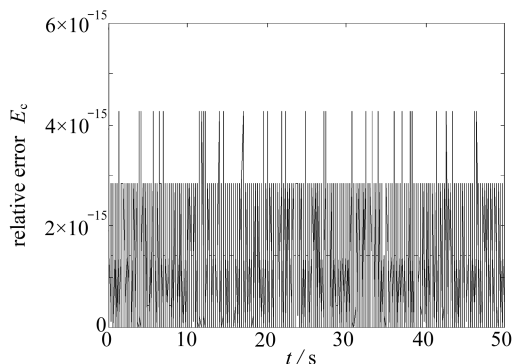
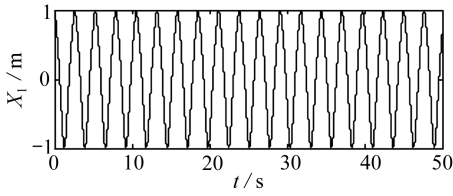


图11 约束的相对误差

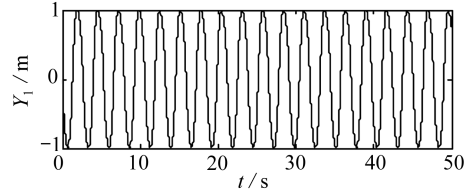
Fig.11 Relative error of the constraints

不考虑重力作用,第1杆的初始角速度为  $\omega = \pi$  rad/s,积分的时间步长为 0.01 s,共积分 50 s.中间弹性杆采用3个模态计算,(1 318, 5 705, 13 017), rad/s,而整个结构振动一周大约费时 2.65 s,其圆频率约为 2.37 rad/s.计算结果见图 10~14,其中图 10 描述了能量的相对误差  $E_e$ ,这里,能量指的是动能与势能之和,也即为 Hamilton 函数值.本算例是保守系统,Hamilton 函数值应不随时间变化而变化,根据初始时刻的位移和速度计算得到初始时刻的 Hamilton 函数值为 441.665 J.以此为参考解,计算各个时间格点上 Hamilton 函数值与此参考解的相对误差  $E_e$ ,绘于图 10.图 11 给出的是各时间格点上,3个约束方程相对误差中的最大相对误差  $E_c$ .图 10~11 表明利用本文提出的保辛摄动迭代算法计算得到的能量相对误差很小,能量守恒和几何约束都满足得很好.图 12 绘制了各节点坐标随时间变化的时程响应曲线;图 13 绘制了弹性杆上质量块的弹性相对位移时程曲线;图 14 绘制的是弹性杆上质量块的运动轨迹.图 15 给出了不同时刻计算模型的形状,其中弹性杆相对位移放大 10 000 倍.在本算例中,低、高频相差 1 000 多倍,时间积分的刚性高.直接进行时程积分,有很大问题.采用保辛摄动迭代法,计算结果很好.



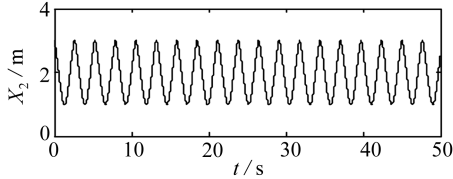
(a)  $X_1$  的时程曲线

(a) Time history curve of  $X_1$



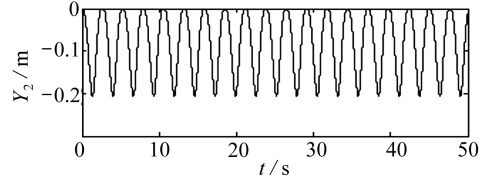
(b)  $Y_1$  的时程曲线

(b) Time history curve of  $Y_1$



(c)  $X_2$  的时程曲线

(c) Time history curve of  $X_2$



(d)  $Y_2$  的时程曲线

(d) Time history curve of  $Y_2$

图 12 节点的位移时程曲线

Fig.12 Time history curves of displacements of the nodes

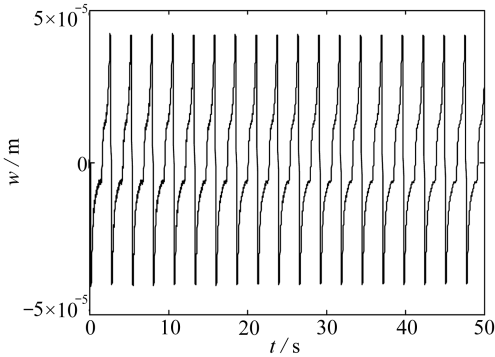


图 13 质点的相对位移

Fig.13 Relative displacement of the mass point

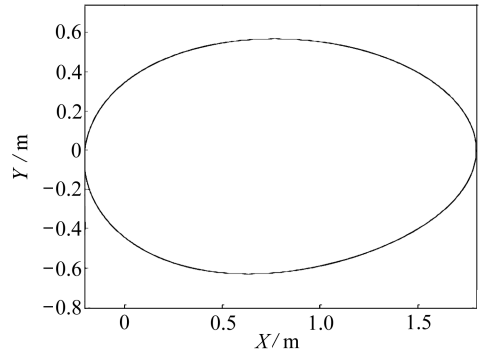
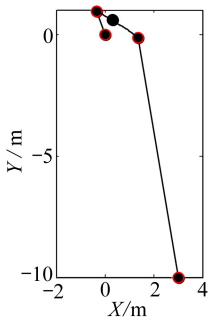
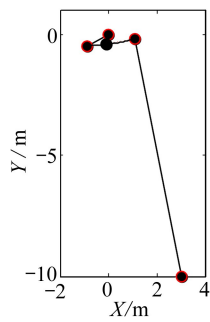


图 14 质点的运动轨迹

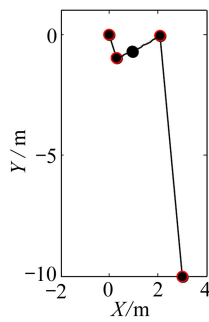
Fig.14 Trajectory of the mass point



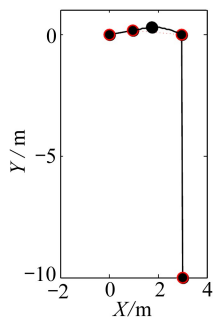
(a)  $t = 15$  s



(b)  $t = 25$  s



(c)  $t = 35$  s



(d)  $t = 45$  s

图 15 不同时刻的形状(只有动画才能看清)

Fig.15 The System's shapes at different moments

### 3 结 论

针对刚-柔体动力学方程,本文提出保辛摄动迭代法,该方法把刚-柔体动力学方程的大范围运动和局部弹性振动分开处理,用 DAE 积分处理大范围运动,而用摄动的思想处理两者之间的耦合项.数值算例表明,本文方法的计算结果能够精确满足约束,同时能量守恒相对误差也可满意,可以采用较大的时间步长进行积分,很好地克服了刚-柔体动力学方程的刚性积分问题.在后续工作中,还将进一步考虑保辛-守恒积分等有效手段.

#### 参考文献(References):

- [1] 于清,洪嘉振. 柔性多体系统动力学的若干热点问题[J]. 力学进展, 1999, **29**(2): 145-154. (YU Qing, HONG Jia-zhen. Some topics on flexible multibody system dynamics[J]. *Advances in Mechanics*, 1999, **29**(2): 145-154. (in Chinese))
- [2] Newmark N M. A method of computation for structural dynamics[J]. *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*, 1959, **85**(3): 67-94.
- [3] Bathe K J, Wilson E L. *Numerical Methods in Finite Element Analysis*[M]. Englewood: Prentice-Hall, 1976.
- [4] Ascher U M, Petzold L R. *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*[M]. Beijing: Science Press, 2009.
- [5] 吴志桥. 非惯性系下柔性结构动力学研究[D]. 硕士学位论文. 长沙: 国防科学技术大学, 2004. (WU Zhi-qiao. Study on dynamics for flexible structure in non-inertial frame[D]. Master Thesis. Changsha: National University of Defense Technology, 2004. (in Chinese))
- [6] 臧永强. 求解多柔体系统动力方程的违约修正零空间法[D]. 硕士学位论文. 西安: 西安电子科技大学, 2009. (ZANG Yong-qiang. The violation correction null space method of dynamical equation of flexible multi-body systems[D]. Master Thesis. Xi'an: Xidian University, 2009. (in Chinese))
- [7] 付士慧,王琪. 多体系统动力学方程违约修正的数值计算方法[J]. 计算力学学报, 2007, **24**(1): 44-49. (FU Shi-hui, WANG Qi. A numerical method for constraint stabilization of dynamic equations of multi-body systems[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2007, **24**(1): 44-49. (in Chinese))
- [8] 赵玉立,吴子燕,邓子辰. 带伸展柔性附件航天器系统动力响应的精细积分算法[J]. 机械科学与技术, 2002, **21**(2): 196-197, 201. (ZHAO Yu-li, WU Zi-yan, DENG Zi-chen. The precise integration method for calculating the dynamic behavior of spacecraft with extensional flexible appendages[J]. *Mechanical Science and Technology*, 2002, **21**(2): 196-197, 201. (in Chinese))
- [9] 张靖姝,于洪洁,洪嘉振. 非线性插值精细积分法在刚柔耦合弹簧摆中的应用[J]. 力学季刊, 2013, **34**(3): 415-422. (ZHANG Jing-shu, YU Hong-jie, HONG Jia-zhen. Nonlinear interpolation precise integration method in rigid-flexible coupling spring pendulum[J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2013, **34**(3): 415-422. (in Chinese))
- [10] 钟万勰,高强. 约束动力系统的分析结构力学积分[J]. 动力学与控制学报, 2006, **4**(3): 193-200. (ZHONG Wan-xie, GAO Qiang. Integration of constrained dynamical system via analytical structural mechanics[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, **4**(3): 193-200. (in Chinese))
- [11] 王勰成. 有限单元法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003. (WANG Xu-cheng. *Finite Element*

- Method*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003.(in Chinese))
- [12] Hinch E J. *Perturbation Methods*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
- [13] 钟万颢, 孙雁. 三类保辛摄动及其数值比较[J]. 动力学与控制学报, 2005, 3(2): 1-9.(ZHONG Wan-xie, SUN Yan. Numerical comparison for three different symplectic perturbation methods [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(2): 1-9.(in Chinese))
- [14] 钟万颢, 姚征. 时间有限元与保辛[J]. 机械强度, 2005, 27(2): 178-183.(ZHONG Wan-xie, YAO Zheng. Time domain FEM and symplectic conservation [J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2005, 27(2): 178-183.(in Chinese))
- [15] 钟万颢, 孙雁. 小参数摄动法与保辛[J]. 动力学与控制学报, 2005, 3(1): 1-6.(ZHONG Wan-xie, SUN Yan. Small parameter perturbation method and symplectic conservation[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(1): 1-6.(in Chinese))
- [16] 钟万颢, 高强. WKBJ 近似保辛吗? [J]. 计算力学学报, 2005, 22(1): 1-7.(ZHONG Wan-xie, GAO Qiang. Is the WKBJ approximation symplectic conservative? [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2005, 22(1): 1-7.(in Chinese))

## Iterative Symplectic Perturbation Method for the Dynamic Analysis of Rigid-Flexible Bodies Equations

WU Feng, GAO Qiang, ZHONG Wan-xie

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment;  
Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology,  
Dalian, Liaoning 116024, P.R.China)

(Contributed by ZHONG Wan-xie, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** The iterative symplectic perturbation method was proposed for the dynamic analysis of rigid-flexible bodies equations. With the proposed method, the low-frequency motion and high-frequency motion were treated separately. The symplectic perturbation method was applied to the coupling terms jointly caused by the low- and high-frequency motions. The proposed method could give correct numerical results with relatively larger time steps. It overcomes the difficult stiff integral problem. Numerical examples show that the proposed method is valid for the dynamic analysis of rigid-flexible bodies equations.

**Key words:** rigid-flexible bodies; symplectic; perturbation; stiffness

**Foundation item:** The National Basic Research Program of China (973 Program)  
(2009CB918501)