

基于辛理论的 Timoshenko 梁波散射分析*

吴 锋, 徐小明, 高 强, 钟万勰

(大连理工大学 工程力学系, 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

(本刊编委钟万勰来稿)

摘要: 基于应用力学对偶理论,综合运用了辛 Gramme-Schmidt 正交化算法,辛本征解的独立性,辛两端边值问题精细积分法等特色理论,分析 Timoshenko(铁木辛柯)梁的能带结构,以及端部散射体对于波的散射。

关键词: Timoshenko 梁; 散射; 能带; 辛

中图分类号: O302 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.12.001

引 言

Bernoulli-Euler(伯努利-欧拉)梁理论仅适用于梁的横截面尺寸对比其长度来说很小的情况,如果要进一步考虑该尺寸效应,必须运用 Timoshenko 梁理论.因此, Timoshenko 梁理论被用于许多工程领域中,如车辆轨道^[1]、高层建筑^[2-3]、功能梯度材料^[4-5]、裂缝识别^[6]、深水桩^[7]、地基梁^[8]等.而关于 Timoshenko 梁的理论研究也一直是研究热点.文献[1, 3, 9-12]曾研究过 Timoshenko 梁的振动问题.文献[13]研究过 Timoshenko 梁的动态荷载时域识别问题.文献[2, 14]曾研究过非线性 Timoshenko 梁问题.文献[5]研究过 Timoshenko 梁波传播问题.文献[15-16]曾研究过 Timoshenko 梁的能带结构.虽然关于 Timoshenko 梁理论已有许多研究工作,但是关于 Timoshenko 梁的波散射分析还未见有研究,实际上这一问题的研究显然十分有意义。

钟万勰^[17]基于结构力学与最优控制的相互模拟理论,提出应用力学的辛数学方法,并基于此提出 Timoshenko 梁问题的 Hamilton(哈密顿)对偶方程,研究过 Timoshenko 梁理论的波传播分析.本文在此基础上,进一步研究 Timoshenko 梁的能带结构和波散射分析。

1 动力方程

首先描述清楚本文的结构模型.本文研究的对象为一个半无穷长的 Timoshenko 梁,梁左端链接一个刚体,其结构模型如图 1 所示.当波在梁中传播时,左端刚体可以被看作散射体,在端

* 收稿日期: 2013-08-11; 修订日期: 2013-10-13

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973 计划)资助项目(2009CB918501)

作者简介: 吴锋(1985—),男,江苏靖江人,博士生(E-mail: wufeng-chn@163.com);

徐小明(1986—),男,辽宁丹东人,博士生(E-mail: xxm020201@163.com);

高强(1978—),男,内蒙古赤峰人,副教授,博士(通讯作者. E-mail: qgao@dlut.edu.cn);

钟万勰(1934—),男,浙江德清人,教授,院士(E-mail: zwoffice@dlut.edu.cn).

部便会发生波的散射.现在假设梁的位移为 $\tilde{u}(z)$ 和 $\tilde{\psi}(z)$, 分别是线变位和角变位.在每个小的梁段上都有弯曲变形 $d\tilde{\psi}/dz$ 及 $\tilde{\gamma} = d\tilde{u}/dz - \tilde{\psi}$, 于是梁的变形能密度 U 为

$$U = EJ \frac{1}{2} \left(\frac{d\tilde{\psi}}{dz} \right)^2 + kGA \frac{1}{2} \left(\frac{d\tilde{u}}{dz} - \tilde{\psi} \right)^2, \quad (1)$$

其中, EJ 为弯曲刚度, A 为截面积, k 为截面剪切模量系数.梁的内力为

$$\tilde{M} = EJ\tilde{\kappa} = -EJ \left(\frac{d\tilde{\psi}}{dz} \right), \quad \tilde{Q} = kGA\tilde{\gamma} = kGA \left(\frac{d\tilde{u}}{dz} - \tilde{\psi} \right). \quad (2)$$

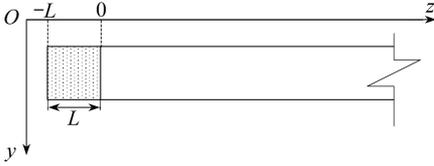


图1 结构模型

Fig.1 The structural model

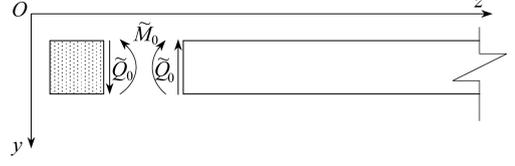


图2 连接条件

Fig.2 The connective condition

梁的动力方程为

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial z} = \rho A \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}, \quad \tilde{Q} - \frac{\partial \tilde{M}}{\partial z} = \rho J \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial t^2}, \quad z \geq 0. \quad (3)$$

其左端要求与刚体连接,因此在左端 $z=0$ 处要求有

$$\tilde{Q}(z) = -\tilde{Q}_0, \quad \tilde{M}(z) = \tilde{M}_0, \quad \tilde{u}(z) = \tilde{u}_0, \quad \tilde{\psi}(z) = \tilde{\psi}_0. \quad (4)$$

将内力与应变消去,得到以位移表示的动力方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \left[kGA \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} - \tilde{\psi} \right) \right] = \rho A \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(EJ \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} \right) + kGA \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} - \tilde{\psi} \right) = \rho J \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (5)$$

对于左端刚体,其动力方程也可写成

$$\frac{\partial \tilde{Q}_r}{\partial z} = \rho_r A_r \frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial t^2}, \quad \tilde{Q}_r - \frac{\partial \tilde{M}_r}{\partial z} = \rho_r J_r \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_r}{\partial t^2}, \quad -L \leq z \leq 0, \quad (6)$$

其中, A_r, ρ_r 和 J_r 分别表示左端刚体截面积、密度和转动惯矩,下标“r”表刚体.刚体左端自由,右端与 Timoshenko 梁左端连接,其连接条件如图 2 所示,要求在 $z=0$ 处有

$$\tilde{Q}_r(z) = \tilde{Q}_0, \quad \tilde{M}_r(z) = -\tilde{M}_0, \quad \tilde{u}_r(z) = \tilde{u}_0, \quad \tilde{\psi}_r(z) = \tilde{\psi}_0. \quad (7)$$

刚体没有应变,角变位为常数,而线变位为线性变形,根据 $z=0$ 处的线变位和角变位可以得到

$$\tilde{u}_r(z) = (\tilde{u}_0 - \tilde{\psi}_0 L) \frac{-z}{L} + \tilde{u}_0 \frac{z+L}{L}, \quad \tilde{\psi}_r(z) = \tilde{\psi}_0. \quad (8)$$

把式(8)带入式(6)可得到左端刚体的动力方程:

$$\begin{pmatrix} \tilde{Q}_0 \\ \tilde{M}_0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_r A_r L & -\frac{\rho_r A_r L^2}{2} \\ -\frac{\rho_r A_r L^2}{2} & \frac{\rho_r A_r L^3}{3} + \rho_r J_r L \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\tilde{u}}_0 \\ \ddot{\tilde{\psi}}_0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

分析波散射时,要对时间采用化为频域的方法,令

$$\begin{cases} \tilde{u}(z) = u(z, \omega) e^{-i\omega t}, \tilde{\psi}(z) = \psi(z, \omega) e^{-i\omega t}, \\ \tilde{Q}(z) = Q(z, \omega) e^{-i\omega t}, \tilde{M}(z) = M(z, \omega) e^{-i\omega t}, \end{cases} \quad (10)$$

其中 ω 是圆频率, $i = \sqrt{-1}$. 于是 Timoshenko 梁的动力方程变为

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \left[kGA \left(\frac{du}{dz} - \psi \right) \right] + \rho A \omega^2 u = 0, \\ \frac{d}{dz} \left(EJ \frac{d\psi}{dz} \right) + kGA \left(\frac{du}{dz} - \psi \right) + \rho J \omega^2 \psi = 0. \end{cases} \quad (11)$$

为方便分析, 可以用向量来表示

$$\mathbf{q} = (u, \psi)^T, \dot{\mathbf{q}} = (\dot{u}, \dot{\psi})^T, \quad (12)$$

其中 $\dot{\#} = d\#/dz$. 对于 Timoshenko 梁的动力方程(11), 可以给出相应的势能变分原理:

$$\begin{cases} \delta \Pi = 0, \\ \Pi = \int_0^{+\infty} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dz - u(\infty) Q(\infty) + u(0) Q(0) + \\ \psi(\infty) M(\infty) - \psi(0) M(0), \end{cases} \quad (13)$$

其中 $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 是 Lagrange 函数.

$$\begin{cases} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_{22} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_{21} \mathbf{q} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_{11} \mathbf{q}, \\ \mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} -\rho \omega^2 A & 0 \\ 0 & kGA - \rho \omega^2 J \end{bmatrix}, \mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} kGA & 0 \\ 0 & EJ \end{bmatrix}, \mathbf{K}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -kGA \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (14)$$

由于其中有了动力项, 它已经不能保证为最小势能, 但势能仍应取驻值.

采用引入对偶变量的方法, 令

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{K}_{22} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_{21} \mathbf{q} = \begin{pmatrix} Q \\ -M \end{pmatrix}. \quad (15)$$

引入 Hamilton 函数:

$$\begin{cases} H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{D} \mathbf{p} + \mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{q} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{B} \mathbf{q}, \\ \mathbf{D} = \mathbf{K}_{22}^{-1}, \mathbf{A} = -\mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21}, \mathbf{B} = \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21}. \end{cases} \quad (16)$$

于是有

$$\Pi = \int_0^{+\infty} [\mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p})] dz - \mathbf{q}_\infty^T \mathbf{p}_\infty + \mathbf{q}_0^T \mathbf{p}_0. \quad (17)$$

对上式变分有

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}. \quad (18)$$

把式(16)带入上式得

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{H} \mathbf{v}, \quad (19)$$

其中

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{D} \\ \mathbf{B} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22}^{-1} \\ \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

\mathbf{H} 为 Hamilton 矩阵, 有 $\mathbf{JH} = (\mathbf{JH})^T$ 的性质.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

其中 \mathbf{I} 为 2×2 的单位阵. 在 $z = 0$ 处的边界有

$$\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0 = (-Q_0, -M_0)^T, \quad \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 = (u_0, \psi_0)^T. \quad (22)$$

在频域下左端刚体的动力方程变为

$$\begin{pmatrix} Q_0 \\ M_0 \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{bmatrix} \rho_r A_r L & -\frac{\rho_r A_r L^2}{2} \\ -\frac{\rho_r A_r L^2}{2} & \frac{\rho_r A_r L^3}{3} + \rho_r J_r L \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

结合式(22)和式(23)可以把刚体的动力方程写成矩阵形式:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{K}_r \mathbf{q}_0, \quad (24)$$

其中 \mathbf{K}_r 为动力刚度矩阵:

$$\mathbf{K}_r = \omega^2 \begin{bmatrix} \rho_r A_r L & -\frac{\rho_r A_r L^2}{2} \\ -\frac{\rho_r A_r L^2}{2} & \frac{\rho_r A_r L^3}{3} + \rho_r J_r L \end{bmatrix}. \quad (25)$$

2 Timoshenko 梁的能带结构

Timoshenko 梁的变形成能密度 Lagrange 函数, 因为考虑给定 ω^2 , 加入惯性因素后不再正定, 根据式(14)可以提出动力刚度阵密度 $\mathbf{K}_d(\omega^2)$:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix}^T \mathbf{K}_d(\omega^2) \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_d(\omega^2) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

要分析 Timoshenko 梁的能带结构, 必须分析 \mathbf{H} 的特征值和特征向量. 根据式(19), $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{H}\mathbf{v}$, \mathbf{H} 是 Hamilton 矩阵, 其特征值必然是成对出现. 设 \mathbf{H} 的某个特征值 $i\mu$ 出现在虚轴, 其本征状态向量为 $\boldsymbol{\psi}$, 则 $\mathbf{v}(z) = e^{i\mu z} \boldsymbol{\psi}$ 便是 Timoshenko 梁的一个扩展模态, 相当于位移有约束

$$\dot{\mathbf{q}} = i\mu \mathbf{q}, \quad (27)$$

其中将 $i\mu$ 看成为给定, 而将 ω^2 当作待求. 把式(27)代入式(14), 并注意到对于复数运算, 转置时需要采用 Hermit 转置, 有

$$L(\mathbf{q}, \mu) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^H [\mathbf{K}_{11} + i\mu(\mathbf{K}_{12} - \mathbf{K}_{21}) + \mu^2 \mathbf{K}_{22}] \mathbf{q}, \quad (28)$$

式中, 上标“H”表示 Hermit 转置, μ 是给定的, 只有 ω^2 待寻求. 在动力刚度阵 \mathbf{K}_d 中, ω^2 并未显式给出, 对于位移 \mathbf{q} 取极值 $\delta L_z(\mathbf{q}, \mu) = 0$, 得方程

$$[\mathbf{K}_{11} + i\mu(\mathbf{K}_{12} - \mathbf{K}_{21}) + \mu^2 \mathbf{K}_{22}] \mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (29)$$

把式(14)代入上式, 得

$$[\mathbf{K}_{\text{qs}\mu} - \omega^2 \mathbf{M}_{\text{qs}\mu}] \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (30)$$

$$\mathbf{M}_{\text{qs}\mu} = \begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho J \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{\text{qs}\mu} = \begin{bmatrix} \mu^2 kGA & i\mu kGA \\ -i\mu kGA & kGA + \mu^2 EJ \end{bmatrix}, \quad (31)$$

其中 $\mathbf{K}_{\text{qs}\mu}$ 是静力刚度阵的贡献部分, $\mathbf{M}_{\text{qs}\mu}$ 是质量贡献的动力部分. 式(30)就是一个普通的振动问题本征值方程, 有 2 个 ω^2 本征值. 令

$$\det(\mathbf{K}_{\text{qsu}} - \omega^2 \mathbf{M}_{\text{qsu}}) = 0, \tag{32}$$

可得

$$\omega^4 - \omega^2 \left(\frac{\mu^2 E}{\rho} + \frac{\mu^2 kG}{\rho} + \frac{kGA}{\rho J} \right) + \frac{\mu^4 EkG}{\rho^2} = 0. \tag{33}$$

取不同的 μ , 由上式计算出 ω^2 , 按大小次序排列, 即可画出 2 条能带曲线。

3 波的散射

对于如图 1 所示结构, 给定一个频率为 ω 的入射波, 问入射波和反射波的关系. 对于离散的半无穷周期结构, 可用辛矩阵本征向量展开的方法求解. 本文考虑的是连续半无穷长 Timoshenko 梁, 可用 Hamilton 矩阵的本征向量展开. \mathbf{H} 是 4×4 的 Hamilton 矩阵, 当给定 ω 时可以求解其本征值和本征向量. 令行列式 $\det(\mathbf{H} - \mu \mathbf{I}) = 0$, 展开有

$$\mu^4 + \mu^2 \rho \omega^2 \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{kG} \right) + \frac{\rho^2 \omega^4}{EGk} - \frac{\rho \omega^2 A}{EJ} = 0. \tag{34}$$

有两个不同的 μ^2 可以满足上述方程, 但还需要区分: 1) μ^2 为两个负根; 2) μ^2 为一个负根一个正根. 如果都为负根, 则 \mathbf{H} 的 4 个本征值都在虚轴上, 此时相应的本征值为通带本征值; 如果有一个正根, 则 \mathbf{H} 有两个本征值在实轴上, 此时相应的本征值为禁带本征值, 禁带本征值对应于局部振动模态. 这两种情况必须分别考虑。

3.1 全通带的情况

半无穷长 Timoshenko 梁左端部连接有一个刚体, 振动模态在连接 $z = 0$ 的状态向量 \mathbf{v}_0 是辛矩阵的各个模态一起构成的, 可以用全部辛本征向量展开. 其中有通带的本征解也有禁带的本征解. 首先考虑全通带的情况, 假设 \mathbf{H} 的 4 个本征值记为 $i\mu_1, -i\mu_1$ 和 $i\mu_2, -i\mu_2$, 相应的本征向量记为 $\boldsymbol{\psi}_{a1}, \boldsymbol{\psi}_{b1}$ 和 $\boldsymbol{\psi}_{a2}, \boldsymbol{\psi}_{b2}$, 并且要求辛归一性, 即

$$\boldsymbol{\psi}_{a1}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\psi}_{b1} = 1, \boldsymbol{\psi}_{a2}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\psi}_{b2} = 1. \tag{35}$$

如果 $\boldsymbol{\psi}_{a1}$ 和 $\boldsymbol{\psi}_{b1}$ 不具有归一性, 假设

$$\boldsymbol{\psi}_{a1} = \boldsymbol{\psi}_{a1r} + i\boldsymbol{\psi}_{a1i}, \tag{36}$$

$\boldsymbol{\psi}_{a1r}, \boldsymbol{\psi}_{a1i}$ 分别是 $\boldsymbol{\psi}_{a1}$ 的实部和虚部, 则因为 $\boldsymbol{\psi}_{b1}$ 对应的本征值是 $-i\mu_1$, 因此 $\boldsymbol{\psi}_{b1}$ 有

$$\boldsymbol{\psi}_{b1} = i\bar{\boldsymbol{\psi}}_{b1} = \boldsymbol{\psi}_{a1i} + i\boldsymbol{\psi}_{a1r}, \tag{37}$$

$\bar{\#}$ 表示#的共轭, 根据辛归一性, 有

$$\boldsymbol{\psi}_{a1}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\psi}_{b1} = 2\boldsymbol{\psi}_{a1r}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\psi}_{a1i}. \tag{38}$$

因此只要令

$$\boldsymbol{\psi}_{a1} = \frac{1}{\sqrt{2i\boldsymbol{\psi}_{a1r}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\psi}_{a1i}}} \boldsymbol{\psi}_{a1}, \boldsymbol{\psi}_{b1} = i\bar{\boldsymbol{\psi}}_{a1}, \tag{39}$$

便可得到辛归一的本征向量. 在 4 个本征向量中, $\boldsymbol{\psi}_{a1}, \boldsymbol{\psi}_{a2}$ 是反射的辛本征向量, $\boldsymbol{\psi}_{b1}, \boldsymbol{\psi}_{b2}$ 是入射的辛本征向量. 为分析波散射问题, 要将状态向量表达清楚. 状态向量可区分为波传播的 2 个反射波和 2 个入射波:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^2 a_i \boldsymbol{\psi}_{ai} + \sum_{i=1}^2 b_i \boldsymbol{\psi}_{bi}, \tag{40}$$

其中 a_i 为待求未知数, 可取复数值, b_i 为给定值. 这些通带的 a_i 和 b_i 可分别组成 2 维向量 \mathbf{a}_{mpb} 和 \mathbf{b}_{mpb} , 分别代表反射和入射的波向量. 散射问题就是要研究入射波向量 \mathbf{b}_{mpb} 和反射波向量 \mathbf{a}_{mpb}

之间的关系 $\mathbf{a}_{\text{mpb}} = \mathbf{S}_{\text{ca}} \mathbf{b}_{\text{mpb}}$. 只要解出复数的 m_{pb} 维向量 \mathbf{a}_{mpb} 和 \mathbf{b}_{mpb} , 状态向量就得到了.

本文根据文献[17]的分析表明,各波的传播互相独立无关.但左端的刚体提供了动力刚度阵 $\mathbf{K}_r(\omega^2)$. 独立无关的传播波在 $\mathbf{K}_r(\omega^2)$ 处发生散射,才互相发生关系.散射问题用状态向量的方法求解,一方面要用辛数学方法;另一方面在考虑与端部弹性体连接时,要求的是状态向量双方一致.为方便分析,现在把 Hamilton 矩阵 \mathbf{H} 的本征向量矩阵 Ψ 写成

$$\Psi(\omega^2) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}'_a & \mathbf{Q}'_b \\ \mathbf{P}'_a & \mathbf{P}'_b \end{bmatrix} = [\Psi_a \quad \Psi_b], \quad (41)$$

其中

$$\Psi_a = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}'_a \\ \mathbf{P}'_a \end{bmatrix} = [\psi_{a1} \quad \psi_{a2}], \quad \Psi_b = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}'_b \\ \mathbf{P}'_b \end{bmatrix} = [\psi_{b1} \quad \psi_{b2}]. \quad (42)$$

本征向量矩阵 Ψ 的子矩阵 $\mathbf{Q}'_a, \mathbf{Q}'_b, \mathbf{P}'_a$ 和 \mathbf{P}'_b 全部是 2×2 的复数矩阵.上标“'”表示是复数的.因此根据式(20)和式(40),梁左端部 $z = 0$ 处的位移与对偶力的复数向量分别为

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{Q}'_a \mathbf{a}_{\text{mpb}} + \mathbf{Q}'_b \mathbf{b}_{\text{mpb}}, \quad \mathbf{p}_0 = \mathbf{P}'_a \mathbf{a}_{\text{mpb}} + \mathbf{P}'_b \mathbf{b}_{\text{mpb}}, \quad (43)$$

其中反射系数向量 \mathbf{a}_{mpb} 为待求,而 \mathbf{b}_{mpb} 为给定入射系数向量.因梁左端部链接一个刚体,刚体的动力方程为

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{K}_r \mathbf{q}_0.$$

把式(43)代入上式得

$$\mathbf{a}_{\text{mpb}} = -(\mathbf{P}'_a - \mathbf{K}_r \mathbf{Q}'_a)^{-1}(\mathbf{P}'_b - \mathbf{K}_r \mathbf{Q}'_b) \mathbf{b}_{\text{mpb}}. \quad (44)$$

由此得到散射矩阵为

$$\mathbf{S}_{\text{ca}} = -(\mathbf{P}'_a - \mathbf{K}_r \mathbf{Q}'_a)^{-1}(\mathbf{P}'_b - \mathbf{K}_r \mathbf{Q}'_b). \quad (45)$$

3.2 有禁带的情况

当 μ^2 为一个负根一个正根的情况时,必然出现禁带特征值.假设 \mathbf{H} 的两个纯虚数本征值 $i\mu_p$ 和 $-i\mu_p$, 相应的本征向量记为 ψ_{ap} 和 ψ_{bp} , 且 ψ_{ap} 和 ψ_{bp} 满足辛归一原则 $\psi_{\text{ap}}^T \mathbf{J} \psi_{\text{bp}} = 1$. 状态向量由 2 个通带本征向量和 2 个禁带本征向量构成. 2 个通带本征向量构成一个二维的通带子空间,同时 2 个禁带本征向量构成一个二维的禁带子空间.通带子空间的基是 2 个复数通带本征向量 ψ_{ap} 和 ψ_{bp} . 同时通带子空间的基也可以看做是 ψ_{ap} 的实部向量 ψ_{ar} 和虚部向量 ψ_{ai} . 而禁带子空间的两个基则可以通过辛 Gramme-Schmidt 正交化算法找到,而无需计算其禁带本征值.把通带子空间的两个基和禁带子空间的两个基写为

$$\mathbf{C}(\omega^2) = (\mathbf{V}_{\text{ap}} \quad \mathbf{V}_{\text{as}} \quad \mathbf{V}_{\text{bp}} \quad \mathbf{V}_{\text{bs}}), \quad (46)$$

其中

$$\mathbf{V}_{\text{ap}} = \sqrt{2} \psi_{\text{ar}}, \quad \mathbf{V}_{\text{bp}} = \sqrt{2} \psi_{\text{ai}}. \quad (47)$$

上式中, ψ_{ar} 和 ψ_{ai} 前乘以 $\sqrt{2}$ 是因为根据式(38),满足辛归一的通带特征向量有 $\psi_{\text{ar}}^T \mathbf{J} \psi_{\text{ai}} = 1/2$, 因此 $(\sqrt{2} \psi_{\text{ar}})^T \mathbf{J} (\sqrt{2} \psi_{\text{ai}}) = 1$. \mathbf{V}_{as} 和 \mathbf{V}_{bs} 是禁带子空间的两个基,通过任选两个初始基:

$$\mathbf{V}'_{\text{as}} = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0)^T, \quad \mathbf{V}'_{\text{bs}} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)^T, \quad (48)$$

令

$$\mathbf{V}_{\text{as}} = \mathbf{V}'_{\text{as}} + a_1 \mathbf{V}_{\text{ap}} + a_2 \mathbf{V}_{\text{bp}}, \quad \mathbf{V}_{\text{bs}} = \mathbf{V}'_{\text{bs}} + a_3 \mathbf{V}_{\text{ap}} + a_4 \mathbf{V}_{\text{bp}}, \quad (49)$$

其中 a_1, a_2, a_3, a_4 为待定常数.取辛正交

$$\begin{cases} \mathbf{V}_{\text{bp}}^T \mathbf{J} \mathbf{V}_{\text{as}} = \mathbf{V}_{\text{bp}}^T \mathbf{J} \mathbf{V}'_{\text{as}} - a_1 = 0, & \mathbf{V}_{\text{ap}}^T \mathbf{J} \mathbf{V}_{\text{as}} = \mathbf{V}_{\text{ap}}^T \mathbf{J} \mathbf{V}'_{\text{as}} + a_2 = 0; \\ \mathbf{V}_{\text{bp}}^T \mathbf{J} \mathbf{V}_{\text{bs}} = \mathbf{V}_{\text{bp}}^T \mathbf{J} \mathbf{V}'_{\text{bs}} - a_3 = 0, & \mathbf{V}_{\text{ap}}^T \mathbf{J} \mathbf{V}_{\text{bs}} = \mathbf{V}_{\text{ap}}^T \mathbf{J} \mathbf{V}'_{\text{bs}} + a_4 = 0, \end{cases} \quad (50)$$

可确定常数 a_1, a_2, a_3, a_4 . 再把 V_{as} 和 V_{bs} 辛归一化即可. 经过辛 Gramme-Schmidt 正交归一化后得到的矩阵 C 是辛矩阵. 对辛矩阵 C 重新排列, 把通带基 V_{bp} 与禁带基 V_{as} 互换位置, 得

$$C_{ex}(\omega^2) = (V_{ap} \quad V_{bp} \quad V_{as} \quad V_{bs}). \quad (51)$$

把 $C_{ex}(\omega^2)$ 用于转化 Hamilton 矩阵 H 有

$$H_{ex} = C_{ex}^{-1} H C_{ex} = \begin{bmatrix} H_{pb} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & H_{sb} \end{bmatrix}, \quad (52)$$

其中, H_{ex} 为对角化矩阵, H_{pb} 为 2×2 的通带 Hamilton 矩阵, H_{sb} 为 2×2 的禁带 Hamilton 矩阵.

当采用了 $C_{ex}(\omega^2)$ 变换后, 梁的动力方程(19)化为

$$\dot{\mathbf{v}}_{pex} = H_{pb} \mathbf{v}_{pex}, \quad (53)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{sex} = H_{sb} \mathbf{v}_{sex}, \quad (54)$$

其中

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_{pex} \\ \mathbf{v}_{sex} \end{pmatrix} = C_{ex}^{-1} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_{pex} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{mpb} \\ \mathbf{p}_{mpb} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{sex} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{msb} \\ \mathbf{p}_{msb} \end{pmatrix}, \quad (55)$$

$\mathbf{q}_{mpb}, \mathbf{p}_{mpb}$ 分别是通带子空间内的广义位移和广义力, $\mathbf{q}_{msb}, \mathbf{p}_{msb}$ 分别是禁带子空间内的广义位移和广义力. 可见, 利用 $C_{ex}(\omega^2)$ 把梁的状态向量分成通带和禁带两个部分, 且两个部分互相独立. 式(54)给出禁带子空间内广义位移的微分方程, 实际上禁带解的物理意义是代表梁的局部振动, 对于半无穷长梁来说, 在 $z=0$ 处的状态向量 $\mathbf{v}_{sex}(0)$ 与无穷长处 $\mathbf{v}_{sex}(\infty)$ 是没有关系的. 对于禁带子空间内广义位移的微分方程, 可以利用精细积分法计算, 得到在 $z=0$ 处的广义位移 \mathbf{q}_{msb} 和广义力 \mathbf{p}_{msb} 的关系 $-\mathbf{Q}_\infty \mathbf{q}_{msb} = \mathbf{p}_{msb}$, 这一部分在文献[17]中有详细的介绍, 这里不再给出. 因为梁左端是与刚体连接, 梁的动力方程变换后, 也需要对刚体的动力方程(24)进行相同的变换. 首先把矩阵 $C(\omega^2)$ 写成分块形式:

$$C(\omega^2) = (V_{ap} \quad V_{as} \quad V_{bp} \quad V_{bs}) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{ac} & \mathbf{Q}_{bc} \\ \mathbf{P}_{ac} & \mathbf{P}_{bc} \end{bmatrix}. \quad (56)$$

注意到 $C_{ex}(\omega^2)$ 是辛矩阵 $C(\omega^2)$ 的一个排列, 根据式(53)有

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{p}_0 \end{pmatrix} = C_{ex} \mathbf{v}_{ex} = C \begin{pmatrix} \mathbf{a}_c \\ \mathbf{b}_c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_c = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{mpb} \\ \mathbf{q}_{msb} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_c = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{mpb} \\ \mathbf{p}_{msb} \end{pmatrix}, \quad (57)$$

其中 \mathbf{a}_c 和 \mathbf{b}_c 分别是广义位移和广义力. 把式(57)和式(24)结合有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{repp} & \mathbf{K}_{reps} \\ \mathbf{K}_{resp} & \mathbf{K}_{ress} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{mpb} \\ \mathbf{q}_{msb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{mpb} \\ \mathbf{p}_{msb} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_{rc} = (\mathbf{K}_r \mathbf{Q}_{bc} - \mathbf{P}_{bc})^{-1} (\mathbf{P}_{ac} - \mathbf{K}_r \mathbf{Q}_{ac}). \quad (58)$$

上式中, \mathbf{K}_{rc} 是广义动力刚度矩阵, 并且是实对称矩阵, 只需要利用 C 是辛矩阵这一性质即可证明. \mathbf{q}_{msb} 和 \mathbf{p}_{msb} 是禁带子空间内的广义位移和广义力, 有关系 $-\mathbf{Q}_\infty \mathbf{q}_{msb} = \mathbf{p}_{msb}$, 因此必须给予考虑, 有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{repp} & \mathbf{K}_{reps} \\ \mathbf{K}_{resp} & \mathbf{K}_{ress} + \mathbf{Q}_\infty \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{mpb} \\ \mathbf{q}_{msb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{mpb} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (59)$$

此时禁带部分再无外力作用, 这相当于将 \mathbf{K}_{rc} 刚度阵的右下 2×2 子块 \mathbf{K}_{ress} 叠加了 \mathbf{Q}_∞ , 体现了周期结构的禁带部分的作用. 再可以通过凝聚作用得

$$\mathbf{K}_{red} \mathbf{q}_{mpb} = \mathbf{p}_{mpb}, \quad \mathbf{K}_{red} = \mathbf{K}_{repp} - \mathbf{K}_{reps} (\mathbf{K}_{ress} + \mathbf{Q}_\infty)^{-1} \mathbf{K}_{resp}. \quad (60)$$

到这一步, 已经给出只包含通带部分的 Timoshenko 梁动力方程(53)和只包含通带部分的

刚体动力方程(60),因此就可以按照3.1小节中全通带情况下的做法进行处理。

4 功率流

根据文献[17],通过梁坐标 z 处的平均功率流可计算为

$$W(z) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \{ \mathbf{p}^T \mathbf{e}^{-i\omega t} \} \cdot \operatorname{Re} \{ i\omega \mathbf{q} \mathbf{e}^{-i\omega t} \} dt. \quad (61)$$

上式中, \mathbf{q} 和 \mathbf{p} 已通过式(12)和(15)定义,分别代表梁在坐标 z 处的位移向量和对偶力向量。由于 \mathbf{q} 和 \mathbf{p} 是不随时间变化的,因此上式可以积分得

$$W(z) = \frac{i\omega}{4} (\mathbf{p}^H \mathbf{q} - \mathbf{q}^H \mathbf{p}) = \frac{i\omega}{4} \mathbf{v}^H \mathbf{J} \mathbf{v}. \quad (62)$$

功率流 $W(z)$ 是坐标 z 的函数,对 z 求导并结合式(19),有

$$\frac{dW}{dz} = \frac{i\omega}{4} (\dot{\mathbf{v}}^H \mathbf{J} \mathbf{v} + \mathbf{v}^H \mathbf{J} \dot{\mathbf{v}}) = \frac{i\omega}{4} (\mathbf{v}^H \mathbf{H}^H \mathbf{J} \mathbf{v} + \mathbf{v}^H \mathbf{J} \mathbf{H} \mathbf{v}). \quad (63)$$

注意到 \mathbf{H} 是实数 Hamilton 矩阵,有 $\mathbf{J} \mathbf{H} = (\mathbf{J} \mathbf{H})^T = -\mathbf{H}^T \mathbf{J}$,因此上式表明 $dW/dz = 0$,也即功率流守恒。在 $z = 0$ 处,梁的左端连接一个刚体,根据该刚体的动力方程, $\mathbf{p}_0 = \mathbf{K}_r \mathbf{q}_0$,代入式(62)并考虑到 \mathbf{K}_r 是实对称动力刚度矩阵,可以计算出 $z = 0$ 处的功率流

$$W(0) = \frac{i\omega}{4} (\mathbf{q}_0^H \mathbf{K}_r^H \mathbf{q} - \mathbf{q}_0^H \mathbf{K}_r \mathbf{p}_0) = 0. \quad (64)$$

因为功率流守恒,有 $W(z) = 0$,现在考虑状态向量中入射波部分与反射波部分的功率流。根据3.1小节分析,状态向量可区分为波传播的2个反射波和2个入射波:

$$\mathbf{v} = \Psi_a \mathbf{a}_{\text{mpb}} + \Psi_b \mathbf{b}_{\text{mpb}}, \quad (65)$$

Ψ_a 和 Ψ_b 分别是 Timoshenko 梁通带反射波和入射波本征向量, \mathbf{a}_{mpb} 和 \mathbf{b}_{mpb} 分别代表反射和入射的波向量,它们之间有关系 $\mathbf{a}_{\text{mpb}} = \mathbf{S}_{\text{ca}} \mathbf{b}_{\text{mpb}}$ 。只要解出复数的 m_{pb} 维向量 \mathbf{a}_{mpb} 和 \mathbf{b}_{mpb} ,状态向量就得到了。现在把式(65)代入式(62)可得

$$\mathbf{a}_{\text{mpb}}^H \Psi_a^H \mathbf{J} \Psi_a \mathbf{a}_{\text{mpb}} + \mathbf{a}_{\text{mpb}}^H \Psi_a^H \mathbf{J} \Psi_b \mathbf{b}_{\text{mpb}} + \mathbf{b}_{\text{mpb}}^H \Psi_b^H \mathbf{J} \Psi_a \mathbf{a}_{\text{mpb}} + \mathbf{b}_{\text{mpb}}^H \Psi_b^H \mathbf{J} \Psi_b \mathbf{b}_{\text{mpb}} = 0. \quad (66)$$

因为梁通带反射波本征向量 Ψ_a 和入射波本征向量 Ψ_b 有辛归一正交性,也即

$$\Psi_a^H \mathbf{J} \Psi_b = \mathbf{I}, \quad \Psi_b = i \bar{\Psi}_a. \quad (67)$$

因此

$$\begin{cases} \Psi_b^H \mathbf{J} \Psi_a = \mathbf{0}, & \Psi_a^H \mathbf{J} \Psi_b = \mathbf{0}; \\ \Psi_a^H \mathbf{J} \Psi_a = i\mathbf{I}, & \Psi_b^H \mathbf{J} \Psi_b = -i\mathbf{I}. \end{cases} \quad (68)$$

把式(68)代入式(66),可得

$$\mathbf{a}_{\text{mpb}}^H \mathbf{a}_{\text{mpb}} = \mathbf{b}_{\text{mpb}}^H \mathbf{b}_{\text{mpb}}. \quad (69)$$

这就是功率流守恒的要求,也即表明入射波的功率流等于反射波的功率流,把 $\mathbf{a}_{\text{mpb}} = \mathbf{S}_{\text{ca}} \mathbf{b}_{\text{mpb}}$ 代入上式,并考虑到 \mathbf{b}_{mpb} 具有任意性有

$$\mathbf{S}_{\text{ca}}^H \mathbf{S}_{\text{ca}} = \mathbf{I}, \quad (70)$$

这表明散射矩阵 \mathbf{S}_{ca} 是一个酉矩阵。

5 算例分析

考虑一个半无穷长 Timoshenko 梁左端链接一个刚体,梁的截面形式为工字钢,其结构和材料参数取为

$$E = 2 \times 10^{11} \text{ Pa}, G = 4 \times 10^{10} \text{ Pa}, J = 0.0124 \text{ m}^4,$$

$$\rho = 7430 \text{ kg/m}^3, A = 0.12 \text{ m}^2, k = 6/5.$$

左端刚体作为散射体,其截面面积 A_r , 弯曲惯性矩 J_r 和密度 ρ_r 均与梁一样,长度 $L = 0.1 \text{ m}$. 首先计算该 Timoshenko 梁的能带结构,把梁参数代入式(33)并分别取不同的 μ 计算能带,便可以得到能带图,能带图见图 3.

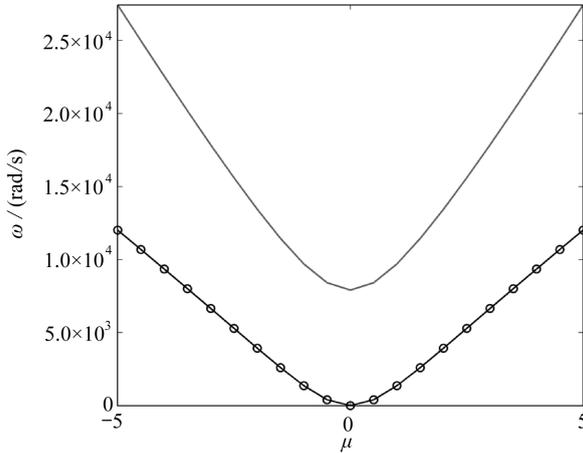


图 3 能带结构

Fig.3 The energy band structure

根据图 3 可见,当一个波的频率落在 $[0, 7907] \text{ rad/s}$ 内时,梁振动中的转动惯量的影响还不明显,其状态向量必然由一个入射波本征向量、一个反射波本征向量以及两个禁带本征向量构成,此时计算的散射矩阵为一阶矩阵.而在其余频率区段内,状态向量必然全由两对通带本征向量构成,散射矩阵是二阶矩阵.现在选择 4 个不同频率,分别计算散射矩阵,计算结果列于表 1.通过表 1 可以看到,散射矩阵是对称矩阵.进一步还可以验证 $S_{ca}^H S_{ca} = I$, 散射矩阵是酉矩阵,这证明了第 4 节的结论,同时也表明入射波的功率流等于反射波的功率流,功率流守恒.

表 1 散射矩阵

Table 1 Scattering matrix

$\omega / (\text{rad/s})$	S_{ca}
0.1	$-0.086691 - 0.99624i$
0.5	$-0.007768 - 0.99997i$
15000	$\begin{bmatrix} -0.66998 - 0.35622i & -0.48159 - 0.43853i \\ -0.48159 - 0.43853i & 0.41724 + 0.63378i \end{bmatrix}$
25000	$\begin{bmatrix} -0.95316 - 0.0081656i & 0.094266 - 0.2873i \\ 0.094266 - 0.2873i & -0.77271 - 0.55811i \end{bmatrix}$

6 结 论

本文基于应用力学对偶理论,综合运用了辛 Gramme-Schmidt 正交化算法、辛本征解的独立性、辛两端边值问题精细积分法等特色理论,分析 Timoshenko 梁的能带结构,以及端部散射体对于波的散射,全部采用辛代数的方法,展示了其优越性.数值算例分析验证了本文的结论.此外,本文方法可以容易推广于其它周期结构的能带分析和波散射分析.

参考文献(References):

- [1] 徐志胜, 翟婉明, 王开云. 基于 Timoshenko 梁模型的车辆-轨道耦合振动分析[J]. 西南交通大学学报, 2003, **38**(1): 22-27.(XU Zhi-sheng, ZHAI Wan-ming, WANG Kai-yun. Analysis of vehicle-track coupling vibration based on Timoshenko beam model[J]. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2003, **38**(1): 22-27.(in Chinese))
- [2] 孙景江, 江近仁. 高层建筑抗震墙非线性分析的扩展铁木辛哥分层梁单元[J]. 地震工程与工程振动, 2001, **21**(2): 78-83.(SUN Jing-jiang, JIANG Jin-ren. Extended Timoshenko layered beam element for nonlinear analysis of RC high-rise buildings with structural walls[J]. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 2001, **21**(2): 78-83.(in Chinese))
- [3] 陈勇, 刘盼. 等截面铁摩辛柯梁-抗转阻尼器系统的复模态特性[J]. 振动与冲击, 2012, **31**(23): 174-179.(CHEN Yong, LIU Pan. Complex modal characteristic of a uniform Timoshenko beam with rotational dampers[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2012, **31**(23): 174-179.(in Chinese))
- [4] 杨小姜, 施伟辰. 基于欧拉-伯努利梁和铁木辛柯梁理论的功能梯度材料模量测定[J]. 计算机辅助工程, 2012, **21**(5): 25-29.(YANG Xiao-jiang, SHI Wei-chen. Modulus determination of functionally graded materials based on theories of Euler-Bernoulli beam and Timoshenko beam[J]. *Computer Aided Engineering*, 2012, **21**(5): 25-29.(in Chinese))
- [5] 赵莉, 陈伟球. 功能梯度材料铁木辛柯梁的波传播分析[C]//第二届全国压电和声波理论及器件技术研讨会. 杭州, 2006: 89-91.(ZHAO Li, CHEN Wei-qiu. The wave propagation in Timoshenko beam made of functionally graded materials[C]//*The Second Symposium on Piezoelectricity, Acoustic Waves, and Device Applications*. Hangzhou, 2006: 89-91.(in Chinese))
- [6] 管德清, 蒋欣. 基于小波分析的 Timoshenko 梁裂缝识别研究[J]. 振动与冲击, 2007, **26**(5): 67-70.(GUAN De-qing, JIANG Xin. Crack detect of Timoshenko beam based on the wave-let method[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2007, **26**(5): 67-70(in Chinese))
- [7] 侯涛, 张孝卫, 刘洪涛, 袁玉杰. 铁木辛柯弹性稳定理论在深水桩自由站立分析中的应用[J]. 中国海洋平台, 2010, **25**(2): 34-38.(HOU Tao, ZHANG Xiao-wei, LIU Hong-tao, YUAN Yu-jie. Pile stick up analysis with Timoshenko theory of elastic stability[J]. *China Offshore Platform*, 2010, **25**(2): 34-38.(in Chinese))
- [8] 金磊. 铁木辛柯梁的 Winkler 边界对偶求解辛方法[J]. 山西建筑, 2012, **38**(26): 56-57.(JIN Lei. Symplectic algorithm for Timoshenko beam with Winkler boundary[J]. *Shanxi Architecture*, 2012, **38**(26): 56-57.(in Chinese))
- [9] 楼梦麟, 任志刚. Timoshenko 简支梁的振动模态特性精确解[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2002, **30**(8): 911-915.(LOU Meng-lin, REN Zhi-gang. Precise solution to modal characteristics of Timoshenko pin-ended beams[J]. *Journal of Tongji University(Natural Science)*, 2002, **30**(8): 911-915.(in Chinese))
- [10] 金晶, 邢誉峰. 铁木辛柯梁固有振动频率的边界元解法[J]. 北京航空航天大学学报, 2012, **38**(7): 976-980.(JIN Jing, XIN Yu-feng. Boundary element solution method of free vibration of Timoshenko beam[J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2012, **38**(7): 976-980.(in Chinese))
- [11] 崔灿, 李映辉. 变截面铁木辛柯梁振动特性快速计算方法[J]. 动力学与控制学报, 2012, **10**(3): 258-262.(CUI Can, LI Yin-hui. A solution for vibration characteristic of Timoshenko beam with variable cross-section[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2012, **10**(3): 258-262.(in Chinese))

- [12] 陈镛, 万春风, 薛松涛, 唐和生. Timoshenko 梁运动方程的修正及其影响[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2005, **33**(6): 711-715. (CHEN Rong, WAN Chun-feng, XUE Song-tao, TANG He-sheng. Modification of motion equation of Timoshenko beam and its effect[J]. *Journal of Tongji University(Natural Science)*, 2005, **33**(6): 711-715. (in Chinese))
- [13] 邓军, 陈国平, 张方. 旋转铁木辛柯梁分布动态载荷的时域识别研究[J]. 机械科学与技术, 2011, **30**(6): 947-950, 956. (DENG Jun, CHEN Guo-ping, ZHANG Fang. Identification of distributed dynamic load on a rotating Timoshenko beam in time domain[J]. *Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering*, 2011, **30**(6): 947-950, 956. (in Chinese))
- [14] 王振, 孙秦. 几何非线性分析的二维共旋铁摩辛柯梁单元[J]. 机械科学与技术, 2013, **32**(5): 665-669. (WANG Zhen, SUN Qin. Geometrically nonlinear analysis of 2-D corotational Timoshenko beam element[J]. *Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering*, 2013, **32**(5): 665-669. (in Chinese))
- [15] 方剑宇, 韩小云, 蔡力, 郁殿龙. 考虑翘曲的周期铁摩辛柯梁的弯扭耦合振动带隙[J]. 振动与冲击, 2009, **28**(5): 146-149. (FANG Jian-yu, HAN Xiao-yun, CAI Li, YU Dian-long. Coupled flexural-torsional vibration band gap in periodic Timoshenko beam including warping effect [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2009, **28**(5): 146-149. (in Chinese))
- [16] 方剑宇, 韩小云. 轴向受载的周期铁摩辛柯梁的弯扭耦合振动带隙研究[C]//第二十一届全国振动与噪声高技术及应用学术会议. 合肥, 2008: 97-103. (FANG Jian-yu, HAN Xiao-yun. The coupled flexural-torsional vibration and band structure of the axially loaded periodic Timoshenko beam[C]//*The 21th National Conference on the High Technique and Application in Vibration and Noise*. Heifei, 2008: 97-103. (in Chinese))
- [17] 钟万勰. 应用力学的辛数学方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006. (ZHONG Wan-xie. *Symplectic Method in Applied Mechanics*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2006. (in Chinese))

Analyzing the Wave Scattering in Timoshenko Beam Based on the Symplectic Theory

WU Feng, XU Xiao-ming, GAO Qiang, ZHONG Wan-xie

(State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment,
Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology,
Dalian, Liaoning 116024, P.R. China)

(Contributed by ZHONG Wan-xie, M. AMM Editorial Board)

Abstract: Based on the symplectic theory in applied mechanics, some characteristic theories, such as the symplectic Gramme-Schmidt orthogonal algorithm, the independence between symplectic eigensolutions, precise integration method for the problem with two end boundary conditions, etc. were employed to analyze the energy band structure of Timoshenko beam and the wave scattering in the beam which was connected with a rigid scatterer.

Key words: Timoshenko beam; wave scattering; energy band; symplectic

Foundation item: The National Basic Research Program of China (973 Program)
(2009CB918501)