

航天器非 Keplerian 运动的陀螺效应^{*}

李雪华¹, 和兴锁²

(1. 西安工业大学 工程力学系, 西安 710032;
2. 西北工业大学 工程力学系, 西安 710129)

摘要: 为了满足未来复杂空间操作对机动的要求,需要深入研究非 Keplerian(开普勒)轨道的理论和方法.根据航天器运动的进动现象与陀螺进动的相似性,分析并给出了航天器环绕地球运动的陀螺效应的定义;在航天器动力学方程的基础上,建立了陀螺效应的数学模型,进而分析了陀螺效应影响下航天器的运动规律,为空间机动的更好实现提供了一种非 Keplerian 轨道的理论和方法.

关键词: 非 Keplerian 轨道; 空间机动; 陀螺效应

中图分类号: V412.4; O311 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.12.005

引 言

随着航天技术的进步,人们将面临越来越多的非 Keplerian 运动,越来越多的空间操作都要采用非 Keplerian 轨道.而在航天器环绕地球的运动中,如果是非 Keplerian(有控制力作用)运动,就有可能出现陀螺效应.深入研究航天器环绕地球运动的陀螺效应形成的机理、过程,为大范围快速轨道机动服务,将是一个全新的课题.

Vitins^[1]探讨了 Keplerian 运动与陀螺运动的联系.Junkins 等^[2-3]将轨道动力学与刚体动力学进行了类比,提出轨道的进动类似于经典的陀螺进动.芮筱亭等^[4]根据刚体相对运动的动量矩定理,重新统一定义了陀螺力矩,阐明了陀螺力矩的构成和物理本质;介绍了陀螺力矩概念在分析弹丸运动问题上的应用.崔新军^[5]提出了旋转稳定炮弹陀螺力矩的统一表达式,论述了其力学实质,分析了陀螺效应对弹丸运动规律的影响.袁建平等^[6]探讨了航天器的进动现象,按照从力到运动、从运动到力两种思路研究了两类与航天器陀螺运动相关的非 Keplerian 的轨道——陀螺轨道和自旋轨道,提出了基于陀螺轨道和自旋轨道的机动轨道设计方法.曹静等^[7]通过类比陀螺进动与轨道进动现象两者的动力学模型,提出了一类强迫进动轨道,分析了这种轨道的性质.其研究方法和所得结论为轨道机动的研究提供了理论基础和技术储备.

本文主要通过分析航天器运动的进动现象与陀螺进动的相似性,对航天器环绕地球运动的陀螺效应进行定义及数学建模,并分析陀螺效应影响下航天器的运动规律.在研究的过程中,假设航天器以匀角速度“进动”.

1 陀螺效应

1.1 陀螺及其基本特性^[8]

Foucault(傅科)于 1852 年引进了“陀螺”这一名词,他把绕固定点旋转的刚体定名为“陀

* 收稿日期: 2013-06-27; 修订日期: 2013-07-08

作者简介: 李雪华(1982—),女,陕西人,讲师,博士(通讯作者. E-mail: xhli0724@163.com).

螺”。凡是绕回转体的对称轴高速旋转的物体都可称为陀螺。

如图 1 所示,陀螺对 O 点的角动量 \mathbf{H} (在陀螺绕其对称轴高速旋转的情况下,角动量 \mathbf{H} 的量值近似等于自转角动量) 沿陀螺的对称轴 z 轴方向,如果在 x 轴方向施加外力矩 \mathbf{M} ,那么, \mathbf{H} 轴 (即陀螺的旋转对称轴) 将绕 y 轴以角速度 $\dot{\psi}$ 转动.对于这种陀螺转子轴在外力矩 \mathbf{M} 作用下将绕与外力矩 \mathbf{M} 相垂直的 y 轴的转动运动,称为陀螺的“进动运动”,简称为“进动”,角速度 $\dot{\psi}$ 则称为“陀螺的进动角速度”.这种高速旋转的陀螺在外力矩 \mathbf{M} 作用下产生进动的特殊性能,称为陀螺的“进动性”.一般来说,进动角速度远远小于陀螺的自转角速度。

已经知道,当陀螺受到外力矩 \mathbf{M} 作用时,陀螺将会进动.根据作用力与反作用力的概念可知:在陀螺进动的过程中,对应于外力矩 \mathbf{M} ,必然存在一个与它大小相等、方向相反的反作用力矩 \mathbf{M}_G ,这个反作用力与外力矩 \mathbf{M} 同时出现、同时消失,且作用在给陀螺施加外力矩的物体上.这个反作用力矩通常称之为“陀螺反作用力矩”,简称为“陀螺力矩”。

对于高速旋转的物体,当旋转轴改变方向时就会产生陀螺力矩的现象,称之为“陀螺效应”.高速旋转体上所有质点的哥氏 (即 Coriolis, 科里奥利) 惯性力对其中心 O 点之矩的总和称为哥氏惯性力矩,而哥氏惯性力矩就是高速旋转体给予迫使它进动的物体的反作用力矩,即陀螺力矩.对于一般情况可以证明哥氏惯性力对 O 点之矩为

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{H} \times \dot{\psi}.$$

1.2 航天器运动的进动现象^[6]

航天器绕地球高速运动时具有很大的动量矩,这与陀螺类似.假设航天器沿圆轨道绕地球运行,坐标系 $Oxyz$ 是与航天器轨道面相关的一个坐标系,其原点 O 位于地心, Oz 轴垂直于轨道面, Oy 轴在轨道面内且指向惯性空间的某一恒定方向, Ox 轴与 Oy 、 Oz 轴构成右手直角坐标系.为了分析航天器运动的“进动规律”,令航天器的轨道面随同坐标系 $Oxyz$ 一起绕 Oy 轴以角速度 ω_y 旋转起来 (如图 2), 然后研究需要对航天器施加的力.类似于陀螺进动角速度远小于陀螺自旋角速度且进动角速度对陀螺动量矩的影响可以忽略不计,假设航天器的“进动”角速度 ω_y 远小于航天器绕地心的轨道角速度,且“进动”角速度 ω_y 对航天器动量矩的影响可以忽略不计。

由理论力学知^[9],坐标系 $Oxyz$ 绕 y 轴的运动将引起两种附加加速度:牵连加速度 \mathbf{a}_e 和哥氏加速度 \mathbf{a}_k .由于牵连加速度和哥氏加速度的存在,所以航天器要受到相应的力.由图 2 可以看出,这些力对 x 、 y 和 z 轴都有力矩,并且随着航天器位置的变化而变化.对这些力和力矩在航天器运行 1 圈内取平均,由于圆轨道的对称性,而牵连加速度 \mathbf{a}_e 关于 y 轴对称,则存在一个 \mathbf{a}_k 对 x 轴的作用效果.设航天器具有单位质量,则对 x 轴力矩的平均值为

$$\bar{M}_x = H\omega_y, \quad (1)$$

其中 H 为航天器动量矩的大小。

同理,若航天器绕 x 轴以角速度 ω_x “进动”,则航天器所受外力对地心力矩的平均值沿 y 轴方向,且

$$\bar{M}_y = -H\omega_x. \quad (2)$$

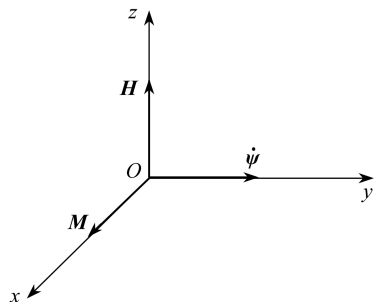


图 1 $\dot{\psi}$ 、 \mathbf{H} 和 \mathbf{M} 的关系

Fig.1 Relationship between $\dot{\psi}$, \mathbf{H} and \mathbf{M}

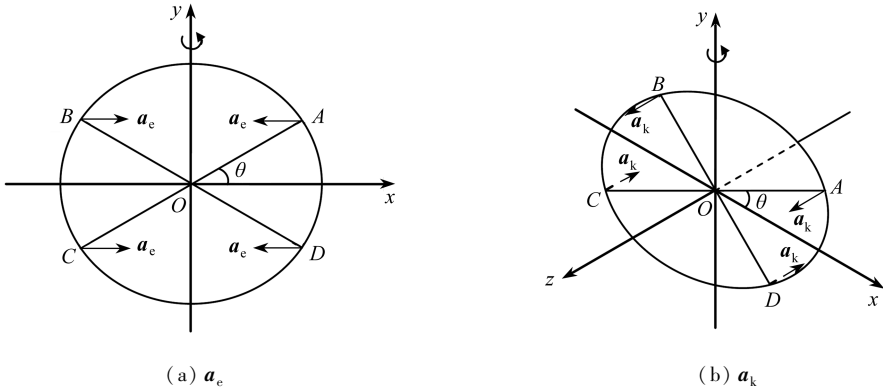


图2 航天器“进动”运动中的附加加速度

Fig.2 Additional accelerations during precessional motion of the spacecraft

综上所述,如果要使航天器绕 y 轴“进动”,则施加外力矩的平均值沿 x 轴方向;如果要使航天器绕 x 轴“进动”,则施加外力矩的平均值沿 y 轴方向,如式(1)和(2),本文将这一规律称为航天器运动的进动规律,这与陀螺进动规律类似,但又不同.这里的力矩指的是平均力矩,即航天器运行 1 圈内对外力矩求平均值.此外,这里的力矩指的是对地心的力矩,而不是对航天器质心的力矩.

2 航天器运动的陀螺效应

根据航天器运动的进动现象与陀螺进动性的相似性,以及前面关于高速旋转体的“陀螺效应”的定义,有如下的定义:绕地球高速运动的航天器,当受到外力矩 \mathbf{M} 作用时会产生进动,在进动的过程中产生哥氏惯性力矩 \mathbf{M}_k (即陀螺力矩)的现象,称之为航天器运动的“陀螺效应”.

2.1 坐标系定义及坐标转换

在本节的分析中,要用到地心赤道惯性坐标系和其它以轨道平面为基准面的轨道坐标系.

1) 地心赤道惯性坐标系 $O-XYZ$

坐标原点在地心 O 点,坐标系基本平面为赤道面, X 轴在赤道面内指向春分点位置, Z 轴垂直于赤道面,与地球的自转轴一致, Y 轴位于赤道面内,与 X, Z 轴形成右手正交坐标系,如图 3 所示.

2) 轨道坐标系 $O-xyz$

为了表达的方便,以轨道平面为基准面建立轨道坐标系,这是很有用的辅助坐标系,根据具体的应用,在轨道平面内选取不同的 x 轴指向.轨道坐标系 $O-xyz$ 是以初始轨道平面为基准面建立轨道坐标系,其 x 轴与轨道的交点线重合,方向由地心指向轨道的升交点; z 轴与角动量 \mathbf{H} 重合; y 轴在轨道平面内,与 x 轴和 z 轴构成右手正交坐标系,如图 3 所示.

3) 轨道坐标系 $O-x'y'z'$

轨道坐标系 $O-x'y'z'$ 是一个旋转坐标系,其 y' 轴与轨道坐标系 $O-xyz$ 的 y 轴重合, x' 轴和 z' 轴分别由轨道坐标系 $O-xyz$ 的 x 轴和 z 轴绕其 y 轴旋转得到.轨道坐标系 $O-x'y'z'$ 可以看成是轨道坐标系 $O-xyz$ 绕 y 轴以某个角速度旋转的动坐标系.

在轨道动力学中^[10],位移矢量和速度矢量通常通过地心赤道惯性坐标系来表达,但轨道分析通常是在轨道坐标系中进行的,因此需要了解各坐标系之间的转换关系.下面给出各坐标

系之间的转换关系。

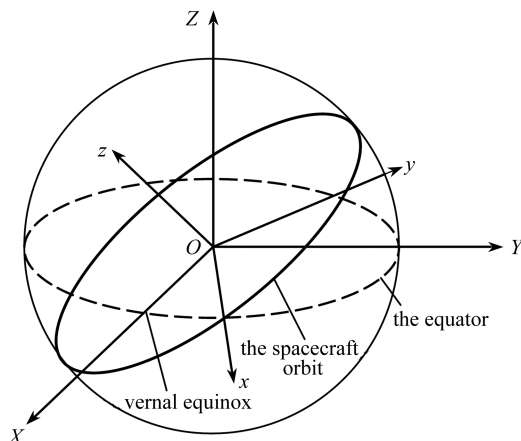


图3 坐标系

Fig.3 Coordinate systems

1) 赤道惯性坐标系 $O-XYZ$ 与轨道坐标系 $O-xyz$ 的转换关系为

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_3(-\Omega)\mathbf{R}_1(-i) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega & -\cos i \sin \Omega & \sin i \sin \Omega \\ \sin \Omega & \cos i \cos \Omega & -\sin i \cos \Omega \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

其中 Ω 为升交点赤经, i 为轨道倾角。

2) 轨道坐标系 $O-xyz$ 与轨道坐标系 $O-x'y'z'$ 的转换关系为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_2(-\omega t) \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & 0 & \sin(\omega t) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\omega t) & 0 & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix},$$

其中 ω 为转动坐标系 $O-x'y'z'$ 绕 y' 轴(即 y 轴)的转动角速度。

3) 赤道惯性坐标系 $O-XYZ$ 与轨道坐标系 $O-x'y'z'$ 的转换关系为

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_3(-\Omega)\mathbf{R}_1(-i)\mathbf{R}_2(-\omega t) \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega \cos(\omega t) - \sin \Omega \sin i \sin(\omega t) & -\sin \Omega \cos i \\ \sin \Omega \cos(\omega t) + \cos \Omega \sin i \sin(\omega t) & \cos \Omega \cos i \\ -\cos i \sin(\omega t) & \sin i \\ \cos \Omega \sin(\omega t) + \sin \Omega \sin i \cos(\omega t) \\ \sin \Omega \sin(\omega t) - \cos \Omega \sin i \cos(\omega t) \\ \cos i \cos(\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

2.2 航天器运动分析

假设航天器沿圆轨道绕地球运行,为了研究航天器运动的“陀螺效应”,只考虑航天器的轨道面随同坐标系 $O-x'y'z'$ 一起绕 Oy' 轴以匀角速度 ω 旋转时所产生的哥氏加速度 \mathbf{a}_k ,其在轨道坐标系 $O-x'y'z'$ 中可以表示为

$$\mathbf{a}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_k \end{bmatrix},$$

其中 $a_k = 2\omega v \sin \theta$, v 为航天器在轨道面内的运行速度大小, θ 为航天器位置矢量 \mathbf{r} 与 Ox' 轴的夹角. 由几何关系可知

$$\sin \theta = \frac{y'}{r},$$

其中 r 为位置矢量 \mathbf{r} 的大小.

根据坐标系之间的转换关系, 上式可写为

$$\sin \theta = \frac{-\cos i \sin \Omega \cdot X + \cos i \cos \Omega \cdot Y + \sin i \cdot Z}{r},$$

因此哥氏加速度 \mathbf{a}_k 在赤道惯性坐标系 $O-XYZ$ 中的表达式为

$$\mathbf{a} = \frac{2\omega v(-\cos i \sin \Omega \cdot X + \cos i \cos \Omega \cdot Y + \sin i \cdot Z)}{r} \times \begin{bmatrix} \cos \Omega \sin(\omega t) + \sin \Omega \sin i \cos(\omega t) \\ \sin \Omega \sin(\omega t) - \cos \Omega \sin i \cos(\omega t) \\ \cos i \cos(\omega t) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

则考虑哥氏惯性力的情况下, 航天器的运动方程为

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = \mathbf{a}. \quad (4)$$

为了研究的方便且不失一般性, 假设航天器初始轨道平面位于 OXY 平面, 则陀螺效应影响下航天器运动方程为

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = \frac{2\omega v Y}{r} \begin{bmatrix} \sin(\omega t) \\ 0 \\ \cos(\omega t) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

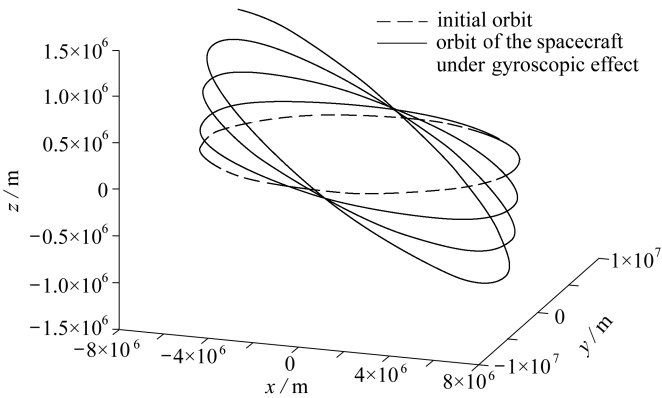


图4 陀螺效应影响下的运动轨道

Fig.4 Orbit of the spacecraft under gyroscopic effect

仿真算例 设航天器初始 Keplerian 圆轨道的轨道高度为 500 km, 航天器轨道面随同坐标系 $O-x'y'z'$ 一起绕 Oy' 轴旋转的角速度为 $\omega = 0.01n$, n 为初始轨道角速度. 假设初始位置向量相对于 X 轴的相位角为 ϕ . 当 $\phi = 0$ 时考虑陀螺效应的运动轨道如图 4 所示, 图 5 给出了哥氏惯性

力随时间的变化规律,不同初始相位角对应的轨道在 Oxz 平面内的投影如图 6 所示。

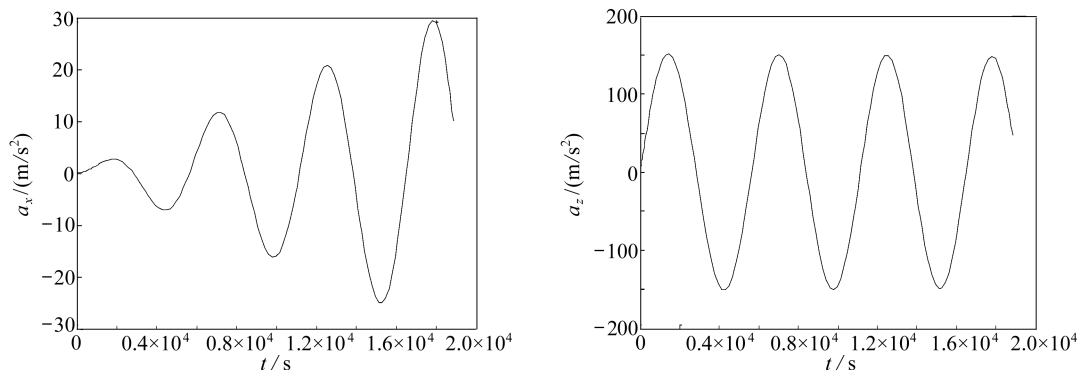


图 5 哥氏惯性力随时间的变化规律

Fig.5 Changes of the Coriolis acceleration with time

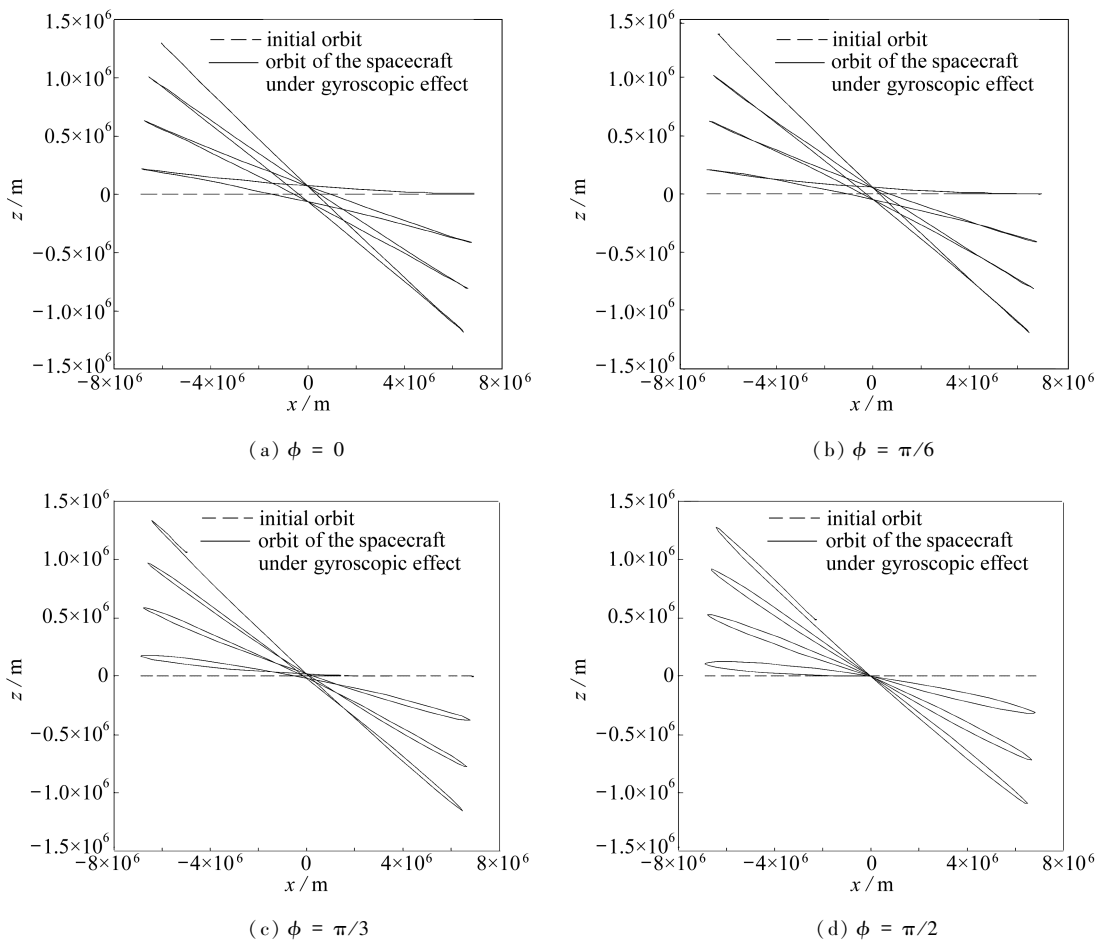


图 6 陀螺效应影响下航天器轨道的投影图

Fig.6 Projections of the spacecraft orbits under gyroscopic effect

由仿真结果可知,由于陀螺效应的影响,航天器的运动轨道将绕 Y 轴旋转。仿真结果与文献[6]中对陀螺轨道的分析结果相似:当 ϕ 接近于 0 时,陀螺轨道的投影图是尖角的,投影图的轨迹无法通过原点,与原点有一小段距离;当 ϕ 接近于 $\pi/2$ 时,投影图是圆角的,并且投影图

的轨迹几乎可以通过原点.由此,可以对陀螺轨道及陀螺效应影响下的轨道进行深层地对比研究.

2.3 航天器运动的陀螺效应

通过前文给出的航天器运动的“陀螺效应”的定义,可以用航天器在进动过程中所产生的哥氏惯性力矩(即陀螺力矩)的大小来描述航天器运动的陀螺效应.

由理论力学理论^[9]可知,力对一点的矩等于该力作用点对矩心的矢径乘以该力矢所得的矢积,即

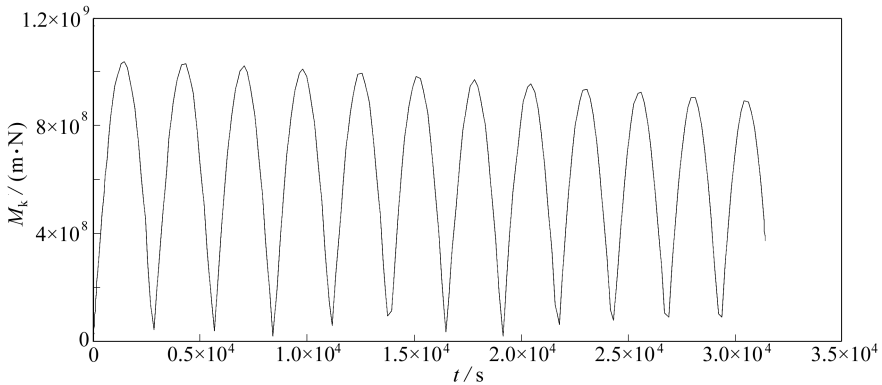
$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (6)$$

其中 $\mathbf{M}_O(\mathbf{F})$ 表示空间力 \mathbf{F} 对点 O 的矩.

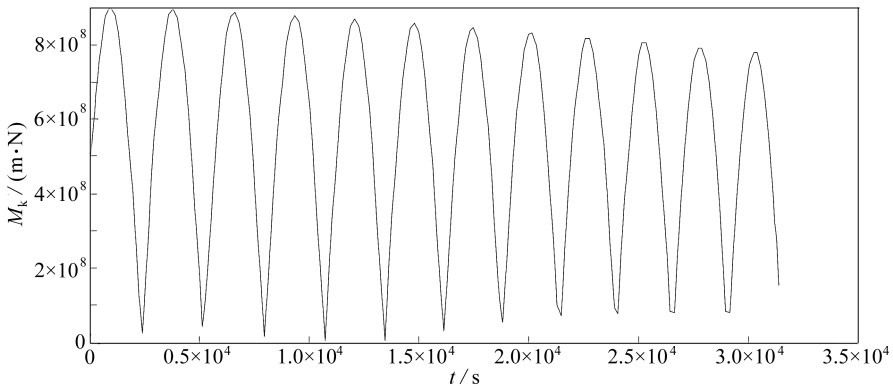
根据式(6)可得航天器在进动的过程中所产生哥氏惯性力矩 \mathbf{M}_k 为

$$\mathbf{M}_k = \frac{2\omega v Y}{r} \begin{bmatrix} Y \cos(\omega t) \\ Z \sin(\omega t) - X \cos(\omega t) \\ -Y \sin(\omega t) \end{bmatrix}.$$

仿真算例 设航天器初始 Keplerian 圆轨道的轨道高度为 500 km.假设初始位置向量相对于 X 轴的相位角为 ϕ ,航天器轨道面随同坐标系 $O-x'y'z'$ 一起绕 Oy' 轴旋转的角速度为 ω .图 7 给出了当 $\omega = 0.01n$ 时(n 为初始轨道角速度), ϕ 分别取 $0, \pi/6$ 和 $\pi/3$ 对应的陀螺效应图.表 1 给出了相应的陀螺力矩的最大值.表 2 给出了当 $\omega = 0.001n$ 和 $\omega = 0.0001n$ 时,取 $\phi = 0$ 对应的陀螺力矩的最大值.



(a) $\phi = 0$



(b) $\phi = \pi/6$

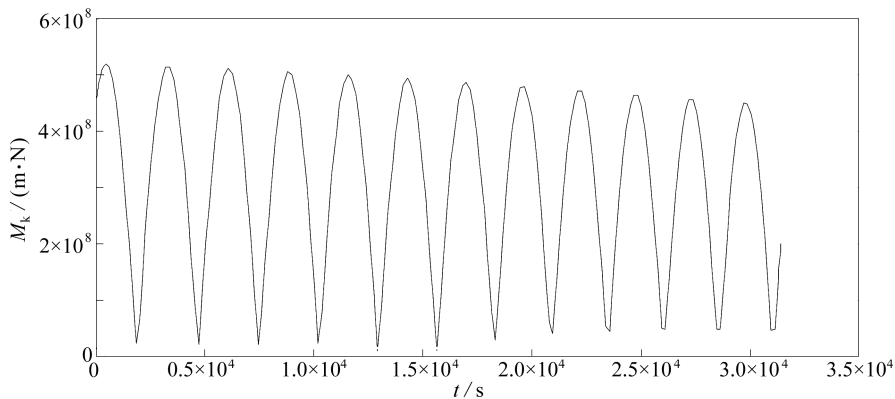
(c) $\phi = \pi/3$

图7 陀螺力矩

Fig.7 Gyroscopic moments at different phase angles

表1 不同相位角 ϕ 对应的陀螺力矩的最大值Table 1 The maximum gyroscopic moment vs. the phase angle ϕ

ϕ	0	$\pi/6$	$\pi/3$
M_k	$1.037 0 \times 10^9$	$8.987 6 \times 10^8$	$7.340 6 \times 10^8$

表2 不同旋转角速度 ω 对应的陀螺力矩的最大值Table 2 The maximum gyroscopic moment vs. the rotating angular velocity ω

ω	$0.01n$	$0.001n$	$0.000 1n$
M_k	$1.037 0 \times 10^9$	$1.037 1 \times 10^8$	$1.037 4 \times 10^7$

仿真结果表明:

- 1) 陀螺力矩值呈近似周期性变化,并且其在每个周期内的幅值随着时间的增长而减小。
- 2) 当旋转角速度 ω 一定时, ϕ 越接近于 0,则陀螺力矩幅值越大; ϕ 越接近于 $\pi/2$,则陀螺力矩幅值越小。
- 3) 当 ϕ 一定时, ω 越大,则陀螺力矩幅值越大。

3 结 论

本文研究了航天器在非 Keplerian 轨道上运动的陀螺效应。根据航天器运动的进动现象与陀螺进动性的相似性,以及高速旋转体的“陀螺效应”的定义,给出了航天器绕地球运动的“陀螺效应”的定义,分析了陀螺效应影响下航天器的运动规律。在航天器的运动过程中,各种摄动都有可能引起陀螺效应,对航天器的运动、甚至是轨道机动都会产生影响。因此后续工作中将研究由各种摄动引起的陀螺效应及其对航天器轨道、轨道机动的影晌,分析在各种轨道机动中能否对陀螺效应加以利用,达到节省燃料的目的等,为空间机动的更好实现提供非 Keplerian 轨道的理论和方 法。

致谢 感谢西安工业大学校长基金资助项目(XAGDXJJ1221)对本研究工作提供的支持。

参考文献(References):

- [1] Vitins M. Kepler motion and gyration[J]. *Celestial Mechanics*, 1978, 17(2): 173-192.
- [2] Junkins J L, Turner J D. On the analogy between orbital dynamics and rigid body dynamics

- [J]. *The Journal of the Astronautical Sciences*, 1979, **17**(4): 345-358.
- [3] Junkins J L, Singla P. How nonlinear is it? A tutorial on nonlinearity of orbit and attitude dynamics[J]. *The Journal of the Astronautical Sciences*, 2004, **52**(1): 7-60.
- [4] 芮筱亭, 刘正福. 关于陀螺力矩的讨论及陀螺力矩在弹丸运动分析中的应用[J]. 兵工学报(弹箭分册), 1988(1): 52-61.(RUI Xiao-ting, LIU Zheng-fu. Discussion about gyroscopic moment and its applications in analysis for the movement of projectile [J]. *Acta Armamentarii (Projectile)*, 1988(1): 52-61.(in Chinese))
- [5] 崔新军. 陀螺力矩的力学实质及陀螺效应对弹丸运动规律的影响[J]. 弹箭与制导学报, 1996(4): 1-4, 11.(CUI Xin-jun. Mechanical essence of gyroscopic moment and its effect on the projectile movement[J]. *Journal of Projectiles, Rockets, Missiles and Guidance*, 1996(4): 1-4, 11.(in Chinese))
- [6] 袁建平, 和兴锁. 航天器轨道机动动力学[M]. 北京: 中国宇航出版社, 2010.(YUAN Jian-ping, HE Xing-suo. *Orbital Maneuvering Dynamics of Spacecraft*[M]. Beijing: China Astronautic Publishing House, 2010.(in Chinese))
- [7] 曹静, 袁建平, 罗建军. 陀螺进动与强迫进动轨道[J]. 力学学报, 2013, **45**(3): 406-411.(CAO Jing, YUAN Jian-ping, LUO Jian-jun. Gyroscopic precession and forced precession orbit[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2013, **45**(3): 406-411.(in Chinese))
- [8] 刘希珠, 雷玉田. 陀螺力学基础[M]. 北京: 清华大学出版社, 1987.(LIU Xi-zhu, LEI Yu-tian. *Essential Gyroscopic Mechanics*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1987.(in Chinese))
- [9] 和兴锁. 理论力学[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2001.(HE Xing-suo. *Theoretical Mechanics*[M]. Xi'an: Northwest Polytechnic University Press, 2001.(in Chinese))
- [10] 郗晓宁, 王威, 高玉东. 近地航天器轨道基础[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2003.(XI Xiao-ning, WANG Wei, GAO Yu-dong. *Fundamentals of Near-Earth Spacecraft Orbit*[M]. Changsha: National University of Defense Technology Press, 2003.(in Chinese))

Gyroscopic Effect Produced During Non-Keplerian Motion of Spacecrafts

LI Xue-hua¹, HE Xing-suo²

(1. Department of Engineering Mechanics, Xi'an Technological University,
Xi'an 710032, P.R.China;

2. Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polytechnical University,
Xi'an 710129, P.R.China)

Abstract: In order to depict the space maneuvering more precisely, some new non-Keplerian theories and methods are required to meet the complex demands of space operation in the future. According to the similarity analysis between the spacecraft precessional motion and gyroscopic precession, the concept of gyroscopic effect produced during the non-Keplerian motion of spacecrafts around the earth was presented. A mathematical model of the gyroscopic effect was established based on the spacecraft dynamic equation, and the spacecraft motion under the gyroscopic effect was investigated. Then a new non-Keplerian orbit theory and method to realize better space maneuvering is provided.

Key words: non-Keplerian orbit; space maneuvering; gyroscopic effect