

# 强横向激励作用下屈曲梁的稳态幅频特性\*

王 昊<sup>1</sup>, 陈立群<sup>1,2,3</sup>

(1. 上海大学 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;

2. 上海大学 力学系, 上海 200444;

3. 上海大学 上海市力学在能源工程中的应用重点实验室, 上海 200072)

(我刊编委陈立群来稿)

**摘要:** 研究均匀各向同性黏弹性屈曲梁受基座简谐运动激励的横向非线性振动.在简支边界条件和强外激励的作用下,基于二阶 Galerkin 方法截断导出的数学模型,用多尺度法分析了存在 1:2 内共振时的主共振,由可解性条件导出稳态响应.发现幅频响应曲线存在多种跳跃现象.考察了各系数尤其是轴向压力对幅频响应曲线的影响.

**关键词:** 非线性; 黏弹性; 屈曲梁; 受迫振动; 幅频特性

**中图分类号:** O322      **文献标志码:** A

**doi:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.02.006

## 引 言

梁作为一类细长杆件广泛存在于机械、建筑等工程中.当梁受到轴向压力超过一定值时会发生屈曲.梁在屈曲情况下的振动问题是一个值得研究的问题.

屈曲梁的振动及其相关问题已经有大量近似解析研究.周哲玮运用摄动法求解了屈曲梁在大挠度下的弹性曲线和分岔解<sup>[1]</sup>.李庆明考察了动态屈曲的模态<sup>[2]</sup>.Abou-Rayan, Nayfeh 和 Mook 等研究了屈曲梁参激振动下共振时的分岔行为<sup>[3]</sup>.张年梅和杨桂通研究了受横向周期载荷作用的屈曲梁由于三次非线性项所产生的分岔现象<sup>[4]</sup>.Eman 和 Nayfeh 运用 Galerkin 截断和多尺度的方法分别研究了屈曲梁存在 1:1 内共振和 3:1 内共振时的主共振<sup>[5]</sup>.朱媛媛、胡育佳和程昌钧建立了任意变截面 Euler 梁-柱子结构的三维非线性模型,并且分析了一端完全固支一端部分固支的受轴力作用的 Euler 梁的非线性稳定性和后屈曲<sup>[6]</sup>.Lestari 和 Hanagud 研究了不同边界条件下屈曲梁的固有频率,并用线性模态法和 Jacobi 椭圆函数确定了梁的固有频率,发现了不同转动限制下梁的解析解是存在的<sup>[7]</sup>.本文作者研究过在考虑 1:2 内共振条件下,屈曲梁受到弱基础激励的主共振响应问题<sup>[8]</sup>.本文分析强受迫振动的情形,弱受迫振动与强受迫振动的幅频特性曲线呈现完全不同的跳跃现象.

\* 收稿日期: 2013-10-10; 修订日期: 2013-11-28

**基金项目:** 国家自然科学基金(重点项目)(11232009);上海市重点学科建设项目(S30106)

**作者简介:** 王昊(1989—),男,浙江人,硕士生(E-mail: wanghao890818@163.com);

陈立群(1963—),男,上海人,教授,博士,博士生导师(通讯作者. E-mail: lqchen@staff.shu.edu.cn).

## 1 动力学方程和多尺度分析

梁两端铰支,在支承两端受到一对轴向压力  $P$  的作用发生屈曲,并受到由基座带来的强横向简谐激励作用.梁的横向振动位移由屈曲位形和外激励产生的位移两部分组成,即

$$\bar{w}(\bar{x}, t) = b\phi_n(\bar{x}) + \bar{v}(\bar{x}, t), \quad (1)$$

$b$  与轴向压力  $P$  和梁发生第  $n$  阶屈曲时的临界压力有关,如下式:

$$b^2 = 2l(P - P_n) / \left( EA \int_0^l \left( \frac{d\phi_n}{d\bar{x}} \right)^2 d\bar{x} \right), \quad (2)$$

$P_n$  是梁第  $n$  阶屈曲时的临界压力,  $\phi_n(\bar{x})$  是梁第  $n$  阶的屈曲模态,  $l$  为梁长,  $E$  和  $A$  分别为梁的弹性模量和截面积.

基于对其弱受迫振动的分析<sup>[8]</sup>,简支梁控制方程两阶 Galerkin 截断的无量纲形式为

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \bar{\eta}\alpha_1\dot{q}_1 + \omega_1q_1 = -\alpha_2q_1^2 - \alpha_3q_2^2 - \alpha_4q_1^3 - \alpha_5q_1q_2^2 + F\sin(\Omega t), \\ \ddot{q}_2 + \bar{\eta}\beta_1\dot{q}_2 + \omega_2q_2 = -\beta_2q_1q_2 - \beta_3q_2^3 - \beta_4q_1^2q_2, \end{cases} \quad (3)$$

其中  $F$  为外激励幅值项,  $\Omega$  为外激励的频率,其他系数如下:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{I\pi^4}{ml^4}, \alpha_2 = \frac{3EAb\pi^4}{4ml^4}, \alpha_3 = \frac{EAb\pi^4}{ml^4}, \alpha_4 = \frac{EA\pi^4}{4ml^3}, \alpha_5 = \frac{EA\pi^4}{ml^3}, \\ \beta_1 = \frac{16I\pi^4}{ml^4}, \beta_2 = \frac{2EAb\pi^4}{ml^4}, \beta_3 = \frac{4EA\pi^4}{ml^3}, \beta_4 = \frac{EA\pi^4}{ml^3}, \end{cases} \quad (4)$$

$m$  为梁单位长度质量,  $I$  和  $\bar{\eta}$  分别为梁截面惯性矩和黏弹性系数.线性固有频率  $\omega_1$  和  $\omega_2$  为

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{Ab^2\pi^4E}{2l^5m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{12I\pi^4E}{l^4m}}. \quad (5)$$

对方程组(3)进行近似解析分析,用多尺度方法寻求如下形式的两阶展开式<sup>[9]</sup>:

$$q_n(t, \varepsilon) = \varepsilon q_{n1}(T_0, T_1) + \varepsilon^2 q_{n2}(T_0, T_1) + \dots, \quad (6)$$

其中  $n = 1, 2$ ;  $\varepsilon$  是无量纲的小参数,时间快慢尺度为  $T_0 = t$  和  $T_1 = \varepsilon t$ .设  $\eta = \varepsilon\bar{\eta}$ .弱受迫振动有  $F = \varepsilon^2 f$ <sup>[8]</sup>,而在现在研究的强受迫振动中,设  $F = \varepsilon f$ .将式(6)代入到式(3),并使  $\varepsilon$  的同次幂相等,得到

$$D_0^2 q_{11} + \omega_1^2 q_{11} = f\sin(\Omega T_0), \quad D_0^2 q_{21} + \omega_2^2 q_{21} = 0, \quad (7)$$

$$\begin{cases} D_0^2 q_{12} + \omega_1^2 q_{12} = -\eta\alpha_1 D_0 q_{11} - 2D_0 D_1 q_{11} - \alpha_2 q_{11}^2 - \alpha_3 q_{21}^2, \\ D_0^2 q_{22} + \omega_2^2 q_{22} = -\eta\beta_1 D_0 q_{21} - 2D_0 D_1 q_{21} - \beta_2 q_{11} q_{21}, \end{cases} \quad (8)$$

其中  $D_0 = \partial/\partial T_0$ ,  $D_1 = \partial/\partial T_1$ .

非齐次微分方程(7)的解为

$$q_{11} = A_1(T_1) e^{i\omega_1 T_0} + f\Lambda e^{i\Omega T_0} + cc, \quad q_{21} = A_2(T_1) e^{i\omega_2 T_0} + cc, \quad (9)$$

其中  $cc$  代表前面所有项的共轭,  $\Lambda = 1/2i(\omega_1^2 - \Omega^2)$ .将式(9)代入到式(8),化简得到

$$\begin{cases} D_0^2 q_{12} + \omega_1^2 q_{12} = -2i\omega_1 \dot{A}_1 e^{i\omega_1 T_0} - i\omega_1 \eta \alpha_1 A_1 e^{i\omega_1 T_0} - \alpha_2 (A_1^2 e^{2i\omega_1 T_0} + A_1 \bar{A}_1) - \\ \alpha_3 (A_2^2 e^{2i\omega_2 T_0} + A_2 \bar{A}_2) - i\Omega f \eta \alpha_1 \Lambda e^{i\Omega T_0} + cc + NST, \\ D_0^2 q_{22} + \omega_2^2 q_{22} = -2i\omega_2 \dot{A}_2 e^{i\omega_2 T_0} - i\omega_2 \eta \beta_1 A_2 e^{i\omega_2 T_0} - \\ \beta_2 (A_1 A_2 e^{i(\omega_1 + \omega_2) T_0} + A_1 \bar{A}_2 e^{i(\omega_1 - \omega_2) T_0}) + cc + NST, \end{cases} \quad (10)$$

式中  $\bar{A}_n$  即为  $A_n$  的共轭项, NST 代表不会给解带来长期项的所有项。

## 2 稳态响应

研究存在内共振条件下, 弱受迫屈曲梁发生一阶主共振的振动特性, 引入两个解谐参数  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ , 分别表示  $2\omega_2$  接近  $\omega_1$  的程度和  $\Omega$  接近  $\omega_1$  的程度<sup>[10]</sup>, 即

$$\omega_1 = 2\omega_2 + \varepsilon\sigma_1, \quad \Omega = \omega_1 + \varepsilon\sigma_2. \quad (11)$$

将式(11)代入到式(10), 提取  $e^{i\omega_1 T_0}$  和  $e^{i\omega_2 T_0}$  的系数并令其等于 0, 得到可解性条件

$$\begin{cases} 2i\omega_1 \dot{A}_1 + i\omega_1 \eta \alpha_1 A_1 + i(\omega_1 + \varepsilon\sigma_2) \alpha_1 \eta f \Lambda + \alpha_3 A_2^2 e^{-i\sigma_1 T_1} = 0, \\ 2i\omega_2 \dot{A}_2 + i\omega_2 \eta \beta_1 A_2 + \beta_2 A_1 \bar{A}_2 e^{i\sigma_1 T_1} + \beta_2 \bar{f} \bar{A}_2 \Lambda e^{i(\sigma_1 + \sigma_2) T_1} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

将  $A_1, A_2$  写作极坐标形式

$$A_1 = \frac{1}{2} a_1 e^{i\theta_1}, \quad A_2 = \frac{1}{2} a_2 e^{i\theta_2}, \quad (13)$$

其中  $a_1, a_2, \theta_1$  和  $\theta_2$  均为  $T_1$  的函数。

将式(13)代入式(12)中, 并分离实部虚部, 得到平均化方程组。对应稳态响应的不动点满足方程组:

$$\begin{cases} 0 = -a_2^2 \Gamma_1^R \cos \gamma_1 - a_2^2 \Gamma_1^I \sin \gamma_1 - f \Gamma_2^R \cos \gamma_2 + f \Gamma_2^I \sin \gamma_2 - \frac{1}{2} \eta \alpha_1 a_1, \\ 0 = -a_1 a_2 \Gamma_3^R \cos \gamma_1 + a_1 a_2 \Gamma_3^I \sin \gamma_1 - a_2 \Gamma_4^R (\cos \gamma_1 \cos \gamma_2 - \sin \gamma_1 \sin \gamma_2) - \\ \quad \frac{1}{2} \eta \beta_1 a_2 + a_2 \Gamma_4^I (\cos \gamma_1 \sin \gamma_2 + \sin \gamma_1 \cos \gamma_2), \\ 0 = \sigma_1 + \frac{1}{a_1} (a_2^2 \Gamma_1^R \sin \gamma_1 - a_2^2 \Gamma_1^I \cos \gamma_1 - f \Gamma_2^R \sin \gamma_2 - f \Gamma_2^I \cos \gamma_2) + \\ \quad 2 [a_1 \Gamma_3^R \sin \gamma_1 + a_1 a_2 \Gamma_3^I \cos \gamma_1 + \Gamma_4^R (\cos \gamma_1 \sin \gamma_2 + \sin \gamma_1 \cos \gamma_2) + \\ \quad \Gamma_4^I (\cos \gamma_1 \cos \gamma_2 + \sin \gamma_1 \sin \gamma_2)], \\ 0 = \sigma_2 - \frac{1}{a_1} (a_2^2 \Gamma_1^R \sin \gamma_1 - a_2^2 \Gamma_1^I \cos \gamma_1 - f \Gamma_2^R \sin \gamma_2 - f \Gamma_2^I \cos \gamma_2), \end{cases} \quad (14)$$

其中上标 R 表示实数部分, 上标 I 表示虚数部分, 且

$$\begin{cases} \gamma_1 = \sigma_1 T_1 - \theta_1 - 2\theta_2, \quad \gamma_2 = \sigma_2 T_1 - \theta_1, \\ \Gamma_1 = \frac{\alpha_3}{4i\omega_1}, \quad \Gamma_2 = \frac{(\omega_1 + \varepsilon\sigma_2) \eta \alpha_1 \Lambda}{\omega_1}, \quad \Gamma_3 = \frac{\beta_2}{4i\omega_2}, \quad \Gamma_4 = \frac{\beta_2 f \Lambda}{2i\omega_2}. \end{cases} \quad (15)$$

通过对平均化方程组在不动点线性化系统的分析可以判断稳态响应的稳定性。

## 3 数值例子

下面用数值算例来讨论各参数对轴向受迫振动屈曲梁振幅的影响。取 2 m 长钢梁, 截面规格  $0.04 \times 0.02 \text{ m}^2$ , 密度  $7850 \text{ kg/m}^3$ 。假定内共振完全协调  $\sigma_1 = 0$ , 以一阶主共振的解谐参数  $\sigma_2$  为控制参数, 绘制频率响应曲线, 分别研究黏弹性系数  $\eta$ 、外激励幅值  $f$  对共振响应的影响。稳定响应曲线用实线表示; 不稳定的响应曲线用虚线表示。

若给定  $f = 0.1$ , 图 1 给出了不同黏弹性系数 ( $\eta = 0.01, \eta = 0.03, \eta = 0.05$ ) 对前两阶模态的主共振频率响应曲线的影响. 可见, 黏弹性系数对接近完全共振时响应的影响不大. 但在不完全共振时, 随着黏弹性系数的增大, 跳跃现象的范围变小, 且幅值同时减小.

若给定  $\eta = 0.001$ , 图 2 给出了外激励幅值 ( $f = 0.01, f = 0.02, f = 0.03$ ) 对前两阶模态的主共振频率响应曲线的影响. 由图 2 可知, 较大的激励幅值能增大响应的幅值, 同时扩大共振频率的带宽.

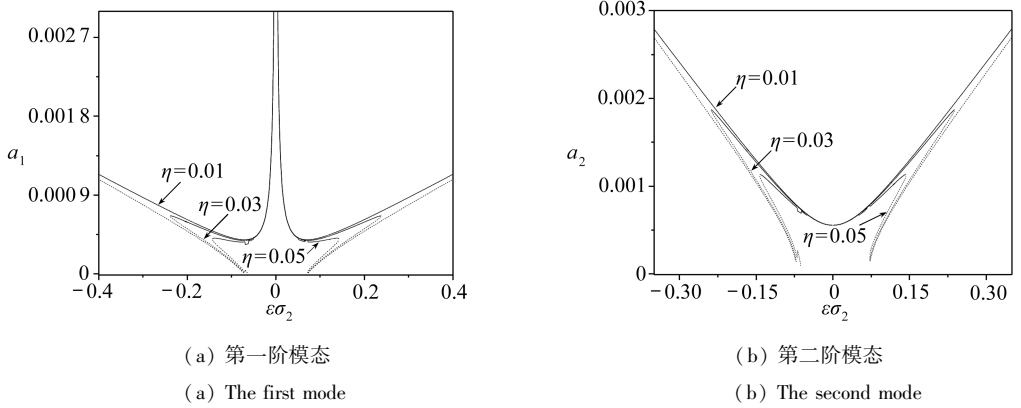


图 1 黏弹性系数对前两阶模态的主共振频率响应曲线的影响

Fig.1 The effect of changing viscoelastic coefficient on the amplitude-frequency characteristics

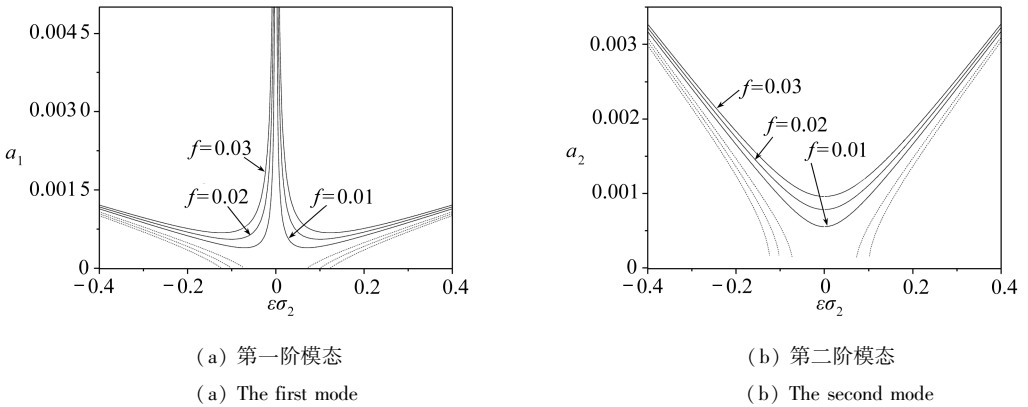
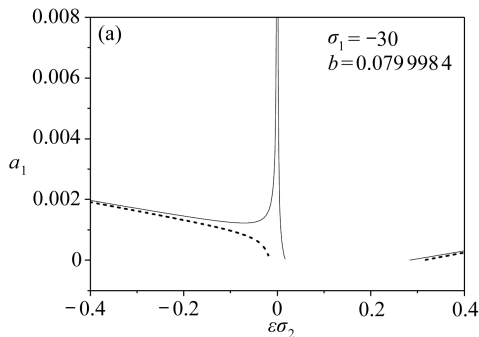


图 2 不同外激励幅值对前两阶模态的主共振频率响应曲线的影响

Fig.2 The effect of changing external excitation on the amplitude-frequency characteristics



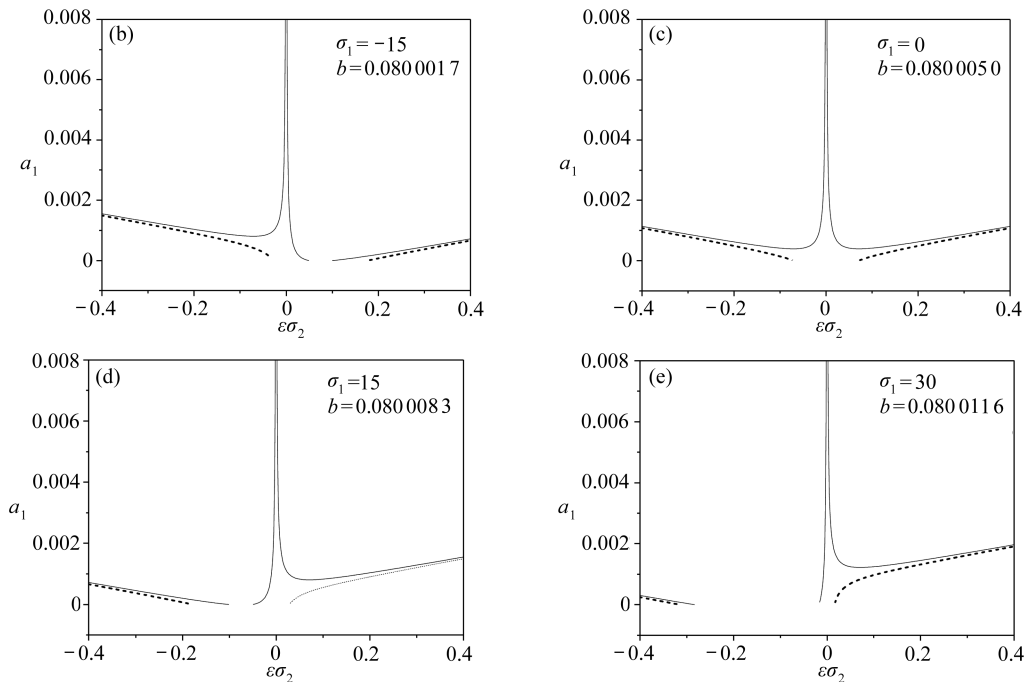
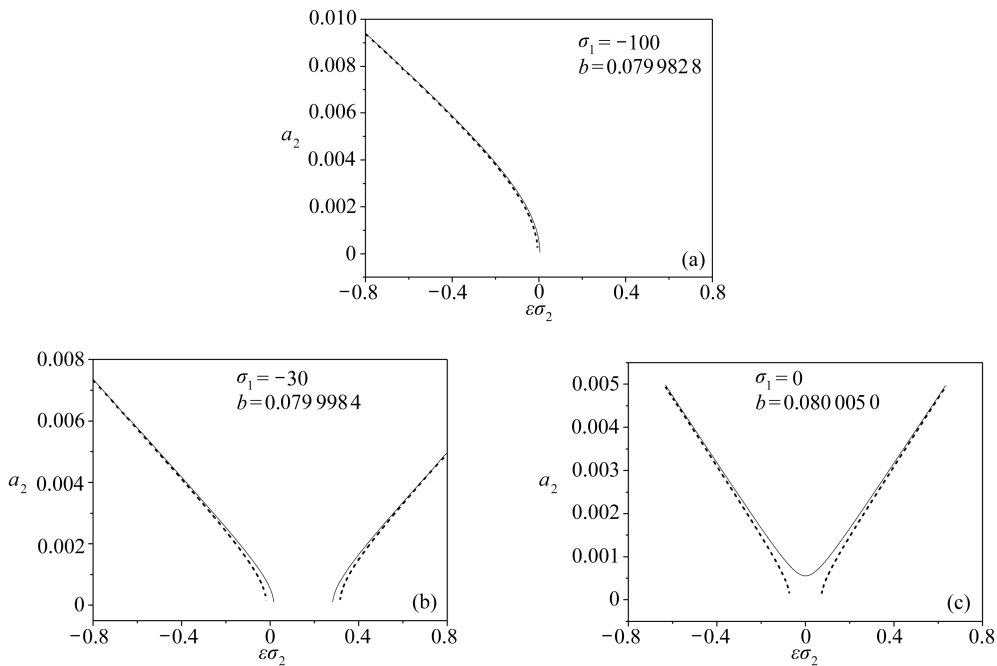


图3 轴向压力的变化对第一阶模态的影响

Fig.3 The effect of changing axial force on the first mode

由图3中曲线的变化可以看出,随着 $b$ 的增大(轴向压力 $P$ 的增大),幅频响应曲线左半段曲线逐渐降低,并且过了临界值( $b = 0.080005$ )之后,曲线逐渐与右半段分离并且消失;曲线右半段逐渐升高,在过临界值( $b = 0.080005$ )之前,曲线逐渐完全至与左半段相连。



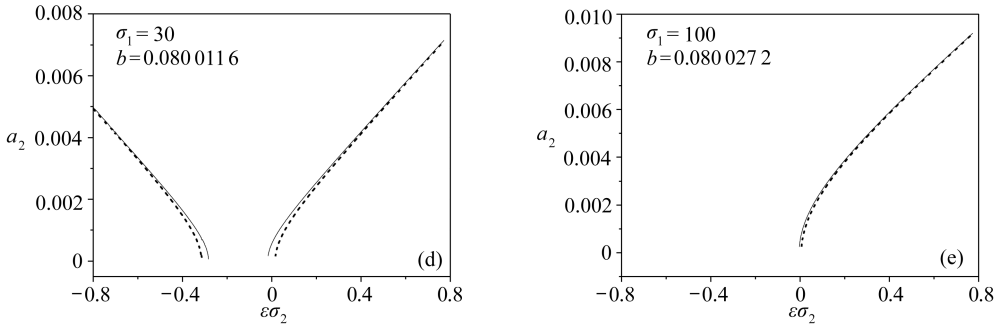


图 4 轴向压力的变化对第二阶模态的影响

Fig.4 The effect of changing axial force on the second mode

由图 4 中曲线的变化可以看出,随着  $b$  的增大(轴向压力  $P$  的增大),幅频响应曲线左半段曲线逐渐降低,并且过了临界值( $b = 0.080005$ )之后,曲线大幅向左偏移;曲线右半段逐渐升高,在过临界值( $b = 0.080005$ )之前,曲线大幅向右偏移。

## 4 结 论

本文研究了轴向受力黏弹性屈曲梁非线性强受迫振动.基于二级 Galerkin 截断,应用多尺度法确定了黏弹性梁的内-外共振共存时的稳态响应,得到了幅频响应曲线.通过数值计算,发现了在 1:2 内共振下,主共振的稳态响应出现的各种跳跃现象,并考察了黏弹性系数、外激励幅值和轴向压力对跳跃现象的影响。

## 参考文献(References):

- [1] 周哲玮. 屈曲杆大挠度弹性曲线的摄动解及其不完全分岔问题的奇异摄动解法[J]. 应用数学和力学, 1987, **8**(4): 337-345. (ZHOU Zhe-wei. The perturbation solution of the large elastic curve of buckled bars and the singular perturbation method for its imperfect bifurcation problem[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1987, **8**(4): 337-345. (in Chinese))
- [2] 李庆明. 弹性杆的动态屈曲模态[J]. 应用数学和力学, 1990, **11**(1): 61-66. (LI Qing-ming. Dynamic buckling mode of an elastic bar[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1987, **11**(1): 61-66. (in Chinese))
- [3] Abou-Rayan A M, Nayfeh A H, Mook D T, Nayfeh M A. Nonlinear response of a parametrically excited buckled beam[J]. *Nonlinear Dynamics*, 1993, **4**(5): 499-525.
- [4] 张年梅, 杨桂通. 非线性弹性梁在谐波激励下的次谐波和超次谐波响应[J]. 应用数学和力学, 1999, **20**(12): 1224-1228. (ZHANG Nian-mei, YANG Gui-tong. Subharmonic and ultra-subharmonic response of nonlinear elastic beams subjected to harmonic excitation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1999, **20**(12): 1224-1228. (in Chinese))
- [5] Eman S A, Nayfeh A H. On the nonlinear dynamics of a buckled beam subject to a primary-resonance excitation[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2004, **35**(1): 1-17.
- [6] 朱媛媛, 胡育佳, 程昌钧. Euler 型梁-柱结构的非线性稳定性和后屈曲分析[J]. 应用数学和力学, 2011, **32**(6): 674-682. (ZHU Yuan-yuan, HU Yu-jia, CHENG Chang-jun. Analysis of nonlinear stability and post-buckling for the Euler-type beam-column structure[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2011, **32**(6): 674-682. (in Chinese))

- [7] Lestari W, Hanagud S. Nonlinear vibration of buckled beam: some exact solutions[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, **38**(26/27): 4741-4757.
- [8] 王昊, 张艳雷, 陈立群. 轴向受力屈曲梁受迫振动的稳态响应[J]. 上海大学学报. doi: 10.3969/j.issn.1007-2861.2013.07.025. (WANG Hao, ZHANG Yan-lei, CHEN Li-qun. The steady-state response of forced vibration for a buckling beam under axial press[J]. *Journal of Shanghai University*. doi: 10.3969/j.issn.1007-2861.2013.07.025.)
- [9] 刘延柱, 陈立群. 非线性振动[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001. (LIU Yan-zhu, CHEN Li-qun. *Nonlinear Vibration*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2001. (in Chinese))
- [10] Nayfeh A H, Mook D T. *Nonlinear Oscillations*[M]. New York: Wiley-Interscience, 1979.

## Steady-State Amplitude-Frequency Characteristics of Axially Buckled Beams Under Strong Transverse Excitation

WANG Hao<sup>1</sup>, CHEN Li-qun<sup>1, 2, 3</sup>

(1. *Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,*

*Shanghai University, Shanghai 200072, P.R.China;*

*2. Department of Mechanics, Shanghai University,*

*Shanghai 200444, P.R.China;*

*3. Shanghai Key Laboratory of Mechanics in Energy Engineering,*

*Shanghai University, Shanghai 200072, P.R.China)*

(Contributed by CHEN Li-qun, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** A nonlinear vibration analysis was conducted to determine the steady-state response of simply-supported viscoelastic axially buckled beams to harmonic base excitation. Based on the 2-order Galerkin truncation of the governing equation, and in the case of strong excitation, the solvability condition was derived with the multiple-scale method in the presence of 1:2 internal resonance, to analyze the primary strong external resonance. Various jumping phenomena were revealed in the amplitude-frequency characteristic curves, and the effects of related parameters, especially the axial force, on the phenomena were examined.

**Key words:** nonlinearity; viscoelasticity; buckled beam; forced vibration; amplitude-frequency characteristics

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China (Major Program) (11232009)