

几种典型板考虑初始荷载效应的基频近似解*

刘德贵, 周世军

(重庆大学 土木工程学院, 重庆 400044)

摘要: 基于两组板考虑初始荷载效应的动力控制微分方程:一般形式的动力控制微分方程和坐标形式的动力控制微分方程,运用 Galerkin(伽辽金)法求解得到了简支矩形板、固支矩形板、简支等边三角形板、固支椭圆形板、简支圆形板和固支圆形板 6 种典型板考虑初始荷载效应的自由振动基频(第一阶频率)近似解.通过与相关文献提出的有限元法计算结果对比,验证了公式的正确性.基频近似解表达式简单明了,物理意义明确,清楚地说明了初始荷载及相关因素对板自由振动基频的影响,直观地说明了板的初始荷载效应这一概念.计算分析表明:初始荷载的存在增加了板的弯曲刚度,提高了板的自振频率.这种初始荷载效应对频率的影响主要受初始荷载大小、跨厚比及边界条件等因素的影响.在计算分析和设计中应考虑并重视这种初始荷载效应对板计算分析带来的影响.

关键词: 初始荷载效应; 基频; Galerkin 法; 近似解; 板

中图分类号: TU313; O32 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.12.006

引言

工程结构在初始荷载作用下,都要发生相应的变形,产生初始应力.初始应力将与后续荷载所产生的变形耦合,使结构的刚度发生变化,影响结构的静、动受力特性,在一些工程问题中不可忽略.大量学者在这方面进行了相关研究,Takabatake 在 1990 年就首次提出了初始恒载效应的概念^[1-2],导出了梁考虑初始恒载效应的静、动力控制微分方程,并对梁的初始恒载效应进行了研究.周世军等^[3-5]提出了考虑初始恒载效应的有限梁单元;张家玮,周世军等^[6-8]讨论了初始恒载效应对拱形梁的动、静受力特性的影响.对于薄板结构,Timoshenko 等^[9]早期就注意到了初始曲率对薄板的静力挠度影响.Takabatake^[10]导出了板考虑初始恒载效应的动力控制微分方程,并进行了初始恒载对简支板的自振频率影响分析.在 Takabatake 的工作基础上,周世军^[11-12]提出了可供有限元分析的矩形板单元.周又和^[13]采用 Galerkin 法获得了集中力作用下圆形板固有频率-荷载关系曲线.王晋莹等^[14]推导了初挠度柔韧圆板的振动方程,运用 Galerkin 法和 Lindstedt-Poincaré 摄动法求出非线性周期解,讨论了初挠度对振动基频的影响.

* 收稿日期: 2013-07-24; 修订日期: 2013-08-14

基金项目: 重庆市自然科学基金计划资助项目(CSTC.2010BB6048)

作者简介: 刘德贵(1983—),男,四川广元人,博士生(E-mail: shll830520@163.com);

周世军(1961—),男,甘肃甘谷人,教授,博士生导师(通讯作者. E-mail: sjzhou@163.com).

杜国君等^[15]基于初始挠度的圆板非线性振动方程,运用 Galerkin 法得出了时间域的非线性振动方程,讨论了初挠度对振动形态的影响.上述研究都表明:初始荷载或挠曲将显著地影响结构后期受荷的动、静受力性能,因此研究初始荷载或变形对结构动、静受力特性的影响,具有重要意义.

频率是反映结构动力特性的重要参数,而基频(第一阶频率)又显得尤为重要,是工程应用中最为关心的问题,如:为方便估算结构动力反应,在计算动力荷载系数时,就必须知道结构的基频.因此,本文对文献[10]所提出的板考虑初始荷载效应一般形式的动力平衡控制微分方程进行坐标变换,导出了可用于求解圆形板在初始对称荷载作用下自由振动基频极坐标形式的动力平衡控制微分方程.以所述一般形式的和极坐标形式的动力控制微分方程为基础,运用 Galerkin 法解出了简支矩形板、固支矩形板、简支等边三角形板、固支椭圆形板、固支圆形板和简支圆形板 6 种典型板考虑初始荷载效应的基频近似解,并进行了有限元验证及初始荷载和厚度对板的基频影响分析.

1 动力平衡控制微分方程

1.1 一般形式动力平衡控制微分方程

假定板仅承受面外初始荷载,忽略面内轴向力;板在初始面外荷载作用下,产生初始挠度 \bar{w} ,以此变形为后期荷载变形或动力挠度 w 的参考状态;运用板考虑初始荷载效应的应变能表达和 Hamilton 原理,可得板考虑初始荷载效应的一般形式的动力平衡控制微分方程为^[10]

$$\begin{aligned} \rho h \ddot{w} + D(w_{,xxxx} + 2w_{,xxyy} + w_{,yyyy}) - \\ \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[(\bar{w}_{,x})^2 + \nu(\bar{w}_{,y})^2 \right] w_{,x} + (1-\nu) \bar{w}_{,x} \bar{w}_{,y} w_{,y} \right\} + \\ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (\bar{w}_{,y})^2 + \nu(\bar{w}_{,x})^2 \right\} w_{,y} + (1-\nu) \bar{w}_{,x} \bar{w}_{,y} w_{,x} \right\} = q, \end{aligned} \quad (1)$$

其中, \bar{w} 为板初始荷载引起的挠度,此变形状态亦是后期荷载或动力挠度的参考状态; w 为后期荷载或动力挠度; E 为弹性模量; ν 为 Poisson(泊松)比; h 为板的厚度; D 为板的弯曲刚度; q 为后期外加荷载.

1.2 极坐标形式动力平衡控制微分方程

假定圆形板的边界条件和所受到的荷载为轴对称,对式(1)进行坐标转换,可得到极坐标形式的圆形板考虑初始荷载效应的动力平衡控制微分方程,其表达式如下:

$$\begin{aligned} \rho h \ddot{w} + D \left(w_{,rrrr} + \frac{2}{r} w_{,rrr} - \frac{1}{r^2} w_{,rr} + \frac{1}{r^3} w_{,r} \right) - \\ \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left\{ (\bar{w}_{,r})^2 w_{,rr} + \left[2(\bar{w}_{,r})(\bar{w}_{,rr}) + \frac{1}{r} (\bar{w}_{,r})^2 \right] w_{,r} \right\} = q. \end{aligned} \quad (2)$$

2 基频近似解

2.1 近似解法

固有频率的确立,是研究薄板振动的基础和关键.除简支矩形薄板的弹性自由振动频率能通过解析法求解外,频率多通过近似方法进行求解,比如: Galerkin 法、Rayleigh(瑞利)和 Ritz(里兹)等方法;这些方法都是从能量原理出发形成的精确有效的近似方法,在板的弹性静、动

力问题中得到广泛应用^[16-18]。因此,本文运用 Galerkin 法求解几种典型板的考虑初始荷载效应的基频近似解。

Galerkin 法求解过程如下:

1) 认为初始荷载位移 \bar{w} 已知,是满足弹性薄板弯曲静力平衡微分方程和边界条件的位移精确解或近似解 $\bar{w}(x, y)$ 。

2) 假定板考虑初始荷载效应的振型函数,振型函数须满足边界条件。即设定 $w(x, y, t) = w(x, y)(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$ 中本征函数 $w(x, y)$ 。

3) 将初始荷载位移表达式、振型函数代入自由振动控制微分方程(即式(1)、(2)中,后期外加荷载 q 为 0),建立 Galerkin 方程组。

4) 求解 Galerkin 方程组,得到板考虑初始荷载效应的基频近似解。

下面根据上述方法求解几种典型板考虑初始荷载效应的基频近似解。

2.2 典型板基频近似解

1) 简支矩形板

假定四边简支矩形板承受初始均布荷载,荷载位移采用重三角级数解^[9]:

$$\bar{w} = \frac{16\bar{q}}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}, \quad (3)$$

其中, a, b 为矩形板边长, \bar{q} 为初始均布荷载。在此仅取级数的前 4 项,即: $m = 1, n = 1, 3; m = 3, n = 1, 3$, 可保证初始荷载位移有足够的精度。而考虑初始荷载效应的基频振型函数取满足边界条件的如下表达:

$$w = C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (4)$$

将初始荷载位移表达式(3)与振型函数(4)代入自由振动微分方程,建立 Galerkin 方程,通过求解得到简支矩形板考虑初始荷载效应的自由振动基频近似解,结果如下:

$$\omega_{11} = \frac{\pi^2}{4a^2b^2} \sqrt{\frac{16D(a^2 + b^2)^2 + D_1(a^4S_1 + b^4S_2 + 2a^2b^2S_3)}{\rho h}}, \quad (5)$$

其中

$$D_1 = \frac{Eh}{2(1 - \nu^2)} \quad (\text{下文同}),$$

$$S_1 = 3[3a_1^2 + 18a_2^2 + 2a_3^2 + 12a_4^2 + 2a_1(3a_2 - a_3 - a_4) - 2a_2(a_3 + 6a_4) + 4a_3a_4],$$

$$S_2 = 3[3a_1^2 + 2a_2^2 + 18a_3^2 + 12a_4^2 - 2a_1(a_2 - 3a_3 + a_4) - 2a_2(a_3 - 2a_4) - 12a_3a_4],$$

$$S_3 = a_1^2 + 10a_2a_3 - 2a_1(a_2 + a_3 + 3a_4) + 2\nu[5(a_2^2 + a_3^2) + 18a_4^2 - 8a_2a_3 + 6(a_2 + a_3)a_4].$$

在上述表示中

$$a_i (i = 1, 2, 3, 4) = \frac{16\bar{q}}{\pi^6 Dmn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

分别为初始荷载位移表达式前 4 项系数。

2) 固支矩形板

固支矩形板承受初始均布荷载,荷载位移取较为精确近似解^[19]:

$$\bar{w} = (a^2 - x^2)^2(b^2 - y^2)^2[a_1 + a_2(x^2 + y^2)], \quad (6)$$

其中, a 为矩形板短边长度的一半, b 为矩形板长边长度的一半,

$$a_1 = \frac{77[7(a^8 + b^8) + 39(a^6b^2 + a^2b^6) + 715a^4b^4]\bar{q}}{64D[7(a^4 + b^4) + 4a^2b^2][35(a^8 + b^8) + 156(a^6b^2 + a^2b^6) + 2\ 288a^4b^4]},$$

$$a_2 = \frac{1\ 001(a^2 + b^2)\bar{q}}{128D[35(a^8 + b^8) + 156(a^6b^2 + a^2b^6) + 2\ 288a^4b^4]}.$$

而对考虑初始荷载效应的基频振型取满足边界条件的函数:

$$w = C(a^2 - x^2)^2(b^2 - y^2)^2. \quad (7)$$

同样,将初始荷载位移表达式与振型函数代入自由振动微分方程,建立 Galerkin 方程组,通过求解得到固支矩形板考虑初始荷载效应的自由振动基频近似解,结果如下:

$$\omega_{11} = \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{D\left(S_1 + S_2 \frac{a^8 D_1 \bar{q}^2}{D^3}\right)}{\rho h}}, \quad (8)$$

其中, S_1, S_2 为常数,对于不同长宽比 ($1.0 \leq b/a \leq 2.0$) 固支矩形板的 S_1, S_2 如表 1 所示。

表 1 固支矩形板考虑初始荷载效应的基频近似解中常数 $S_i (i = 1, 2)$

Table 1 Parameter $S_i (i = 1, 2)$ of fundamental frequency for clamped rectangular plates under initial load effect

b/a	S_1	S_2	b/a	S_1	S_2
1.0	81	$3.982\ 6 \times 10^{-3} + 2.103\ 0 \times 10^{-7} \nu$	1.6	43.337 8	$7.405\ 0 \times 10^{-3} + 1.203\ 6 \times 10^{-5} \nu$
1.1	67.891 0	$4.751\ 8 \times 10^{-3} + 4.651\ 2 \times 10^{-7} \nu$	1.7	41.499 9	$7.708\ 2 \times 10^{-3} + 1.724\ 3 \times 10^{-5} \nu$
1.2	59.191 0	$5.450\ 3 \times 10^{-3} + 1.229\ 4 \times 10^{-6} \nu$	1.8	40.056 2	$7.954\ 6 \times 10^{-3} + 2.357\ 3 \times 10^{-5} \nu$
1.3	53.179 9	$6.064\ 4 \times 10^{-3} + 2.636\ 8 \times 10^{-6} \nu$	1.9	38.903 3	$8.153\ 1 \times 10^{-3} + 3.100\ 8 \times 10^{-5} \nu$
1.4	48.883 4	$6.591\ 5 \times 10^{-3} + 4.824\ 5 \times 10^{-6} \nu$	2.0	37.968 8	$8.311\ 5 \times 10^{-3} + 3.947\ 6 \times 10^{-5} \nu$
1.5	45.722 2	$7.035\ 8 \times 10^{-3} + 7.921\ 5 \times 10^{-6} \nu$	-	-	-

对于其他不同长宽比 (b/a) 的固支矩形板的基频近似解可采用相同的求解方法得到。

3) 简支等边三角形板

简支等边三角形板承受初始均布荷载,初始荷载位移取精确解^[9]:

$$\bar{w} = \frac{\bar{q}}{64aD} \left[x^3 - 3y^2x - a(x^2 + y^2) + \frac{4}{27}a^3 \right] \left(\frac{4}{9}a^2 - x^2 - y^2 \right), \quad (9)$$

其中, a 为等边三角形的高,而对考虑初始荷载效应的基频振型取满足边界条件的函数:

$$w = C \left[x^3 - 3y^2x - a(x^2 + y^2) + \frac{4}{27}a^3 \right] \left(\frac{4}{9}a^2 - x^2 - y^2 \right). \quad (10)$$

同样按照上述求解过程,建立 Galerkin 方程组并进行求解,得到简支等边三角形板考虑初始荷载效应的自由振动基频解,结果如下:

$$\omega_{11} = \frac{12\sqrt{11}}{a^2} \sqrt{\frac{D\left(1 + \frac{a^8 D_1 \bar{q}^2}{D^3} \cdot 3.752\ 1 \times 10^{-7}\right)}{\rho h}}. \quad (11)$$

4) 固支椭圆形板

固支椭圆板承受初始均布荷载,初始荷载位移取精确解^[9]:

$$\bar{w} = S \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^2, \tag{12}$$

其中

$$S = \frac{\bar{q}}{D \left(\frac{24}{a^4} + \frac{24}{b^4} + \frac{16}{a^2 b^2} \right)},$$

a 为椭圆板长半轴, b 为椭圆板短半轴.

考虑初始荷载效应的基频振型采用以下满足边界条件的函数表达:

$$w = C \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^2. \tag{13}$$

同样,按照近似求解过程,建立 Galerkin 方程组进行求解,得到基频近似解为

$$\omega_{11} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{21} a^2 b^2} \sqrt{\frac{(3a^4 + 2a^2 b^2 + 3b^4)(35D + 4S^2 D_1)}{\rho h}}. \tag{14}$$

5) 固支圆形板

固支圆形板承受初始均布荷载,初始荷载位移取精确解^[9]:

$$\bar{w} = \frac{\bar{q}}{64D} (a^2 - r^2)^2, \tag{15}$$

其中, a 为圆形板半径.考虑初始荷载效应的基频振型采用以下满足边界条件的函数表达:

$$w = C (a^2 - r^2)^2. \tag{16}$$

此时,将初始荷载位移表达式和振型函数代入式(2)变换得到的自由振动微分方程,建立 Galerkin 方程进行求解,得到基频近似解:

$$\omega_{11} = \frac{8}{\sqrt{21} a^2} \sqrt{\frac{D \left(35 + \frac{a^8 D_1 \bar{q}^2}{1\ 024 D^3} \right)}{\rho h}}. \tag{17}$$

6) 简支圆形板

简支圆形板承受初始均布荷载,初始荷载位移取精确解^[9]:

$$\bar{w} = \frac{\bar{q}}{64D} (a^2 - r^2) \left(\frac{5 + \nu}{1 + \nu} a^2 - r^2 \right), \tag{18}$$

其中, a 为圆形板半径.考虑初始荷载效应的基频振型采用以下满足边界条件的函数表达:

$$w = C (a^2 - r^2) \left(\frac{5 + \nu}{1 + \nu} a^2 - r^2 \right). \tag{19}$$

同样,按照固支圆形板基频近似求解过程,得到基频解为

$$\omega_{11} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7} a^2} \sqrt{\frac{D \left[70(3s - 1) + (35s^4 - 70s^3 + 84s^2 - 42s + 9) \frac{a^8 D_1 \bar{q}^2}{4\ 096 D^3} \right]}{\rho h (10s^2 - 5s + 1)}}, \tag{20}$$

其中

$$s = \frac{5 + \nu}{1 + \nu}.$$

3 验 证

为验证典型板考虑初始荷载效应的基频近似解的正确性,下文将运用文献[11]所提出的考虑初始荷载效应的有限元法,并采用非简化位移插值函数表达^[20],与本文解得固支、简支矩形板考虑初始荷载效应的基频近似解进行对比分析验证.算例中相关计算参数如下:

$$E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}, \nu = 0.3, \rho = 7\,850 \text{ kg/m}^3;$$

初始荷载: $\bar{q} = 3\,825 \text{ N/m}^2$. 简支、固支矩形板的短边均为 1 m, 厚度 $h = 10 \text{ mm}$. 计算分析获得了简支矩形板(表 2)和固支矩形板(表 3)的对比分析计算结果.

表 2 简支矩形板基频计算结果对比(单位: Hz)

Table 2 Fundamental frequency comparison for simply supported rectangular plates(unit: Hz)

b/a	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
present	49.489 4	42.192 7	37.918 5	35.253 0	33.510 9	32.327 6
FEM ^[11]	49.125 6	42.078 4	37.898 6	35.315 8	33.646 0	32.524 9

表 3 固支矩形板基频计算结果对比(单位: Hz)

Table 3 Fundamental frequency comparison for clamped rectangular plates(unit: Hz)

b/a	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
present	89.698 5	76.693 2	69.710 1	65.647 9	63.121 7	61.460 7
FEM ^[11]	88.340 4	76.042 1	69.195 3	65.210 9	62.732 4	61.103 1

由表 2 和表 3 的计算结果对比可以看出,简支、固支矩形板考虑初始荷载效应的基频 Galerkin 近似解同有限元法计算结果吻合良好.上述 6 种典型板考虑初始荷载效应的基频近似解,是基于动力控制平衡微分方程,采用 Galerkin 法和相同求解过程得到的.如简支矩形板和固支椭圆板基频近似解采用与固支矩形板一样的处理方式,设定简支矩形板长边为 $b = \lambda a$, 椭圆板长轴 $b = \lambda a$ (λ 为比值).则近似解系数中都无一例外地包含 $a^8 D_1 \bar{q}^2 / D^3$ (对于不同的板, a 代表不同几何意义);且当初始荷载为 0 时,考虑初始荷载效应的基频近似解也都等同于弹性理论形式的基频近似解^[16-18].因此,本文解得的考虑初始荷载效应的基频近似解正确有效.

4 分 析

典型板考虑初始荷载效应的每一基频近似解公式中都包含 $D_1 a^8 \bar{q}^2 / D^3$, 可更为明确地表示为

$$\frac{864(1 - \nu^2)^2}{E^2} \left(\frac{a}{h} \right)^8 \bar{q}^2 \quad (a \text{ 对于不同的板,代表不同的几何意义}).$$

该项表明当板的边界条件和材料确定时,初始荷载效应主要受初始荷载、几何尺寸和厚度的影响.如定义 a/h 为板的跨厚比,则厚度的改变意味着跨厚比的影响.

为进一步明确初始荷载效应及相关因素对板动力特性带来的影响,下文进行初始荷载和厚度对上述 6 种典型板基频影响的分析.材料参数: $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}, \nu = 0.3, \rho = 7\,850 \text{ kg/m}^3$; 参考初始荷载 $\bar{q}_0 = 2\,000 \text{ N/m}^2$. 分析计算和图表表达中, f 表示板考虑初始荷载效应的基频值, f^* 表示板不考虑初始荷载效应的基频值; \bar{q}_0 为选定的参考初始荷载, \bar{q} 表示实际施加的初

始荷载.通过计算分析,获得了初始荷载和厚度对6种典型板基频影响的 $f/f^*-\bar{q}/\bar{q}_0$ 关系曲线,如图1~6所示.

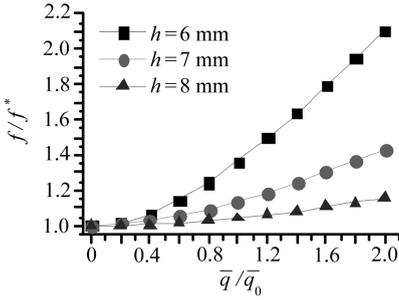


图1 简支矩形板 $f/f^*-\bar{q}/\bar{q}_0$ 关系曲线
($b/a = 1.5, a = 1 \text{ m}$)

Fig.1 The $f/f^*-\bar{q}/\bar{q}_0$ relationship of simply supported rectangular plates
($b/a = 1.5, a = 1 \text{ m}$)

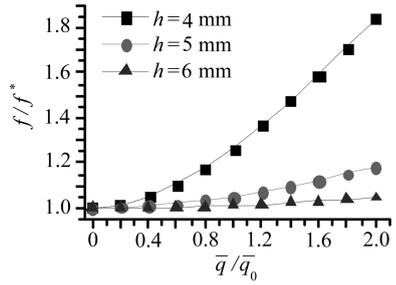


图2 固支矩形板 $f/f^*-\bar{q}/\bar{q}_0$ 关系曲线
($b/a = 1.5, a = 0.5 \text{ m}$)

Fig.2 The $f/f^*-\bar{q}/\bar{q}_0$ relationship of clamped rectangular plates ($b/a = 1.5, a = 0.5 \text{ m}$)

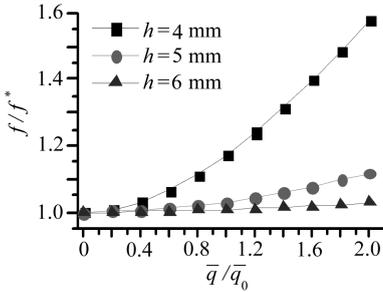


图3 简支等边三角形板 $f/f^*-\bar{q}/\bar{q}_0$ 关系曲线
($a = 1 \text{ m}$)

Fig.3 The $f/f^*-\bar{q}/\bar{q}_0$ relationship of simply supported equilateral triangular plates ($a = 1 \text{ m}$)

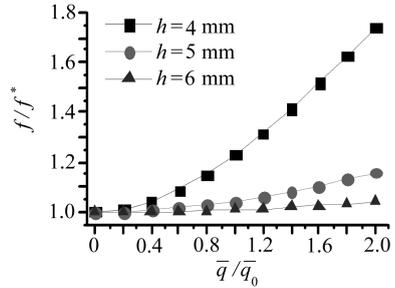


图4 固支椭圆板 $f/f^*-\bar{q}/\bar{q}_0$ 关系曲线
($b = 1 \text{ m}, a = 0.5 \text{ m}$)

Fig.4 The $f/f^*-\bar{q}/\bar{q}_0$ relationship of clamped elliptical plates ($b = 1 \text{ m}, a = 0.5 \text{ m}$)

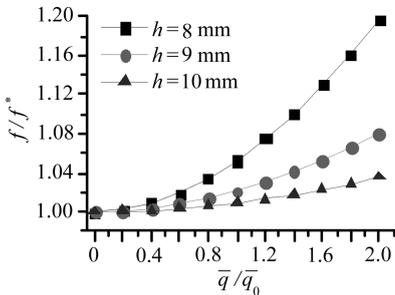


图5 固支圆形板 $f/f^*-\bar{q}/\bar{q}_0$ 关系曲线
($a = 1 \text{ m}$)

Fig.5 The $f/f^*-\bar{q}/\bar{q}_0$ relationship of clamped circular plates ($a = 1 \text{ m}$)

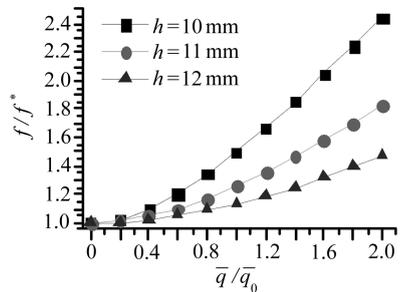


图6 简支圆形板 $f/f^*-\bar{q}/\bar{q}_0$ 关系曲线
($a = 1 \text{ m}$)

Fig.6 The $f/f^*-\bar{q}/\bar{q}_0$ relationship of simply supported circular plates ($a = 1 \text{ m}$)

由6种典型板的 $f/f^*-\bar{q}/\bar{q}_0$ 关系曲线可以看出:初始荷载的存在增加了板的弯曲刚度,提高了板的自振频率.板的跨度、厚度和边界条件亦影响了考虑初始荷载效应后的自振频率,板

的厚度越小,跨度越大(或跨厚比越大),边界约束越弱,初始荷载对板的自振频率提高越明显。同时,当初始荷载为0时,各基频值等同于不考虑初始荷载效应的基频值,亦表明本文提出的基频近似解正确。

上述6种典型板考虑了初始荷载效应的基频计算结果明显大于弹性理论计算结果。主要原因在于:已有的弹性薄板理论忽略了初始荷载产生的初始弯曲应力与自由振动挠曲应变耦合所产生的附加应变能 \bar{U} ,以致最终形成了与已有弹性薄板理论不同的应变能表达式和动力平衡控制微分方程及基频计算结果。

5 结 论

基于板考虑初始荷载效应的动力微分方程,运用 Galerkin 法求得了简支矩形板、固支矩形板、简支等边三角形板、固支椭圆板和固支、简支圆形板考虑初始荷载效应的基频(第一阶频率)近似解;并进行了验证和分析,得到了如下结论:

1) 各基频近似解表达式简单明了,物理意义明确,清楚地说明了初始荷载等因素对板考虑初始荷载效应后自由振动基频所产生的影响;可直接方便运用于相关计算分析。

2) 初始荷载提高了板的弯曲刚度与自振频率;板考虑初始荷载效应后的自振频率受初始荷载大小、板的几何尺寸、厚度和边界条件的影响。初始荷载越大,板的厚度越小,跨度越大(或跨厚比越大),边界约束越弱,初始荷载对板自振频率的提高越明显。

3) 初始荷载效应对板的动力特性产生了不可忽略的影响,在厚度较薄或弯曲刚度较小的板中表现尤为明显,在相关计算分析中,应充分细致考虑实际存在的这一荷载效应,以做到精确分析与合理设计。

参考文献(References):

- [1] Takabatake H. Effects of dead loads in static beams[J]. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 1990, **116**(4): 1102-1120.
- [2] Takabatake H. Effects of dead loads on natural frequencies of beams[J]. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 1991, **117**(4): 1039-1052.
- [3] 周世军, 朱晞. 恒载对梁自振频率影响的分析[J]. 铁道学报, 1995, **17**(4): 98-103. (ZHOU Shi-jun, ZHU Xi. Analysis of effect of dead loads on natural frequencies of beams[J]. *Journal of China Railway Society*, 1995, **17**(4): 98-103. (in Chinese))
- [4] 朱晞, 周世军. 分析恒载效应的有限元方法[J]. 工程力学, 1996, **13**(3): 54-60. (ZHU Xi, ZHOU Shi-jun. A finite element method for analyzing effect of dead loads[J]. *Engineering Mechanics*, 1996, **13**(3): 54-60. (in Chinese))
- [5] ZHOU Shi-jun, ZHU Xi. Analysis of effect of dead loads on natural frequency of beams using finite element techniques[J]. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 1996, **122**(5): 512-516.
- [6] 张家玮, 周世军. 恒载效应对拱形梁自振频率的影响分析[J]. 振动与冲击, 2009, **28**(8): 163-167. (ZHANG Jia-wei, ZHOU Shi-jun. Analysis on effect of dead loads on natural frequencies of arch beams[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2009, **28**(8): 163-167. (in Chinese))
- [7] 张家玮, 周世军, 赵建昌. 考虑恒载效应的拱形梁静力近似解[J]. 计算力学学报, 2010, **27**(4): 655-660. (ZHANG Jia-wei, ZHOU Shi-jun, ZHAO Jian-chang. Approximate solutions of static

- arch beams considering static loads effect[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2010, **27**(4): 655-660.(in Chinese)
- [8] 周世军, 张家玮. 恒载效应对拱形梁的影响分析[J]. 工程力学, 2010, **27**(7): 120-125.(ZHOU Shi-jun, ZHANG Jia-wei. Analysis of the effect of dead loads on static arch beams[J]. *Engineering Mechanics*, 2010, **27**(7): 120-125.(in Chinese))
- [9] Timoshenko S, Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shells*[M]. 2nd ed. McGraw-Hill Book Company, 1959.
- [10] Takabatake H. Effects of dead loads in dynamic plate[J]. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 1992, **118**(1): 34-51.
- [11] ZHOU Shi-jun. Load-induced stiffness matrix of plates[J]. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 2002, **29**(1): 181-184.
- [12] 周世军. 板恒载效应的非线性分析的刚度法[J]. 振动与冲击, 2007, **26**(2): 33-36.(ZHOU Shi-jun. Stiffness method for nonlinear analysis of effect of dead loads on plate[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2007, **26**(2): 33-36.(in Chinese))
- [13] 周又和. 中心荷载作用下圆薄板的固有频率-荷载关系曲线[J]. 应用力学学报, 1992, **9**(1): 119-123.(ZHOU You-he. Natural frequency-load characteristic relation of circular plate under a central concentrated loads[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 1992, **9**(1): 119-123.(in Chinese))
- [14] 王晋莹, 陈科进. 具有初始挠度的柔韧圆板的振动问题[J]. 应用数学和力学, 1993, **14**(2): 165-171.(WANG Jin-ying, CHEN Ke-jin. Vibration problems of flexible circular plates with initial deflection[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1993, **14**(2): 165-171.(in Chinese))
- [15] 杜国君, 张秀礼, 胡宇达. 具有初挠度夹层圆板非线性振动与解的稳定性[J]. 振动与冲击, 2007, **26**(11): 156-159.(DU Guo-jun, ZHANG Xiu-li, HU Yu-da. Nonlinear vibration and solution stability of circular sandwich plate with initial deflection[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2007, **26**(11): 156-159.(in Chinese))
- [16] Szilard R. *Theory and Analysis of Plates: Classical and Numerical Method*[M]. Prentice-Hall, 1974.
- [17] 曹国雄. 弹性矩形薄板振动[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1983.(CAO Guo-xiong. *Vibration of Elastic Rectangular Thin Plate*[M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 1983.(in Chinese))
- [18] 曹志远. 板壳振动理论[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1983.(CAO Zhi-yuan. *Vibration Theory of Plates and Shells*[M]. Beijing: China Railway Publishing House, 1983.(in Chinese))
- [19] 老大中. 变分法基础[M]. 北京: 国防工业出版社, 2007.(LAO Da-zhong. *Fundamentals of the Calculus of Variations*[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2007.(in Chinese))
- [20] 朱伯芳. 有限单元法原理与应用[M]. 第3版. 北京: 中国水利水电出版社, 2009.(ZHU Bo-fang. *The Finite Element Method Theory and Applications*[M]. 3rd ed. Beijing: China Water Power Press, 2009.(in Chinese))

Approximate Fundamental Frequency Solutions Under Initial Load Effect for 6 Typical Plates

LIU De-gui, ZHOU Shi-jun

(College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, P.R.China)

Abstract: Based on two sets of dynamic equilibrium differential equations for plates under initial load effect, which were respectively expressed as general and polar coordinate forms to fit different boundary conditions. The approximate solutions of fundamental frequencies under initial load effect for the simply supported rectangular plate, the clamped rectangular plate, the simply supported equilateral triangular plate, the clamped elliptic plate, the clamped circular plate and the simply supported circular plate, were derived with the Galerkin method. These approximate solutions were verified with the finite element method under initial load effect, which clearly illustrated the initial load effect and corresponding factors that influence the plates' fundamental frequencies. Initial load effect on fundamental frequencies of the above 6 typical plates was analyzed with these solutions. Due to initial load effect, bending stiffnesses of the plates increased, and their fundamental frequencies rose. The key physical factors governing the initial load effect on the plates are the initial load magnitude, the ratio of span to thickness and the boundary conditions, etc. The bigger the initial loads and the smaller the bending stiffnesses of the plates are, the higher the initial load effect on the fundamental frequencies is. This initial load effect is obvious and should not be neglected in the design and analysis of plates.

Key words: initial load effect; fundamental frequency; Galerkin method; approximate solution; plate