

基于非关联流动法则的圆形隧洞滑移线解答*

王永甫^{1,2}, 王 成³, 唐晓松^{1,2}

(1. 后勤工程学院 军事土木工程系, 重庆 400041;

2. 重庆市地质灾害防治工程技术研究中心, 重庆 400041;

3. 重庆交通大学 土木建筑学院, 重庆 400074)

摘要: 圆形隧洞的滑移线方程早在 20 世纪中期苏联学者已给出解答,并在国内广泛应用.推导过程中假设滑移线与速度矢量方向夹角为 $45^\circ - \varphi/2$ 是错误的,理论上滑移线与速度矢量方向的夹角与采用的流动法则有关.该文分别从关联流动法则和非关联流动法则出发,推导了圆形隧洞的滑移线方程和水平方向破裂体深度的表达式.通过与模型试验结果进行对比,对岩土材料应采用基于非关联流动法则的滑移线解答.

关键词: 圆形隧洞; 关联流动法则; 非关联流动法则; 滑移线解答

中图分类号: TU451 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.12.007

引 言

在无限大平面内开挖圆形隧洞问题一直是岩土体弹塑性力学分析的经典问题.对于 $\lambda = 1$ 圆形隧洞的滑移线方程前苏联学者已给出解答,并在我国广泛应用^[1-2].然而,笔者认为过去滑移线方程推导过程中滑移线与速度矢量方向的夹角假设为 $45^\circ - \varphi/2$ 是错误的,理论上滑移线与速度矢量方向的夹角和所采用的流动法则有关^[3].目前岩土塑性理论有的采用关联流动法则,有的采用非关联流动法则,前者适用于金属材料,后者更符合岩土体变形机制^[3-7].由于极限破坏分析与采用的流动法则无关,两种流动法则求得的安全系数相同,因而都在极限分析中广泛应用.但两种流动法则在计算变形及求解滑移线时会存在较大差异,因此在位移计算和滑移线求解时应采用适应岩土体变形机制的非关联流动法则.本文分别基于上述两种流动法则推导了圆形隧洞围岩的塑性滑移线方程并求得水平方向破裂体深度的表达式,并与已有模型试验结果进行了对比.

1 过去有关圆形隧洞的破坏机理及滑移线场分析

以往的模型试验和理论分析表明,围岩破裂区总是位于塑性区内,并从应变最大处开始和发展.其发展过程如下:岩体挖洞后,由于应力重分布,洞周径向应力降低,切向应力增高,使 Mohr(摩尔)应力圆迅速扩大而达到极限平衡状态.在洞周塑性区内,由于围岩刚进入塑性,尚未进入破坏失稳状态,只有在洞壁附近塑性应变最大处塑性充分发展,在洞壁附近诸多屈服面

* 收稿日期: 2013-05-27; 修订日期: 2013-09-30

作者简介: 王永甫(1984—),男,浙江人,助教,硕士(通讯作者. E-mail: wyfzry@163.com).

中形成一条破裂面,最近,郑颖人等运用数值极限分析方法即有限元强度折减法对隧洞破坏机理问题进行了系统研究,获得了隧洞围岩破裂面具体位置,并通过隧洞在浅埋与深埋情况下的破坏过程分析表明,浅埋拱形隧洞的破坏来自拱顶,而深埋隧洞的破坏来自侧壁^[8-10],见图1。

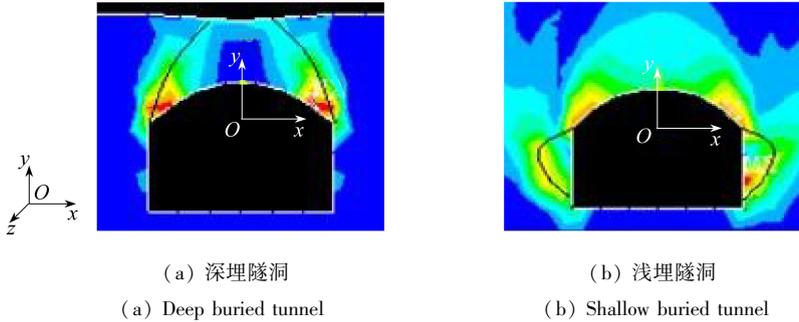


图1 深埋浅埋隧洞破坏形式

Fig.1 The failure modes of shallow and deep buried tunnels

按极限分析理论,破裂面可由滑移线场中滑移线确定,并在边坡及地基稳定分析中取得成功^[11-13],但由于问题复杂,经典滑移线方法无法求出隧洞滑移线和稳定安全系数.但对于轴对称圆形隧洞即侧压系数 $\lambda = 1$ 时,作者通过引用文献[1]中前人的研究成果给出了相应滑移线方程,见式(1),并一直得到广泛应用.随着研究的深入,作者认识到该公式有误,公式推导过程中假设滑移线与速度矢量方向夹角为 $45^\circ - \varphi/2$,而理论上滑移线与速度矢量方向的夹角与采用的流动法则有关.因此,本文尝试基于岩土塑性流动法则重新分析并推导圆形隧洞围岩的塑性滑移线方程.

$$r = r_0 e^{(\theta-\rho)\tan(45^\circ - \varphi/2)}, \quad (1)$$

其中, ρ 为滑移线起始角或破裂面起始角, r_0 为圆形隧洞半径, φ 为围岩内摩擦角。

2 圆形隧洞围岩塑性滑移线方程推导

目前岩土塑性理论采用的流动法则主要有两种,关联流动法则和非关联流动法则,前者适用于金属材料,若按此流动法则计算岩土体变形,计算结果会远大于岩土体实际发生的形变;而采用非关联流动法则可消除上述计算失误,更符合岩土体变形机制.由于极限破坏分析与采用的流动法则无关,两种流动法则求得的安全系数相同,因而都在极限分析中广泛应用.但两种流动法则在计算变形及求解滑移线时会存在较大差异,因此在位移计算和滑移线求解时应采用适应岩土体变形机制的非关联流动法则.当采用非关联流动法则时,应力滑移线与速度矢量方向处处成 $\varphi/2$ 角,而采用关联流动法则时,应力滑移线与速度矢量方向处处成 φ 角。

2.1 基于非关联流动法则的滑移线方程推导

按照基于非关联流动法则的滑移线理论可知,岩土材料应力滑移线与速度矢量方向处处成 $\varphi/2$ 角.对于速度矢量方向,当侧压系数 $\lambda = 1$ 时,由对称性可知,圆洞速度矢量方向为严格的圆弧切向.当 $\lambda \neq 1$ 时,圆洞速度矢量方向发生不同程度偏转,不再是圆弧切向.然而数值模拟结果表明,对于 $\lambda \neq 1$,在圆洞两侧一定范围内,速度矢量方向可近似为圆弧切向,如图2所示.因此,对于 $\lambda \neq 1$ 的情况,圆洞两侧的滑移线方程可近似采用 $\lambda = 1$ 时的推导结果。

当 $\lambda = 1$ 时,滑移线方程推导如下:建立如图3坐标系,取极坐标为 r, θ 的任意微元体 p ,由几何关系可得

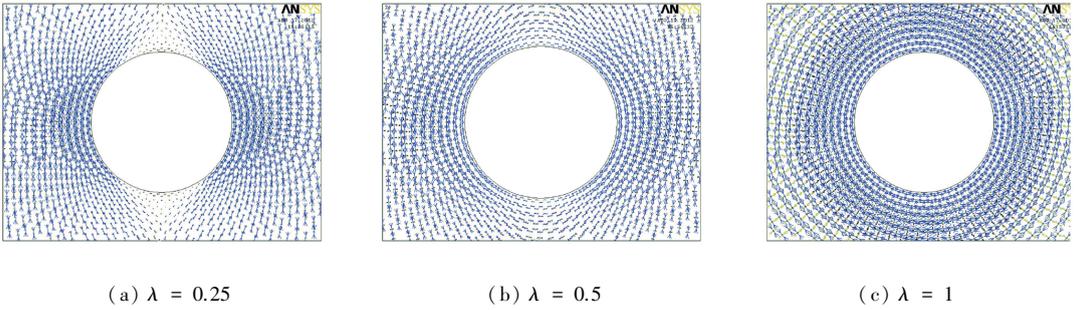


图2 速度矢量方向数值模拟结果

Fig.2 The numerical simulation results of the velocity vector

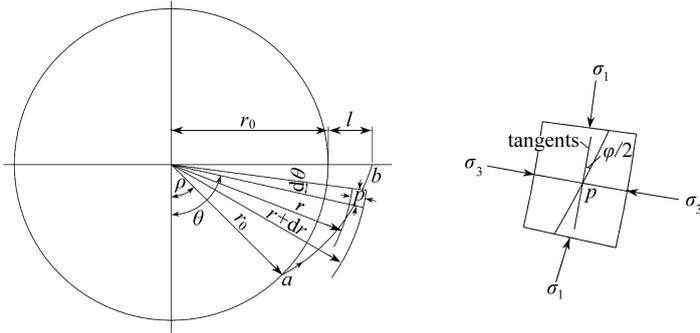


图3 滑移线示意图

Fig.3 Diagram of slip line

$$\frac{dr}{r d\theta} = \tan \frac{\varphi}{2},$$

$$\frac{dr}{r} = \tan \frac{\varphi}{2} d\theta.$$

上式两边分别对 θ 从 $\rho \rightarrow \theta, r$ 从 $r_0 \rightarrow r$ 进行积分, 得

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{r} = \tan \frac{\varphi}{2} \int_{\rho}^{\theta} d\theta,$$

$$\ln r - \ln r_0 = (\theta - \rho) \tan \frac{\varphi}{2}.$$

于是得滑移线表达式为

$$r = r_0 e^{(\theta - \rho) \tan(\varphi/2)}, \quad \rho \leq \theta \leq \pi/2, \tag{2}$$

ρ 为滑移线起始角或破裂面起始角. 参考过去顾金才院士的模型试验^[1,14] 表明, 当 λ 变化时, 破裂起始角 ρ 均变化不大, 特别 $\lambda = 1$ 时, 由轴对称性易知必有 $\rho = \pi/4$ 的正确解答. 对于 $\lambda \neq 1$ 时, ρ 近似取 $\pi/4$.

2.2 基于关联流动法则的滑移线方程推导

按前面所述, 对于非关联流动法则的滑移线场理论, 滑移线与速度矢量方向处处成 $\varphi/2$ 角, 而对于关联流动法则的滑移线场理论, 应力滑移线与速度矢量方向处处成 φ 角, 两者差别仅在应力滑移线与速度矢量方向夹角, 推导过程参照非关联流动法则的滑移线方程, 表达式为

$$r = r_0 e^{(\theta - \rho) \tan \varphi}, \quad \rho \leq \theta \leq \pi/2, \tag{3}$$

表达式参数意义同式(2).

3 基于滑移线方程的水平方向破裂体深度计算

对于式(1)~(3),令 $\rho = \pi/4, \theta = \pi/2$,即可求得水平方向破裂体深度 l ,分别为

$$l = r_0(e^{(\pi/4)\tan(45^\circ - \varphi/2)} - 1), \quad (4)$$

$$l = r_0(e^{(\pi/4)\tan(\varphi/2)} - 1), \quad (5)$$

$$l = r_0(e^{(\pi/4)\tan\varphi} - 1). \quad (6)$$

其中式(4)为基于经典滑移线方程的破裂体深度表达式,而式(5)、(6)分别为基于非关联流动法则滑移线方程及关联流动法则滑移线方程的破裂体深度表达式.需要注意,求解破裂体深度 l 时采用的 φ 为极限破坏状态时对应的内摩擦角.

4 试验值与理论解对比

过去顾金才院士对圆洞在不同侧压系数条件下进行破坏试验研究,试验采用石膏加砂的混合物作模型材料,内摩擦角 φ 为 33° ,黏聚力 c 为400 kPa,模型尺寸为50 cm×50 cm×20 cm,中间开口直径为10 cm.在给定的竖向荷载 P_v 及侧压系数 λ 条件下,通过破坏试验获得洞室两侧水平方向最大破坏深度及破裂起始角度 ρ .试验研究表明,破坏时的 ρ 变化均在 45° 左右,但最大破坏深度有所不同,随 λ 的增加逐渐减小^[1,14].为了与试验结果进行对比,运用有限元强度折减法(计算采用非关联法则条件下平面应变 Mohr-Coulomb(莫尔-库仑)匹配 DP5 屈服准则)在给定试验荷载下求得极限破坏状态时的内摩擦角 φ 值,将其代入式(4)~(6)即求得破裂体理论计算深度 l ,其结果见表1.

表1 不同侧压系数 λ 时的极限破坏角 φ 及破裂体深度 l

Table 1 The internal friction angle φ and fracture depth l of the surrounding rock at different values of lateral pressure coefficient λ

	lateral pressure coefficient λ			
	0.25	0.50	1.00	
the test load P_v /MPa	1.00	1.12	1.18	
the value of failure limit angle φ /($^\circ$)	34.56	29.10	19.51	
fracture depth l /mm	eq.(4)	24.9	28.5	26.0
	eq.(5)	13.8	11.3	7.2
	eq.(6)	35.9	27.4	16.0
	GU Jin-cai' test ^[14]	13.5	10.0	6.0

通过表1结果可以看出,式(5)的计算结果与试验结果较接近,式(4)结果规律与试验明显不符,即过去有关滑移线方程的推导有误,而式(6)的结果远大于试验结果.这表明基于关联流动法则的滑移线解答,应力滑移线与速度矢量方向处处成 φ 角,允许岩土有过大的剪胀,造成破裂体深度计算结果远远偏离了实际;而基于非关联流动法则的滑移线解答,应力滑移线与速度矢量方向处处成 $\varphi/2$ 角,破裂体深度计算结果与模型试验结果接近.因此,对于岩土体材料,滑移线方程应采用表达式(2),即基于非关联流动法则的滑移线解答.

5 结 论

1) 作者认为过去轴对称情况下圆形隧洞的滑移线解答有误,其推导过程中假设滑移线与速度矢量方向夹角为 $45^\circ - \varphi/2$,而理论上滑移线与速度矢量方向的夹角与采用的流动法则有关.

2) 目前岩土塑性理论采用的流动法则主要有两种,关联流动法则和非关联流动法则,前者适用于金属材料,后者更符合岩土体变形机制.两种流动法则求得的安全系数相同,但在计算变形及求解滑移线时会存在较大差异.

3) 基于关联流动法则和非关联流动法则推导了滑移线方程及破裂体深度表达式,通过与过去模型试验对比表明,基于关联流动法则的滑移线解答由于允许岩土有过大的剪胀造成结果远偏离了实际,而基于非关联流动法则的滑移线解答与模型试验结果接近.对岩土材料应采用基于非关联流动法则的滑移线解答.

致谢 作者感谢同济大学岩土及地下工程重点实验室开放基金(NO.KLE-TJGE-B1109)的资助.

参考文献(References):

- [1] 于学馥,郑颖人,刘怀恒,方正昌. 地下工程围岩稳定分析[M]. 北京:煤炭工业出版社,1983. (YU Xue-fu, ZHENG Ying-ren, LIU Huai-heng, FANG Zheng-chang. *The Stability Analysis of Surrounding Rock of Underground Engineering*[M]. Beijing: China Coal Industry Publishing House,1983. (in Chinese))
- [2] 王思敬,杨志法,刘竹华. 地下工程岩体稳定分析[M]. 北京:科学出版社,1984. (WANG Si-jing, YANG Zhi-fa, LIU Zhu-hua. *The Stability Analysis of Underground Engineering*[M]. Beijing: Science Press, 1984. (in Chinese))
- [3] 郑颖人,孔亮. 岩土塑性力学[M]. 北京:中国建筑工业出版社,2010. (ZHENG Ying-ren, KONG Liang. *Geotechnical Plastic Mechanics*[M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2010. (in Chinese))
- [4] 郑颖人,王敬林,朱小康. 关于岩土材料滑移线理论中速度解的讨论——广义塑性理论的应用[J]. 水利学报,2001(6): 1-7. (ZHENG Ying-ren, WANG Jing-lin, ZHU Xiao-kang. Discussion on velocity solution of slip line theory for geotechnical materials—the application of generalized plastic theory[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2001(6): 1-7. (in Chinese))
- [5] 郑颖人,邓楚键,王敬林. 基于非关联流动法则的滑移线场及上限法研究[J]. 中国工程科学,2010, 12(8): 56-69. (ZHENG Ying-ren, DENG Chu-jian, WANG Jing-lin. The study of slip line field and upper bound method based on the non-associated flow rule[J]. *Engineering Sciences*, 2010, 12(8): 56-69. (in Chinese))
- [6] Bobryakov A P, Revuzhenko A F. Experimental simulation of spiral slip lines on granular materials[J]. *Journal of Mining Science*, 2009, 45(2): 99-104.
- [7] Liu F Q, Wang J H. A generalized slip line solution to the active earth pressure on circular retaining walls[J]. *Computers and Geosciences*, 2008, 35(2): 155-164.
- [8] 郑颖人,徐浩,王成,肖强. 隧洞破坏机理及深浅埋分界标准研究[J]. 浙江大学学报(工学版),2010, 44(10): 1851-1856, 1875. (ZHENG Ying-ren, XU Hao, WANG Cheng, XIAO Qiang. Research on the failure mechanism of tunnel and dividing line standard between shallow and deep bury[J]. *Journal of Zhejiang University(Engineering Science)*, 2010, 44(10): 1851-1856, 1875. (in Chinese))
- [9] Dawson E M, Roth W H, Drescher A. Slope stability analysis by strength reduction[J]. *Geotechnique*, 1999, 49(6): 835-840.
- [10] 郑颖人,赵尚毅. 有限元强度折减法在土坡与岩坡中的应用[J]. 岩石力学与工程学报,2004, 23(19): 3381-3388. (ZHENG Ying-ren, ZHAO Shang-yi. Application of strength reduction on

- FEM in soil and rock slope[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2004, **23**(19): 3381-3388. (in Chinese)
- [11] Chen W F. *Limit Analysis and Soil Plasticity*[M]. Berlin: Elsevier Scientific Press, 1975.
- [12] 朱以文, 吴春秋, 蔡元奇. 基于滑移线场理论的边坡滑裂面确定方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, **24**(15): 2609-2616. (ZHU Yi-wen, WU Chun-qi, CAI Yuan-qi. Determination of slip surface in slope based on theory of slip line field[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2005, **24**(15): 2609-2616. (in Chinese))
- [13] 肖大平. 滑移线法求解极限承载力问题的一些进展[J]. 岩土工程学报, 1998, **20**(4): 25-29. (XIAO Da-ping. Progress in slip lines method to solve the bearing capacity problem[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1998, **20**(4): 25-29. (in Chinese))
- [14] 顾金才, 苏锦昌. 在静荷载作用下的均质岩体中砂浆锚杆支护洞室受力特点及破坏形态模型试验研究——喷锚支护作用机理研究内容之一[C]//第一届全国岩石力学数值计算及模型试验讨论会论文集. 中国岩石力学与工程学会, 1986: 288-293. (GU Jin-cai, SU Jin-chang. Model testing study on the behaviour and failure shape of grouted rockbolts reinforced opening under static loading[C]//*The First National Conference on Numerical Calculation and Model Test of Rock Mechanics Symposium*. Chinese Society for Rock Mechanics and Engineering, 1986: 288-293. (in Chinese))

Slip Line Solution for Circular Tunnels Based on the Non-Associated Flow Rule

WANG Yong-fu^{1,2}, WANG Cheng³, TANG Xiao-song^{1,2}

(1. *Department of Civil Engineering, Logistic Engineering University of PLA, Chongqing 400041, P.R.China;*

2. *Chongqing Engineering and Technology Research Center of Geological Hazard Prevention and Treatment, Chongqing 400041, P.R.China;*

3. *School of Civil Engineering and Architecture, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, P.R.China)*

Abstract: The slip line equation for circular tunnels had been solved by Soviet scholars in the middle of 20th century, and widely used in China. But the assumption that the angle between the slip line and the velocity vector was $45^\circ - \varphi/2$ in the derivation had been wrong. Theoretically, that angle was related to the flow rule adopted. The plastic slip line equation of circular tunnels and the formula of horizontal fracture depth were derived based on both the associated flow rule and non-associated flow rule. Proved by previous model test, the slip line solution based on the non-associated flow rule is recommended for application.

Key words: circular tunnel; associated flow rule; non-associated flow rule; slip line solution