

# 刚体动力学的四元数表示及保辛积分\*

徐小明, 钟万勰

(大连理工大学 工程力学系; 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

(本刊编委钟万勰来稿)

**摘要:** 基于刚体定点转动的四元数表示,运用分析结构力学方法,引入离散系统作用量代替四元数微分方程,并在积分点严格满足四元数模等于1的约束条件,进行时间积分.则按分析结构力学理论,不但达到了积分的保辛且区段内部约束条件也可在变分原理意义下近似满足.对重陀螺进行数值仿真,结果满意.

**关键词:** 分析结构力学; 四元数; 刚体动力学; 保辛积分; 重陀螺

**中图分类号:** TP391.9; O313.3      **文献标志码:** A

**doi:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.01.001

## 引 言

四元数的数学概念是1843年首先由Hamilton(哈密顿)提出的.20世纪中叶以来,随着现代控制理论、计算机科学以及航天技术等的飞速发展,四元数逐渐被人们所重视<sup>[1]</sup>.与传统Euler角相比<sup>[2]</sup>,四元数描述刚体旋转不涉及三角函数,不会出现奇异值,特别适合数值仿真.然而,在四元数描述的运动学方程中,隐含着四元数模等于1的约束条件,这使得直接使用差分法进行数值积分会发生数值漂移,随着积分时间的增长,范数将逐渐偏离1,为此必须限制时间步长并进行范数修正<sup>[3]</sup>,这限制了四元数在刚体动力学仿真中的应用.

本文从Cayley-Klein(凯瑞-克莱因)参量<sup>[2]</sup>入手,以西矩阵表述四元数运算,得出用四元数表述的坐标旋转矩阵.根据正交矩阵群的Lie代数为反对称矩阵,推导出角速度与四元数之间的对应关系.从而将问题转化为微分-代数方程的求解.然而采用传统数值方法求解微分-代数方程往往效果不佳.

中国古代著名数学家祖冲之(A.D.429—A.D.500),他计算圆周率 $\pi$ 已经达到8位有效数字,比欧洲早1100年.可从圆周率是怎么计算开始探讨.祖冲之的方法就是用直径为1的正多角形边的总长度代替.只有多角形的角点,要求全部处于圆周上.角点的数目越多,多角形边的总长度就越逼近于 $\pi$ .显然,边两端的节点处于圆周上,满足约束条件,而其连接直线(二维空间Euclid度量下的短程线)则不在圆周上,没有满足约束条件.所以说,约束条件不必处处满足,只要在节点处严格满足约束条件就可以了.所以根据分析结构力学<sup>[4]</sup>基本观点,并借鉴祖

\* 收稿日期: 2013-10-07; 修订日期: 2013-11-03

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973计划)(2009CB918501)

作者简介: 徐小明(1986—),男,辽宁东港人,博士生(通讯作者. E-mail: xxm@mail.dlut.edu.cn);  
钟万勰(1934—),男,浙江德清人,教授,院士(E-mail: zwoffice@dlut.edu.cn).

冲之方法论,引入离散系统的区段作用量,并在积分点上严格满足约束条件<sup>[5]</sup>,进行逐步积分;而短程线则更换为在动力学意义下的;于是可保证四元数模等于 1 的约束条件在变分原理意义下近似满足,并且积分保辛.对重陀螺的仿真算例可以验证,数值结果令人满意.

## 1 刚体旋转的正交变换与四元数表示

线性矩阵代数关于本征值有定理, $n$  维对称矩阵  $\mathbf{R}$  有  $n$  个本征值及对应的本征向量,它们互相正交;以这些向量为列排列为矩阵,得到正交矩阵.这些是在实数区域内表达的.

扩展到复数域,实数对称矩阵对应于复数的 Hermite 矩阵  $\mathbf{R}_H, \mathbf{R}_H^H = \mathbf{R}_H$ , 上标 H 代表 Hermite 对称. $\mathbf{R}_H$  也取  $n$  个实数本征值及对应的本征向量,它们互相 Hermite 正交.互相 Hermite 正交向量组成的矩阵,称为么正(unitary, U-)矩阵.

对于刚体定点转动,设惯性坐标系为  $Oxyz$ ,贴体坐标系为  $Ox'y'z'$ ,贴体坐标轴与主惯性轴同.由于用 Euler 角描述刚体旋转比较复杂,因此人们运用二维复数空间变换群  $SU(2)$  与三维空间的正交变换群  $O^+(3)$  的同态关系,给出了刚体旋转的四元数的表达<sup>[2]</sup>.如果规定  $SU(2)$  的元素  $\mathbf{Q}$  只对应于  $O^+(3)$  的元素,则对应关系成为同构.

按文献[2]中 4.5 节所述,构造二维复数矩阵 U-矩阵:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{bmatrix}, \alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1, \quad (1)$$

其中  $\alpha, \beta$  为 Cayley-Klein 参量,复数.类比于正交变换群行列式为 1,二维 U-矩阵也应满足其行列式为 1,这已在  $\mathbf{Q}$  阵的构造式(1)中给定.下面将 U-矩阵的变换与三维实数空间的点联系起来.设空间点  $A$  的惯性坐标为  $(x, y, z)$ ,其在贴体坐标系下可表述为  $(x', y', z')$ .用  $(x, y, z)$  构造一个二维 Hermite 矩阵:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其特点是迹为 0.将  $\mathbf{P}$  阵进行 U-矩阵  $\mathbf{Q}$  的相似变换:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{Q}\mathbf{P}\mathbf{Q}^H. \quad (3)$$

由于相似变换不改变矩阵的迹,所以  $\mathbf{P}'$  也是 0 迹的 Hermite 矩阵,只有 3 个独立参数,可表示为

$$\mathbf{P}' = \begin{bmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{bmatrix}. \quad (4)$$

这样就得到了从  $(x, y, z)$  到  $(x', y', z')$  的变换.行列式的值在式(3)的相似变换下不变,从而有等式

$$|\mathbf{P}| = -(x^2 + y^2 + z^2) = -(x'^2 + y'^2 + z'^2) = |\mathbf{P}'|,$$

表明长度不变.因  $\mathbf{P}$  对于坐标是线性的,所以空间任何向量的长度全部不变,这表明仅仅是空间旋转,不会改变刚体的特性.这样,U-矩阵  $\mathbf{Q}$  便与空间旋转变换发生了对应关系.令

$$\alpha = e_0 + ie_3, \beta = e_2 + ie_1, \quad (5)$$

则  $e_0, e_1, e_2, e_3$  便是通常的四元数.并有约束方程

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1. \quad (6)$$

根据式(3)的 U-变换,并代入关系式(5),则可得到用四元数表示的空间坐标旋转矩阵:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 & 2(e_1e_2 + e_0e_3) & 2(e_1e_3 - e_0e_2) \\ 2(e_1e_2 - e_0e_3) & e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 & 2(e_2e_3 + e_0e_1) \\ 2(e_1e_3 + e_0e_2) & 2(e_2e_3 - e_0e_1) & e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

满足

$$\mathbf{x}' = \mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \{x \ y \ z\}^T, \quad \mathbf{x}' = \{x' \ y' \ z'\}^T, \quad (8)$$

即为从  $Oxyz$  坐标系到  $Ox'y'z'$  坐标系的正交转换。

以上讲的是有限转动,但动力学有微分方程,计算动能要角速度,要微商,微商要无穷小的旋转变换。显然,无穷小的旋转变换可用  $e_1, e_2, e_3$  来表示。但从约束条件知  $1 - e_0$  已经是  $e_1, e_2, e_3$  的高阶小量了。原来在惯性坐标系的向量  $\mathbf{d}$ , 转换到贴体坐标系中的向量是  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{d}$ 。贴体坐标是要随时间变换的,表明正交矩阵  $\mathbf{T}(t)$  是时间的函数,在时间点增加很小的  $\eta$  后

$$\mathbf{A}(t) = \lim_{\eta \rightarrow 0} [\mathbf{T}(t + \eta) - \mathbf{T}(t)] / \eta, \quad \mathbf{T}(t + \eta) \approx \mathbf{T}(t) + \eta \mathbf{A}(t). \quad (9)$$

然而运用普通微商定义,有些不太理想,因为正交矩阵有群的性质,而群是有其乘法定义的。在群上也应有微商定义,当然仍用其群的乘法规则

$$\mathbf{T}(t + \eta) = \mathbf{T}(\eta) \cdot \mathbf{T}(t), \quad \mathbf{T}(\eta) \approx [\mathbf{I} + \mathbf{A}(\eta)], \quad (10)$$

其中  $\mathbf{T}(\eta)$  是左乘,代表了从  $t$  时刻到  $t + \eta$  时刻的坐标变换,当  $\eta$  为无穷小量时,  $\mathbf{T}(\eta)$  应接近于单位阵  $\mathbf{I}$ , 单位阵对应于  $e_0 = 1, e_1 = e_2 = e_3 = 0$ 。而  $\mathbf{A}(\eta) \approx \eta \mathbf{A}_0$  的乘法因子改变了  $\mathbf{T}$ , 由于在无穷小变换下,  $e_1, e_2, e_3 = O(\eta)$ , 从而  $e_0 = 1 - O(\eta^2)$ 。参考式(7),对  $\mathbf{T}(\eta)$  进行 Taylor 展开,在  $O(\eta)$  量级有

$$\mathbf{T}(\eta) \approx \mathbf{I} + \eta \mathbf{A}_0, \quad \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 2\dot{e}_3 & -2\dot{e}_2 \\ -2\dot{e}_3 & 0 & 2\dot{e}_1 \\ 2\dot{e}_2 & -2\dot{e}_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

需要提醒的是:  $\dot{e}_i (i = 1, 2, 3)$  是在  $t$  时刻初始值为  $e_0 = 1, e_1 = e_2 = e_3 = 0$  贴体坐标系中的瞬时量,并不是  $e_1, e_2, e_3$  简单的导数,不要混淆。这样根据式(9)~(11),容易导出

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{T}(t), \quad (12)$$

其中,  $\mathbf{A}_0$  是反对称阵,表明反对称矩阵是正交矩阵群的 Lie 代数<sup>[6]</sup>。在  $U$ -变换下,式(12)的等价形式为

$$\dot{\mathbf{Q}}(t) = \mathbf{U}_0 \mathbf{Q}(t), \quad \mathbf{U}_0 = \begin{bmatrix} \dot{e}_3 & \dot{e}_2 + \dot{e}_1 \\ -\dot{e}_2 + \dot{e}_1 & -\dot{e}_3 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

## 2 相对坐标内的运动

根据刚体运动学知识<sup>[2]</sup>,对于任意矢量  $\mathbf{r}$ ,其绝对速度  $\mathbf{v}_a$  可表示为

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{v}_a = \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_a, \quad \mathbf{v}_r = \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_r, \quad (14)$$

其中下标  $a$  与  $r$  分别表示从惯性系观测和贴体系观测,若  $\mathbf{r}$  固定于刚体上,则有  $\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$ 。此时上式在贴体坐标系下可以表示为

$$\mathbf{v}'_a = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}', \quad (15)$$

其中

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z'} & \omega_{y'} \\ \omega_{z'} & 0 & -\omega_{x'} \\ -\omega_{y'} & \omega_{x'} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}'_a = \{v_{ax'} \quad v_{ay'} \quad v_{az'}\}^T, \mathbf{r}' = \{r_{x'} \quad r_{y'} \quad r_{z'}\}^T,$$

$\mathbf{v}'_a, \mathbf{r}'$  分别表示  $\mathbf{v}_a$  与  $\mathbf{r}$  在贴体坐标系下的坐标表示,  $\boldsymbol{\omega}' = \{\omega_{x'} \quad \omega_{y'} \quad \omega_{z'}\}^T$  为角速度矢量  $\boldsymbol{\omega}$  在贴体坐标系下的坐标向量, 不加说明的话  $\mathbf{v}_a, \mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}$  表示本身在惯性坐标系下的坐标向量. 明确了上述坐标关系, 再根据坐标转换(8), 以及式(12), 又可以得到

$$\mathbf{v}'_a = T\mathbf{v}_a = T \frac{d}{dt}(T^T \mathbf{r}') = TT^T \mathbf{A}_0^T \mathbf{r}' = -\mathbf{A}_0 \mathbf{r}'. \quad (16)$$

对比式(15)与(16), 可得到  $\boldsymbol{\Omega} = -\mathbf{A}_0$ , 于是可得到关系式

$$2\dot{e}_3 = \omega_{z'}, \quad 2\dot{e}_2 = \omega_{y'}, \quad 2\dot{e}_1 = \omega_{x'},$$

再次提及  $\dot{e}_i (i = 1, 2, 3)$  为贴体坐标系中的瞬时量. 现在找到了它在真实状态中所对应的物理量, 即贴体坐标系中的角速度分量. 如此一来, 根据式(13)便得到

$$U_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i\omega_{z'} & \omega_{y'} + i\omega_{x'} \\ -\omega_{y'} + i\omega_{x'} & -i\omega_{z'} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

由于  $\boldsymbol{Q}$  为 U-矩阵,  $\boldsymbol{Q}^H \boldsymbol{Q} = \mathbf{I}$ , 所以

$$U_0 = U_0 \boldsymbol{Q}(t) \boldsymbol{Q}(t)^H = \dot{\boldsymbol{Q}}(t) \boldsymbol{Q}(t)^H. \quad (18)$$

设四元数向量为  $\mathbf{q} = \{e_0 \quad e_1 \quad e_2 \quad e_3\}^T$ , 展开式(18)便可得到

$$\omega_{x'} = 2\mathbf{q}^T \mathbf{G}_1 \dot{\mathbf{q}}, \quad \omega_{y'} = 2\mathbf{q}^T \mathbf{G}_2 \dot{\mathbf{q}}, \quad \omega_{z'} = 2\mathbf{q}^T \mathbf{G}_3 \dot{\mathbf{q}}, \quad (19)$$

其中

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

这 3 个矩阵有如下关系:

$$\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_3 = -\mathbf{I}, \quad \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_3, \quad \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_3 = \mathbf{G}_1, \quad \mathbf{G}_3 \mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2. \quad (21)$$

根据式(21), 可由  $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3$  中的任意两个矩阵(生成元), 生成一有限群. 根据式(19), 便可将动能直接用四元数表示. 这样问题便转化为仅含有约束(6)的 Lagrange 体系求解, 分析结构力学便可施展.

### 3 刚体定点转动的动力分析与逐步积分算法

刚体旋转有贴体向量表示的  $\omega_{x'}, \omega_{y'}, \omega_{z'}$ , 其中贴体坐标轴  $Ox'y'z'$  就是刚体的主惯性轴, 因此刚体旋转的动能可以表示为

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \omega_{x'}^2 + I_2 \omega_{y'}^2 + I_3 \omega_{z'}^2), \quad (22)$$

其中  $I_1, I_2, I_3$  为以定点为参考点的刚体的主惯性矩, 一般来说  $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ . 根据反对称矩阵是正交矩阵群的 Lie 代数, 本文推导出了式(19), 于是动能可以改写为

$$T = 2(I_1 (\mathbf{q}^T \mathbf{G}_1 \dot{\mathbf{q}})^2 + I_2 (\mathbf{q}^T \mathbf{G}_2 \dot{\mathbf{q}})^2 + I_3 (\mathbf{q}^T \mathbf{G}_3 \dot{\mathbf{q}})^2). \quad (23)$$

而系统的势能可以用四元数来表示:

$$U = U(\mathbf{q}). \quad (24)$$

系统的 Lagrange 函数为

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T - U. \quad (25)$$

重新将约束条件表示为

$$g(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^T \mathbf{q} - 1 = 0. \quad (26)$$

引入 Lagrange 乘子  $\lambda$ , 则扩展的 Lagrange 函数为

$$L_e(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \lambda) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \lambda g(\mathbf{q}). \quad (27)$$

对扩展的 Lagrange 函数进行变分, 便可得到约束系统的 Lagrange 方程, 问题转化为微分-代数方程的求解.

Lagrange 体系要处处满足约束条件的广义位移难以找到, 但本文运用分析结构力学的基本概念, 进入离散系统来分析. 首先保证离散积分点的约束条件严格满足; 再在时间区段内, 用时间有限元<sup>[7-8]</sup>离散代替差分离散, 然后运用作用量的变分原理以代替微分方程, 离散的时间步内积分就不再考虑约束了. 分析结构力学理论保证可达到每步积分的自动保辛<sup>[4]</sup>.

具体来说<sup>[4-5]</sup>, 取离散时间区段  $\eta, t_0 = 0, t_1 = \eta, t_2 = 2\eta, \dots, t_k = k\eta, \dots$ . 可假设  $t_{k-1}$  时的位移与速度是  $\mathbf{q}_{k-1}, \dot{\mathbf{q}}_{k-1}$  已知, 并满足  $\mathbf{q}_{k-1}^T \mathbf{q}_{k-1} = 1$  的约束, 现在的问题是要通过  $t_{k-1}$  步的已知量计算下一个时间步的  $\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k$ .

为此首先引入时间  $(t_{k-1}, t_k)$  的区段作用量(含约束):

$$S_k(\mathbf{q}_{k-1}, \mathbf{q}_k, \lambda_{k-1}, \lambda_k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} (L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \lambda g(\mathbf{q})) dt. \quad (28)$$

然后进行有限元近似, 设在  $k$ -区段内位移取为平均位移,  $\mathbf{q}_{\#k} = (\mathbf{q}_{k-1} + \mathbf{q}_k)/2$ , 速度为  $\dot{\mathbf{q}}_{\#k} = (\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_{k-1})/\eta$ , 约束在区段内可近似为  $\lambda g(\mathbf{q}) = (\lambda_{k-1} g(\mathbf{q}_{k-1}) + \lambda_k g(\mathbf{q}_k))/\eta$  (Lagrange 乘子乘以一个常数不影响最终计算). 这样根据式(23)~(28), 可以得到区段作用量的有限元近似:

$$S_k(\mathbf{q}_{k-1}, \mathbf{q}_k, \lambda_{k-1}, \lambda_k) = 2\eta (I_1(\mathbf{q}_{\#k}^T \mathbf{G}_1 \dot{\mathbf{q}}_{\#k})^2 + I_2(\mathbf{q}_{\#k}^T \mathbf{G}_2 \dot{\mathbf{q}}_{\#k})^2 + I_3(\mathbf{q}_{\#k}^T \mathbf{G}_3 \dot{\mathbf{q}}_{\#k})^2) - \eta U(\mathbf{q}_{\#k}) - \lambda_{k-1} g(\mathbf{q}_{k-1}) - \lambda_k g(\mathbf{q}_k). \quad (29)$$

此时  $S_k(\mathbf{q}_{k-1}, \mathbf{q}_k, \lambda_{k-1}, \lambda_k)$  已是两端独立自变量  $\mathbf{q}_{k-1}, \lambda_{k-1}$  与  $\mathbf{q}_k, \lambda_k$  的函数. Lagrange 原理的位移约束条件已经在节点处严格满足, 区段内部的约束条件则由有限元插值近似满足.

根据离散系统的分析结构力学, 引入对偶方程

$$\mathbf{p}_{k-1} = -\partial S_k / \partial \mathbf{q}_{k-1}, \quad g(\mathbf{q}_{k-1}) = 0; \quad \mathbf{p}_k = \partial S_k / \partial \mathbf{q}_k, \quad g(\mathbf{q}_k) = 0, \quad (30)$$

则状态变量为  $\mathbf{v}_k = \{\mathbf{q}_k^T \quad \mathbf{p}_k^T\}^T$ . 按分析结构力学方法, 从  $\mathbf{v}_{k-1}$  可递推  $\mathbf{v}_k$ , 该变换保辛, 但带有参变量  $\lambda_{k-1}$ . 确定  $\lambda_{k-1}$  要根据节点约束条件  $g(\mathbf{q}_k) = 0$ .

实际工程中, 给定的初始条件通常为 Euler 角  $(\phi_0, \theta_0, \psi_0)$ , 以及贴体坐标系下角速度矢量  $\boldsymbol{\omega}'_0$  等, 这些物理量与四元数之间的变换关系在一般的介绍四元数应用的书中便可找到<sup>[1,3]</sup>, 继而便可获得初始四元数  $\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0$  初始时刻的  $\mathbf{p}_0$  则由 Legendre 变换

$$\mathbf{p} = \partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) / \partial \dot{\mathbf{q}} \quad (31)$$

确定. 得到初始时刻的状态变量  $\mathbf{v}_0 = \{\mathbf{q}_0^T \quad \mathbf{p}_0^T\}^T$ , 便可递推地求解出  $\mathbf{v}_k (k=1, 2, \dots)$ . 实际计算时, 根据式(30), 区段作用量  $S_k$  与  $S_{k+1}$  均产生  $\mathbf{p}_k$ , 两者相等有动力学方程

$$-\partial S_{k+1} / \partial \mathbf{q}_k = \partial S_k / \partial \mathbf{q}_k, \quad (32)$$

此式联立约束方程  $g(\mathbf{q}_{k+1}) = 0$  便可迭代求解.

具体算法如下:

- 1) 初始时刻, 已知  $\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0$ , 根据式(31)计算  $\mathbf{p}_0$ ;
- 2) 联立方程  $\mathbf{p}_0 = -\partial S_1 / \partial \mathbf{q}_0, g(\mathbf{q}_1) = 0$ , 迭代求解  $\mathbf{q}_1, \lambda_0$ ;
- 3) 假设已经求得  $\mathbf{q}_{k-1}, \mathbf{q}_k$ , 则  $\mathbf{q}_{k+1}, \lambda_k$  由式(32) 加上非线性约束方程  $g(\mathbf{q}_{k+1}) = 0$  迭代得到。

## 4 数值例题与讨论

**算例 1** 考察如图 1 所示对称陀螺绕其尖点  $O$  的运动, 该尖点固定于惯性空间. 取陀螺的对称轴为贴体坐标系  $Ox'y'z'$  的  $z'$  轴. 著作[2]用许多篇幅讲述 Euler 陀螺(top), 其中只有对称陀螺. 陀螺质心与尖点的距离为  $l$ , 陀螺的基本参数:

$$m = 1 \text{ kg}, l = 0.04 \text{ m}, I_1 = I_2 = 0.002 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, I_3 = 0.0008 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

取重力加速度  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ . 此算例中, 重力势能可用四元数表示为

$$U(\mathbf{q}) = mgl(e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2). \quad (33)$$

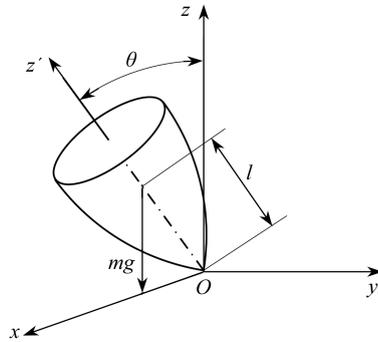


图 1 对称重陀螺

Fig.1 The heavy symmetric top

首先研究陀螺在高速自旋情况下的仿真效果. 取  $\omega_z = 40\pi \text{ rad/s}, \psi_0 = \phi_0 = 0$ . 按下述 3 组初始条件对陀螺的运动进行数值模拟:

**初始条件 1**  $\omega_{x'} = 0, \omega_{y'} = 0; \theta_0 = \pi/6$ ;

**初始条件 2**  $\omega_{x'} = 0, \omega_{y'} = 4; \theta_0 = \pi/3$ ;

**初始条件 3**  $\omega_{x'} = 4, \omega_{y'} = 0; \theta_0 = \pi/3$ .

这 3 组初始条件将产生对称重陀螺的 3 种著名的章动“尖点运动”、“无环运动”、和“有环运动”<sup>[9]</sup>. 描绘陀螺运动的经典方法是以陀螺的尖点为球心在惯性空间作一个单位球, 用陀螺对称轴在该单位球面上划出的迹线来描绘运动. 设陀螺对称轴 ( $z'$  轴) 与单位球面的交点为  $A$ , 则任意时刻  $A$  点的位置由下式确定:

$$x = 2(e_1e_3 + e_0e_2), y = 2(e_2e_3 - e_0e_1), z = e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2. \quad (34)$$

时间步长定义为  $\Delta \tilde{t} = \omega_z \Delta t$ .

图 2 显示了对称重陀螺 3 种典型运动的仿真结果, 时间步长取  $\Delta \tilde{t} = 0.1$ . 左上、右上图对应于第一组初始条件, 描述了尖点运动随时间变化的轨迹. 左上图是陀螺对称轴 ( $z'$  轴) 与单位球面交点  $A$  的轨迹沿惯性系  $z-x$  平面的部分投影. 根据文献[2], 重陀螺的对称轴 ( $z'$  轴) 上点  $A$  的运动轨迹在  $x-y$  平面上的投影, 应该介于一圆环之间. 右上图给出了  $A$  点轨迹沿惯性系  $x-y$  平面的长时间投影, 数值结果显示轨迹始终保持在圆环之间, 没有偏离或退化, 表明约束满足得很

好.而相同的算例,文献[9]采用传统的四阶 Runge-Kutta(龙格-库塔)法,却产生了偏移和退化.左下图与右下图分别为无环运动与有环运动情况下 A 点轨迹沿惯性系  $z-x$  平面的部分投影.数值结果显示本文方法很好地模拟了对称重陀螺的这几种运动.

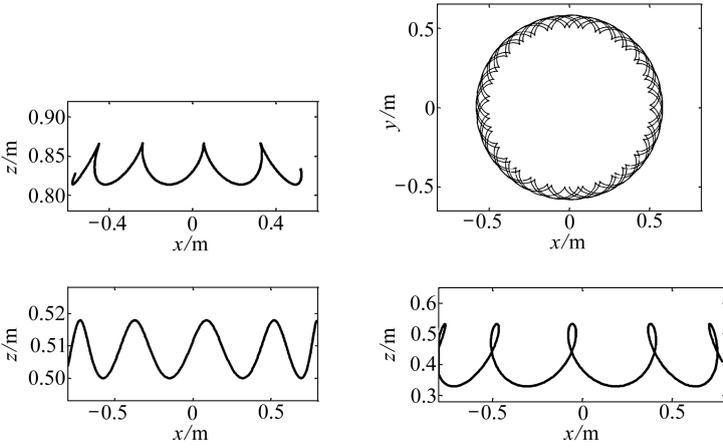


图2 对称重陀螺典型运动轨迹

Fig.2 The trajectory of the classical motions of the heavy symmetric top

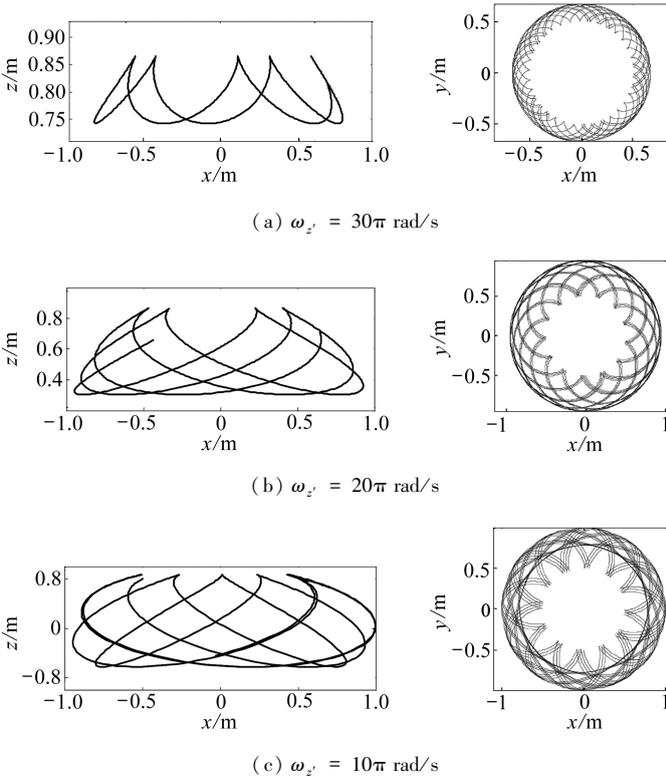


图3 对称重陀螺运动轨迹随自旋角速度渐变的图形比较

Fig.3 The trajectory of the heavy symmetric top with the decreasing of  $\omega_z$

图3 显示的是陀螺运动轨迹随着自旋速度 ( $\omega_z$ ) 变化规律.在图中,  $\omega_z$  由上到下分别取为  $30\pi \text{ rad/s}$ ,  $20\pi \text{ rad/s}$ ,  $10\pi \text{ rad/s}$ , 其它初始值采用“初始条件1”, 步长选取  $\Delta t = 0.1$ .从  $x-z$  平面

局部投影(左图)中观察可知,随着自旋速度的变慢,陀螺的章动角越来越大,以致最后超过 $\pi/2$ ,  $A$ 点也降至水平面以下,然而仍然保持尖点运动,这与理论相符.从右图可知,长时间轨迹一直限制在圆环之内,这是一般的传统方法无法做到的.

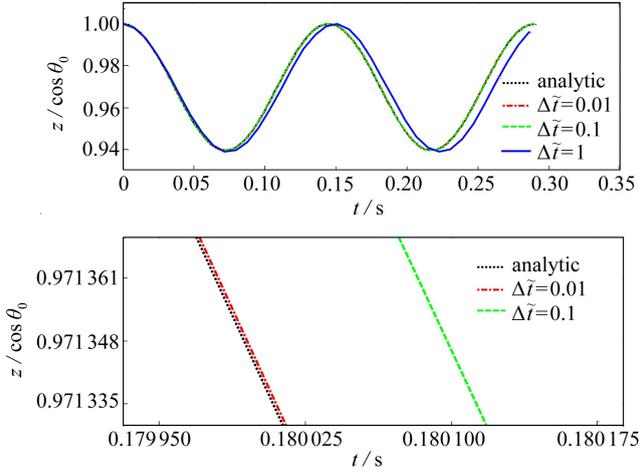


图 4 高速自旋下对称重陀螺的运动 ( $\omega_z = 40\pi \text{ rad/s}$ )

Fig.4 The motion of the symmetric top with high spin speed ( $\omega_z = 40\pi \text{ rad/s}$ )

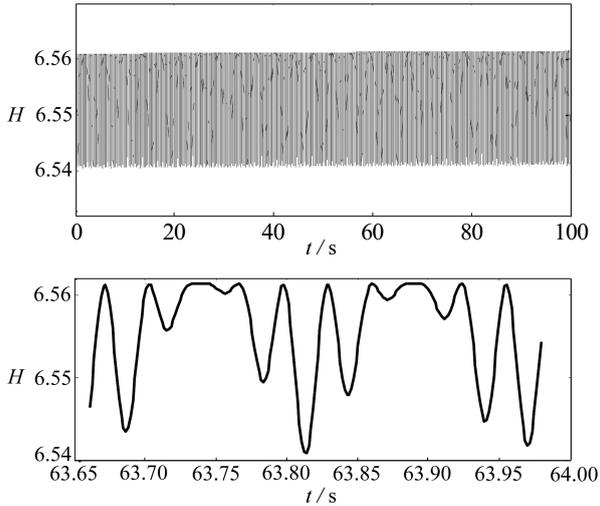


图 5 Hamilton 函数随时间变化; 真实  $H = 6.6560$  ( $\Delta \bar{t} = 0.02$ )

Fig.5 The Hamilton function with time, the actual Hamilton function is  $H = 6.6560$  ( $\Delta \bar{t} = 0.02$ )

下面讨论本文方法的精度以及时间步长对精度的影响.对于对称重陀螺,是有解析解的.解析解是以椭圆积分的形式表示,其反函数为椭圆函数.Goldstein 的经典力学<sup>[2]</sup>对此有详细叙述.对于椭圆函数的数值计算,采用椭圆函数的精细积分<sup>[10]</sup>,可达到计算机精度.重陀螺的运动,如图 3 所示,随着自旋速度的改变,陀螺运动变化的很剧烈.自旋速度越快,则陀螺进动将越慢,其运动也越稳定.高速旋转的陀螺与低速旋转的陀螺其运动特性很不相同.因此,将分两种极端情况比较本文方法的仿真效果.

首先取  $\omega_z = 40\pi \text{ rad/s}$ , 对应于高速自旋.其它参数同初始条件 1.如图 3 所示,本文比较了当时时间步长分别取为  $\Delta \bar{t} = 0.01, 0.1, 1$  时  $A$  点归一化  $z$  坐标随时间变化,并与解析解进行了比

较.当  $\Delta \tilde{t} = 1$  时,一个周期内仅取了约 18 个离散点,图 4(上)显示,当  $\Delta \tilde{t} = 0.1$  时,在以周期为量级的角度观测,误差已经难于观测到了.图 4(下)给出了局部放大图,从图中可以看出,随着时间步长逐渐减小,误差消退得非常快.图 5 给出了时间步长  $\Delta \tilde{t} = 0.02$  时 Hamilton 函数随时间变化,共模拟了 100 s.图(上、下)中,Hamilton 函数随着时间积分的进行,在精确值附近呈周期震荡,表明保辛效果良好.

图 6 给出了低速旋转下  $A$  点归一化  $z$  坐标随时间变化曲线, $\omega_z = 20$  rad/s,其他初始条件不变,时间步长分别取为  $\Delta \tilde{t} = 0.01, 0.05, 0.5$ .在此种情况下,章动角已经非常大了,进动速度也明显加大.与解析解的比较显示,本文方法在低速旋转下也能达到良好的仿真效果.

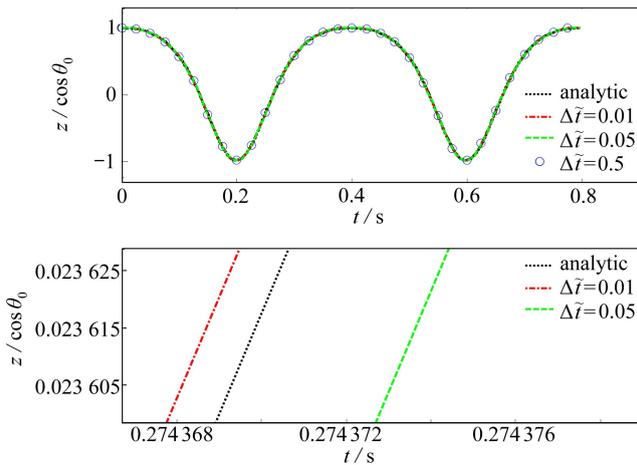


图 6 低速自旋下对称重陀螺的运动 ( $\omega_z = 20$  rad/s)

Fig.6 The motion of the symmetric top with low spin speed ( $\omega_z = 20$  rad/s)

**算例 2** 考虑一般重陀螺,  $I_1 \neq I_2$ . 设  $I_1 = 0.00225$  kg·m<sup>2</sup>,  $I_2 = 0.00175$  kg·m<sup>2</sup>, 其它陀螺参数与算例 1 同. 给定初始条件为  $\omega_x = 0, \omega_y = 0, \omega_z = 40\pi$  rad/s;  $\psi_0 = \phi_0 = 0, \theta_0 = \pi/6$ . 此初始条件对应于对称重陀螺的尖点运动.

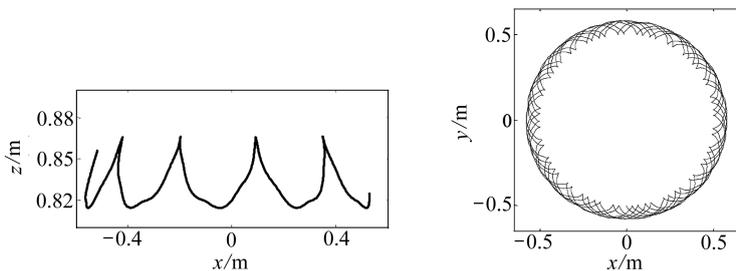


图 7 不对称重陀螺运动轨迹 ( $\Delta \tilde{t} = 0.1$ )

Fig.7 The trajectory of the asymmetric heavy top ( $\Delta \tilde{t} = 0.1$ )

图 7 显示了数值仿真的结果,步长取  $\Delta \tilde{t} = 0.1$ .左图显示,对于一般重陀螺来说,施加初始条件 1,也有类似的尖点运动轨迹,然而轨迹不再是球面圆环的简单重复了.从右图可以观察到,长时间的时间积分过后,运动轨迹仍控制在圆环内,没有发生偏移或衰退.一般的经典力学书中,很少讨论陀螺不对称的情况,但在实际工程中有其应用价值.算例表明本文方法对非对称重陀螺的仿真效果良好,可以作为一般陀螺仿真分析的有力工具.

## 5 结 论

本文针对刚体旋转,给出了刚体动力学的四元数表示,然后根据分析结构力学基本原理,先进行离散,并在节点处严格满足位移约束条件,运用作用量以代替微分方程而进行求解.这样不仅在变分原理意义下满足了四元数的约束条件,而且积分保辛.对重陀螺的数值仿真试验证明,无论是对称陀螺还是一般陀螺、低速旋转还是高速旋转,本文方法都给出了出色的数值结果,仿真效果令人满意,可作为陀螺仿真分析的有力工具.

本文仅给出了刚体定点转动的保辛积分方法,对于刚体平动以及多体运动并未涉及,还有很多工作有待开展.

### 参考文献(References):

- [1] 肖尚彬. 四元数方法及其应用[J]. 力学进展, 1993, **23**(2): 249-260. (XIAO Shang-bin. The method of quaternion and its application[J]. *Advances in Mechanics*, 1993, **23**(2): 249-260. (in Chinese))
- [2] Goldstein H. *Classical Mechanics*[M]. 2nd ed. Addison-Wesley, 1980.
- [3] 程国采. 四元数法及其应用[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1991. (CHENG Guo-cai. *The Method of Quaternion and Its Application*[M]. Changsha: National University of Defence Technology Press, 1991. (in Chinese))
- [4] 钟万颢. 应用力学的辛数学方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006. (ZHONG Wan-xie. *Symplectic Method in Applied Mechanics*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2006. (in Chinese))
- [5] 钟万颢, 高强. 约束动力系统的分析结构力学积分[J]. 动力学与控制学报, 2006, **4**(3): 193-200. (ZHONG Wan-xie, GAO Qiang. Integration of constrained dynamical system via analytical structural mechanics[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, **4**(3): 193-200. (in Chinese))
- [6] Hairer E, Lubich Ch, Wanner G. *Geometric-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*[M]. Springer, 2006.
- [7] Zienkiewicz O C, Taylor R. *The Finite Element Method*[M]. 4th ed. New York: McGraw-Hill, 1989.
- [8] 钟万颢, 姚征. 时间有限元与保辛[J]. 机械强度, 2005, **27**(2): 178-183. (ZHONG Wan-xie, YAO Zheng. Time domain FEM and symplectic conservation[J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2005, **27**(2): 178-183. (in Chinese))
- [9] 周江华, 苗育红, 李宏, 孙国基. 四元数在刚体姿态仿真中的应用研究[J]. 飞行力学, 2000, **18**(4): 28-33. (ZHOU Jiang-hua, MIAO Yu-hong, LI Hong, SUN Guo-ji. Research of attitude simulation using quaternion[J]. *Flight Dynamics*, 2000, **18**(4): 28-33. (in Chinese))
- [10] 姚征, 钟万颢. 椭圆函数的精细积分算法[J]. 数值计算与计算机应用, 2008, **29**(4): 251-260. (YAO Zheng, ZHONG Wan-xie. Time improved precise integration method for elliptic functions[J]. *Journal on Numerical Methods and Computer Applications*, 2008, **29**(4): 251-260. (in Chinese))

# Symplectic Conservation Integration of Rigid Body Dynamics With Quaternion Parameters

XU Xiao-ming, ZHONG Wan-xie

*(State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment;  
Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology,  
Dalian, Liaoning 116024, P.R.China)*

(Contributed by ZHONG Wan-xie, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** A numerical method was proposed with the quaternion representation of rigid body dynamics. Based on the analytical structural mechanics, the action of differential system was introduced for the time integration of the approximated discrete system and the constraint that the norm of quaternion kept constant at 1 was satisfied strictly at the grid points of integration. As was interpreted in the theory of analytical structural mechanics, the numerical integration was symplectic conservative and the constraint was satisfied approximately in the sense of variation principle. The numerical results of heavy tops are satisfying in precision and efficiency.

**Key words:** analytical structural mechanics; quaternion; rigid body dynamics; symplectic conservation integration; heavy top

**Foundation item:** The National Basic Research Program of China ( 973 Program )  
(2009CB918501)