

有限长周期结构的密集特征值*

吴 锋, 高 强, 钟万勰

(大连理工大学 工程力学系; 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

(本刊编委钟万勰来稿)

摘要: 基于单胞结构的特征值问题,给出了有限长周期结构特征值分布范围的估计,基于固体物理中的能带理论,给出了一维有限长周期结构特征值分布范围的更精细估计.通过分析有限长周期结构特征值的分布范围,阐述了密集特征值出现的原因,分析结果表明,对于有限长周期结构,结构的单胞数目越大,其特征值分布会越密集,数值算例验证了该文的结论.

关键词: 周期结构; 密集特征值; 能带; 辛

中图分类号: O175.9; O327 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.11.001

引 言

在实际工程结构中,有许多结构具有周期或近似周期结构形式,比如高层建筑、路桥、大跨度空间结构^[1]、声子晶体^[2]、水轮发电机^[3]等.这些结构的特征值分布往往非常密集,导致计算困难.针对密集特征值问题,已有许多研究工作^[1, 3-13].文献[1]对密集模态跃迁特性进行了研究,并阐述了模态跃迁的机理.文献[8]对密集特征值的判断准则进行了研究,提出密集模态转角判别方法.文献[4, 9, 11-12]对密集特征值以及密集模态分析,提出矩阵摄动方法.文献[13]研究了参数小变化对于特征值的影响.其中文献[12]是一本关于矩阵特征值摄动理论的专著,也包含了关于密集特征值问题比较全面的综述,全面探讨了孤立特征值、重特征值和密集特征值的计算问题.纵览文献可以发现,有许多工作探讨如何分析计算密集特征值问题,对于密集特征值问题以及密集特征值模态分析的研究也曾取得非常大的成功.但是结构的密集特征值,究竟是什么原因产生的,却鲜有分析,而对这一问题的研究,显然十分有价值.

本文对有限长周期结构密集特征值现象进行了分析,给出了有限长周期结构特征值的分布估计.通过对有限长周期结构特征值分布的估计,很好地阐述了特征值分布密集的机理.本文的内容安排如下:第1节,针对一维单自由度有限长周期结构的特征值分布进行了估计;第2节,借助于固体物理^[14]中的能带结构理论以及 Rayleigh 商理论,阐述了一维周期结构的密集特征值分布情况;第3节给出两个算例,以验证本文分析的可靠性;第4节给出本文的结论.

* 收稿日期: 2013-07-31; 修订日期: 2013-09-07

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973计划)资助项目(2009CB918501)

作者简介: 吴锋(1985—),男,江苏靖江人,博士生(通讯作者. E-mail: wufeng_chn@163.com);

高强(1978—),男,内蒙古赤峰人,副教授,博士(E-mail: qgao@dlut.edu.cn);

钟万勰(1934—),男,浙江德清人,教授,院士(E-mail: zwoffice@dlut.edu.cn).

1 一维单自由度有限长周期结构

首先针对每站单自由度结构进行分析,考虑一个单自由度 N 段的周期结构,其两端条件为 $u_0 = 0$ 和 $u_N = 0$, 成为有限结构.该结构如图 1 所示.

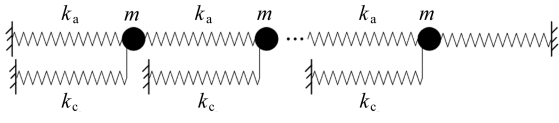


图 1 周期弹簧-质量模型

Fig.1 A periodic spring-mass model

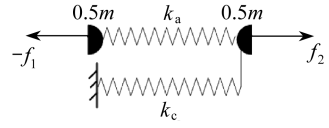


图 2 单胞模型

Fig.2 The unit cell model

因为每站只有一个自由度,转换到沿长度传递分析只能有一个辛特征值.如果整个结构的内部有位移自由度数 N ,则特征值数也是 N ,在 N 个特征值处可能发生共振.这些特征值究竟分布何处,应予以探讨.因为是单自由度,所以给定 ω^2 ,其中 ω 为结构振动频率,沿长度传递状态向量 \mathbf{v} 的传递辛矩阵 \mathbf{S} ,只有 $\mathbf{S}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ 的通带辛本征值一个 λ .本节将证明对于这个结构, N 个振动特征值 ω^2 全部在通带中,随着 N 的增大,通带范围有限,从而振动特征值分布变得比较密集.因为在辛本征值处于禁带时是不可能存在结构振动特征值 ω^2 的.

首先,分析其能带结构.图 2 所示为周期结构的单胞结构,在频域 ω^2 下,第 i 个单胞的运动方程为

$$\bar{\mathbf{K}}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (1)$$

其中

$$\bar{\mathbf{K}} = (\mathbf{K}_i - \omega^2\mathbf{M}_i), \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} -f_i \\ f_{i+1} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

上式中, u_i 和 u_{i+1} 为单胞结构两端的位移,把式(1)写成分块矩阵形式,即为

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{11} & \bar{\mathbf{K}}_{12} \\ \bar{\mathbf{K}}_{21} & \bar{\mathbf{K}}_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_i \\ f_{i+1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{i+1} = \begin{pmatrix} u_{i+1} \\ f_{i+1} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

上式可以转化为传递辛矩阵形式:

$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{S}\mathbf{v}_i, \quad (4)$$

$$\mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} u_i \\ f_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{K}}_{12}^{-1}\bar{\mathbf{K}}_{11} & -\bar{\mathbf{K}}_{12}^{-1} \\ \bar{\mathbf{K}}_{21} - \bar{\mathbf{K}}_{22}\bar{\mathbf{K}}_{12}^{-1}\bar{\mathbf{K}}_{11} & -\bar{\mathbf{K}}_{22}\bar{\mathbf{K}}_{12}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

其中, \mathbf{v}_i 是状态向量, \mathbf{S} 是传递辛矩阵^[15-17],通过辛矩阵传递,有

$$\mathbf{v}_N = \mathbf{S}^N\mathbf{v}_0. \quad (6)$$

对于这里所考虑的单胞,其刚度矩阵和质量矩阵可以分别写为

$$\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} k_a + k_c & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} 0.5m & 0 \\ 0 & 0.5m \end{bmatrix}. \quad (7)$$

因为通带特征值 ω^2 必然可以使 \mathbf{S} 的特征值的模为 1,不如设为 $e^{i\theta}$,当取 $\theta = \pi$ 时,辛本征值为 $\lambda = e^{i\pi} = -1$ 的情况.周期条件 $u_i = -u_{i+1}$, $f_i = -f_{i+1}$, 此时

$$-[(k_a + k_c - m\omega^2) + k_a]u_i = (-k_a - k_a)u_{i+1}. \quad (8)$$

由上式可得到通带的上界

$$\omega_{\text{upper}}^2 = (4k_a + k_c)/m. \quad (9)$$

当取 $\theta = -\pi$ 时, 辛本征值 $\lambda = 1$, 按周期条件有 $u_{i+1} = u_i, f_{i+1} = f_i$, 此时

$$-[(k_a + k_c - m\omega^2) - k_a]u_{i+1} = (-k_a + k_a)u_{i+1}. \quad (10)$$

由上式可得到通带的下界

$$\omega_{\text{lower}}^2 = k_c/m. \quad (11)$$

对于一维无限长的单自由度周期结构, 其通带在式(9)和(11)的上、下界特征值之间. 对于有限长的情况, 现在假设频率 $\omega^2 > \omega_{\text{upper}}^2$ 则超过了能带, 其辛特征值必定是 $\lambda_1 > 1$, 及其辛对偶 $\lambda_2 = \lambda_1^{-1} < 1$. 因振动特征值问题无外力, 沿长度的解在满足 $u_0 = 0$ 条件下必定是 $u_k = \sinh(\lambda_1 k)$, 此时已经无法满足在另一端 $u_N = 0$ 的边界条件, 矛盾, 所以不可能有整个结构的特征值. $\omega^2 < \omega_{\text{lower}}^2$ 证明同此. 因此, 整个结构的振动特征值全部在 $\omega_{\text{upper}}^2 \geq \omega^2 \geq \omega_{\text{lower}}^2$ 中, 结构的分段数目 N 是没有限制的. 因此, 当 N 比较大时就会出现密集特征值了.

2 一维多自由度有限长周期结构

上一节针对一个一维单自由度有限长周期结构, 利用能带结构进行分析, 证明所有特征值只能分布在通带内. 本节将介绍多自由度有限长周期结构的情况.

2.1 基于单胞结构的特征值分布

这里首先给出一个基于单胞结构的振动特征值分布估计, 以图3所示结构为例. 假设整个结构由图4所示单胞, 共 N 段组成, 整个结构的特征值问题为

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{x}, \quad (12)$$

其中 \mathbf{K} 和 \mathbf{M} 分别为结构的组集刚度矩阵和质量矩阵, \mathbf{x} 和 ω^2 分别为结构的特征向量和特征值.

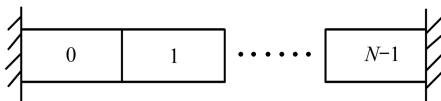


图3 有限长周期结构

Fig.3 A periodic structure with finite unit cells

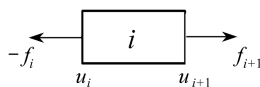


图4 第 i 个单胞

Fig.4 The i -th unit cell

本小节将证明: 对于有限长周期结构, 其特征值的分布范围不超过单胞结构的特征值分布范围.

根据文献[18], 特征值可以通过变分原理求解

$$\delta[\mathbf{x}^T(\omega^2 \mathbf{M} - \mathbf{K})\mathbf{x}] = 0, \quad (13)$$

其中, 变分只对位移 \mathbf{x} 取. 特征值应使上式方括号内为0, 故

$$\omega^2 = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}} = \frac{U}{T} \quad (14)$$

称为 Rayleigh 商, 物理意义上讲就是势能 $U = \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}/2$ 与动能 $T = \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}/2$ 的比值. 变分式(13)也可写成 Rayleigh 商的极值

$$\delta \left[\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}} \right] = 0. \quad (15)$$

最小振动特征值 ω_{min}^2 和最大振动特征值 ω_{max}^2 分别为

$$\omega_{\text{min}}^2 = \min \left(\frac{U}{T} \right), \quad \omega_{\text{max}}^2 = \max \left(\frac{U}{T} \right). \quad (16)$$

现在分析 Rayleigh 商, 其中 U 是整体结构的势能, 等同于各个单胞结构的势能之和. 同理,

整体结构的动能 T 也可以表示成各个单胞结构的动能之和,故 Rayleigh 商可表示为

$$\frac{U}{T} = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}} = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} U_i}{\sum_{i=0}^{N-1} T_i}, \quad (17)$$

其中 U_i 和 T_i 分别是第 i 个单胞结构的势能和动能.从物理意义上讲: U_i 代表了第 i 个单胞结构对整个周期结构总势能 U 的贡献,而 T_i 代表了第 i 个单胞结构对整个周期结构总动能 T 的贡献.显然有 $U_i, U_j \geq 0, T_i, T_j > 0$, 假设 $U_i/T_i \leq U_j/T_j$ 时,有 $U_i/T_i \leq (U_i + U_j)/(T_i + T_j) \leq U_j/T_j$, 因此可以给出 Rayleigh 商的一个范围的估计:

$$\min\left(\frac{U_i}{T_i}\right) \leq \frac{U}{T} \leq \max\left(\frac{U_i}{T_i}\right). \quad (18)$$

结合式(18)和式(16)可得

$$\min\left(\frac{U_i}{T_i}\right) \leq \omega^2 \leq \max\left(\frac{U_i}{T_i}\right). \quad (19)$$

实际上, $\min(U_i/T_i)$ 和 $\max(U_i/T_i)$ 是第 i 个单胞结构的最小振动特征值和最大振动特征值,这就证明了本小节的结论.一个有限长周期结构的单胞结构的特征值是确定的,这就意味着无论一个有限长周期结构的单胞数目 N 取多大,其作为一个整体结构的振动特征值都只能处在单胞结构的最小振动特征值和最大振动特征值之间,而结构的单胞数目 N 是没有限制的.因此当 N 比较大时,特征值的个数越来越多,就会出现密集特征值了.

对于近似周期结构,这里的结论仍然适用,所不同的是对于近似周期结构,各单胞的特征值将不再完全相同,但是其整体特征值仍然处在所有单胞的最小特征值和最大特征值之间,因此如果单胞数目 N 比较大时,仍然会出现密集特征值.这就解释了许多周期或近似周期结构如高层建筑、路桥、大跨度屋盖、声子晶体等结构中密集特征值出现的原因.从本小节的分析过程可以看出,本小节的结论不仅适用于一维周期结构,也适用于二维和三维周期结构.

本小节仅给出关于特征值分布的一个粗略估计,表明有限长周期结构特征值只能分布在有限区域内,是有上下界的.但是对于一维多自由度周期结构,还可以利用能带结构理论进行更为精细地分析.

2.2 两端固定

上小节中对于有限长周期结构特征值分布的估计,可以解释有限长周期结构特征值密集分布的原因.结合上一小节的结论,本小节针对一维有限长周期结构特征值分布问题,利用固体物理中的能带理论给出更为精细的估计.

对于一个多自由度周期结构,其状态向量的传递形式仍然如式(6)所示^[17],其中 \mathbf{S} 的特征值分析十分重要.

$$\mathbf{S}\Phi = \Phi\Lambda, \quad (20)$$

式中 Φ 为 \mathbf{S} 的特征向量矩阵, Λ 为其特征值构成的对角矩阵.把式(20)代入式(6),显然有

$$\mathbf{v}_N = \Phi\Lambda^N\Phi^{-1}\mathbf{v}_0. \quad (21)$$

因为矩阵 \mathbf{S} 是辛矩阵,对于某一个频率 ω , \mathbf{S} 的特征值总是成对出现,分别表征向左和向右的波,并记为 Λ_1 和 Λ_2 (且有 $|\Lambda_1| \leq 1, |\Lambda_2| \geq 1$),相应的特征向量分别记为 Φ_1 和 Φ_2 .且有

$$\Lambda_1\Lambda_2 = \mathbf{I}, \quad (22)$$

上式中, \mathbf{I} 是单位矩阵.利用展开定理,可令

$$\mathbf{v}_n = \Phi \mathbf{b}_n, \quad (23)$$

其中

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{n,1} \\ \mathbf{b}_{n,2} \end{pmatrix}, \quad \Phi = (\Phi_1 \quad \Phi_2). \quad (24)$$

把式(23)代入式(21)则有

$$\mathbf{b}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{b}_0, \quad (25)$$

\mathbf{b}_n 是待定系数. 假设单胞一个边界上的位移为 n_b 个, 则上式中, \mathbf{v}_N 和 \mathbf{v}_0 中有 $4n_b$ 个未知量, 因此还需要边界条件. 首先分析两端固定的情况, 此时:

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_N = \mathbf{0}. \quad (26)$$

根据式(22)~(25)和(26)得

$$\begin{cases} \Phi_{11} \mathbf{b}_{0,1} + \Phi_{12} \mathbf{b}_{0,2} = \mathbf{0}, \\ \Phi_{11} \mathbf{A}_1^N \mathbf{b}_{0,1} + \Phi_{12} \mathbf{A}_2^N \mathbf{b}_{0,2} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (27)$$

根据式(27), 并利用矩阵范数理论可得

$$\begin{cases} \|\mathbf{b}_{0,1}\|_2 \leq \|\Phi_{11}^{-1} \Phi_{12}\|_2 \|\mathbf{b}_{0,2}\|_2, \\ \|\mathbf{b}_{0,2}\|_2 \leq \|\mathbf{A}_1\|_2^{2N} \|\Phi_{12}^{-1} \Phi_{11}\|_2 \|\mathbf{b}_{0,1}\|_2. \end{cases} \quad (28)$$

把式(28)中的两个不等式合并:

$$\begin{cases} \|\mathbf{b}_{0,2}\|_2 \leq \|\mathbf{A}_1\|_2^{2N} C \|\mathbf{b}_{0,2}\|_2, \\ C = \|\Phi_{12}^{-1} \Phi_{11}\|_2 \|\Phi_{11}^{-1} \Phi_{12}\|_2. \end{cases} \quad (29)$$

一般来说, 有限长周期结构的振动模态分为扩展态和局部态. 扩展态的特征值分布在通带里面, 而局部态的特征值分布在禁带内. 如果频率落在禁带内, 则必然有 $|\mathbf{A}_1| < 1$, $|\mathbf{A}_2| > 1$. 也即: $\|\mathbf{A}_1\|_2^{2N} < 1$. 如果 C 为有限值, 则必然存在一个 N 使得 $\|\mathbf{A}_1\|_2^{2N} C < 1$, 此时要使不等式(29)成立, 只有 $\|\mathbf{b}_{0,2}\|_2 = 0$, 即表明 $\mathbf{b}_{0,2}$ 与 $\mathbf{b}_{0,1}$ 皆为零向量. 因此当 N 很大时, $\|\mathbf{A}_1\|_2^{2N}$ 很小, 要使 $\mathbf{b}_{0,2}$ 与 $\mathbf{b}_{0,1}$ 非 $\mathbf{0}$, 则只有 $\|\mathbf{A}_1\|_2^{2N} C \geq 1$, 也就要求 C 很大, 此时要求 Φ_{12} 或者 Φ_{11} 接近奇异. 而当 Φ_{12} 或者 Φ_{11} 奇异时, 此时 C 是无限值, 从而使 $\mathbf{b}_{0,1}$ 和 $\mathbf{b}_{0,2}$ 有值, 此时即要求行列式 $|\Phi_{11}| = 0$, $|\Phi_{12}| = 0$, 注意到 Φ_{11} 和 Φ_{12} 是频率 ω 的函数, 其零点附近分布了所有的局部态特征值. 当 N 足够大时, 要使 $\|\mathbf{A}_1\|_2^{2N} C \geq 1$, Φ_{12} 或者 Φ_{11} 需要接近奇异, 这意味着, 局部态的特征值十分接近 $|\Phi_{11}| = 0$, $|\Phi_{12}| = 0$ 的零点, 或者就是其零点. 如果局部态特征值很多, 也只能落在其零点附近, 因此分布也必然很稠密.

综上所述, 对于一个两边固定有限长的周期结构来说, 如果该结构的单胞数目 N 足够大, 当频率落在禁带内时, 仅局部态有特征值和本征向量. 如果局部态的特征值很多时, 其分布是稠密的. 如果局部态数目有限时, 大多数特征值只有落在通带内, 当 N 增大时, 通带范围有限, 从而导致出现密集特征值的现象.

2.3 一端固定, 一端自由

当考虑一端固定, 一端自由的情况时, 即有边界条件:

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{f}_N = \mathbf{0}. \quad (30)$$

此时, 根据式(22)~(25)和(30)得

$$\begin{cases} \Phi_{11} \mathbf{b}_{0,1} + \Phi_{12} \mathbf{b}_{0,2} = \mathbf{0}, \\ \Phi_{21} \mathbf{A}_1^N \mathbf{b}_{0,1} + \Phi_{22} \mathbf{A}_2^N \mathbf{b}_{0,2} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (31)$$

类似地, 根据式(31)和矩阵范数理论可得

$$\|b_{0,2}\|_2 \leq \|A_1\|_2^{2N} C \|b_{0,2}\|_2, \quad C = \|\Phi_{22}^{-1}\Phi_{21}\|_2 \|\Phi_{11}^{-1}\Phi_{12}\|_2. \quad (32)$$

根据不等式(32)同样可见,当频率落在禁带内,则必然有 $|A_1| < 1$, $|A_2| > 1$,也即 $\|A_1\|_2^{2N} < 1$,如果 C 为有限值,必然存在一个 N 使得 $\|A_1\|_2^{2N} C < 1$,此时要使不等式(32)成立,只有 $\|b_{0,2}\|_2 = 0$,即表明 $b_{0,2}$ 与 $b_{0,1}$ 皆为零向量.要使频率落在禁带内,存在局部态,仅当 $\|A_1\|_2^{2N} C > 1$,如果 N 较大时, $\|A_1\|_2^{2N} \ll 1$,因此 C 必须很大,这就要求 Φ_{22} 或者 Φ_{11} 接近奇异.而当 Φ_{22} 或者 Φ_{11} 奇异时,行列式 $|\Phi_{11}| = 0$, $|\Phi_{22}| = 0$,此时 C 无穷.注意到 Φ_{11} 和 Φ_{22} 是频率 ω 的函数,因此局部态特征值必然十分接近行列式 $|\Phi_{11}| = 0$, $|\Phi_{22}| = 0$ 的零点,或者就是其零点.这表明局部态特征值由 $|\Phi_{11}| = 0$, $|\Phi_{22}| = 0$ 的零点决定,如果局部态特征值很多,也只能分布在其零点附近,因此分布必然很稠密.如果局部态特征值的数目有限,则大多数特征值只有落在通带内,当 N 增大时,通带范围有限,从而导致出现密集特征值的现象.

2.4 一般情况

当考虑一般情况的边界条件时,可以假设边界条件为

$$Av_0 = 0, \quad Bv_N = 0, \quad (33)$$

上式中, A 和 B 取不同值,对应不同情况,比如当令

$$A = B = (I \quad 0) \quad (34)$$

时,有

$$Av_0 = u_0, \quad Bv_N = u_N. \quad (35)$$

对于一般情况,根据式(22)~(25)和(33)得

$$\begin{cases} A\Phi_1 b_{0,1} + A\Phi_2 b_{0,2} = 0, \\ B\Phi_1 A_1^N b_{0,1} + B\Phi_2 A_2^N b_{0,2} = 0. \end{cases} \quad (36)$$

类似地,利用矩阵范数理论可得

$$\|b_{0,2}\|_2 \leq \|A_1\|_2^{2N} C \|b_{0,2}\|_2, \quad C = \|(B\Phi_2)^{-1}B\Phi_1\|_2 \|(A\Phi_1)^{-1}A\Phi_2\|_2. \quad (37)$$

如果 C 为有限值,同时频率落在禁带内,则必然有 $|A_1| < 1$, $|A_2| > 1$.也即 $\|A_1\|_2^{2N} < 1$,因为 C 为有限值,必然存在一个 N 使得 $\|A_1\|_2^{2N} C < 1$,此时只有 $\|b_{0,2}\|_2 = 0$, $b_{0,2}$ 与 $b_{0,1}$ 皆为零向量.因此局部态特征值存在的必要条件是 $\|A_1\|_2^{2N} C > 1$,当 N 很大时, $\|A_1\|_2^{2N} \ll 1$,因此 C 必须很大,这就要求 $B\Phi_2$ 或者 $A\Phi_1$ 接近奇异.而当 $B\Phi_2$ 或者 $A\Phi_1$ 奇异时,行列式 $|A\Phi_1| = 0$, $|B\Phi_2| = 0$,此时 C 无穷.注意到 $A\Phi_1$ 和 $B\Phi_2$ 是频率 ω 的函数,因此局部态特征值必然十分接近式 $|A\Phi_1| = 0$, $|B\Phi_2| = 0$ 的零点,或者就是其零点.这表明局部态的数目仅由行列式 $|A\Phi_1| = 0$, $|B\Phi_2| = 0$ 的零点决定,如果局部态特征值很多,也只能分布在其零点附近,因此分布也必然很稠密.

综上所述,当该结构的单胞数目 N 足够大,频率落在禁带内时,仅有局部态有特征值和特征向量.如果局部态的特征值很多时,其分布必然稠密.如果局部态特征值的数目有限,则大多数特征值只有落在通带内.当 N 增大时,由于通带范围有限,从而导致出现密集特征值的现象.

3 数值试验

算例 1 分析图 1 所示有限长周期排列的弹簧-质量模型,该模型的刚度矩阵和质量矩阵分别为

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k_a + k_c & -k_a & 0 & 0 \\ -k_a & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -k_a \\ 0 & 0 & -k_a & 2k_a + k_c \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \text{diag}(m \quad m \quad \cdots \quad m). \quad (38)$$

对于这里所考虑的单元,其刚度矩阵和质量矩阵可以分别写为

$$\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} k_a + k_c & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix}, \mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} 0.5m & 0 \\ 0 & 0.5m \end{bmatrix} \quad (39)$$

以及左边端部 $\mathbf{K}_0 = k_a, \mathbf{M}_0 = 0.5m$ 和右边端部 $\mathbf{K}_N = k_a + k_c, \mathbf{M}_N = 0.5m$. 现在令 $k_a = 2, k_c = 1, m = 1$, 则单元的最小和最大特征值分别为: 0.877 和 9.123, 单元数目 N 分别取为 10、100 和 1 000, 计算该周期结构的特征值的最大值和最小值, 计算结果分别列于表 1.

表 1 特征值的上下界

Table 1 The upper and lower bounds of eigenvalues

	lower bound	upper bound
energy band structure	1.000 000 000 0	9.000 000 000 0
unit cell structure	0.876 894 374 4	9.123 105 625 6
$N = 10$	1.162 028 105 5	8.837 971 894 5
$N = 100$	1.001 934 870 8	8.998 065 129 2
$N = 1\ 000$	1.000 019 699 8	8.999 980 300 2

在表 1 中,第 2 行给出通带结构的最小和最大特征值,第 3 行给出单元结构的最小特征值和最大特征值,而第 4~6 行分别给出 $N = 10, 100$ 和 1 000 时的有限长周期的最大和最小特征值. 通过表 1 可以发现,当 N 选取不同值时,结构特征值的分布均落在单元结构的最小和最大特征值之间,也都落在通带特征值内;同时还可以发现,通过能带分析而得到的估计要比对于单元结构分析给出的估计更为精确.当 N 变大时,特征值的下界和上界逐渐逼近通带内的最小和最大特征值.在特征值分布范围不变的情况下,随着 N 的增大,特征值的个数越来越多,分布越来越密集.实际计算发现,当 $N = 1\ 000$ 时,相邻特征值之间最小差值仅为 5.91×10^{-5} ,而当 $N = 10$ 时,相邻特征值之间最小差值则为 0.473.数值算例同时验证了本文分析结论的正确性.

算例 2 一个一维长周期结构如图 5 所示,图 6 给出其单元结构,其中各杆的面积相同,1~3 号杆的刚度均为 $E_1 A = 2$,长度均为 $l_1 = 1$,而 4~5 号杆的刚度为 $E_2 A = 10$,长度为 $l_2 = \sqrt{2}$.所有球的质量均为 $m = 2$.为验证本文结论,取 $N = 20$ 和 200,左端固定,右端边界条件分固定和自由两种情况,分别分析其单元结构、能带结构以及基于整体结构的特征值.计算表明单元结构的最小和最大特征值分别为:0 和 173.259,而该周期结构的通带特征值区间共有 3 段: $[0, 40], [70.710\ 7, 82.357\ 8]$ 和 $[88.448\ 0, 110.710\ 7]$,其余区间为禁带.而整体结构的特征值分布如图 7、8 所示,其中圆圈标记的是落在禁带内的特征值.

由图 7、8 知,所有情况的特征值均落在单元结构的最小和最大特征值分别为:0 和 173.259 之间.当 N 较大时,特征值分布开始较密集,而对于所有的情况,其扩展态的特征值均分布于通带内.对于两种边界条件,其局部态特征值数目均与单元数目 N 无关.当右端固定时,无论 N 取何值,都有两对重特征值处于禁带内,为局部态,分别为 49.299 3 和 55.355 3.这是因为两端固定时为对称结构,所有振动也是对称的,出现重特征值.当右端自由时,无论 N 取何值,都有 3 个局部态的特征值,分别为 49.299 3、55.355 3 和 129.489 8.仔细分析可见,特征值 49.299 3 和 55.355 3 恰好使得 Φ_{11} 奇异,而 129.489 8 使得 Φ_{22} 奇异.根据 2.1 和 2.2 小节的分

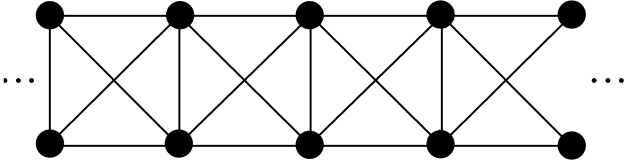


图 5 周期桁架结构
Fig.5 A periodic truss

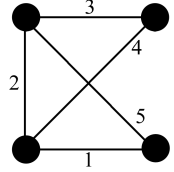


图 6 桁架结构的单胞
Fig.6 A unit cell of the truss

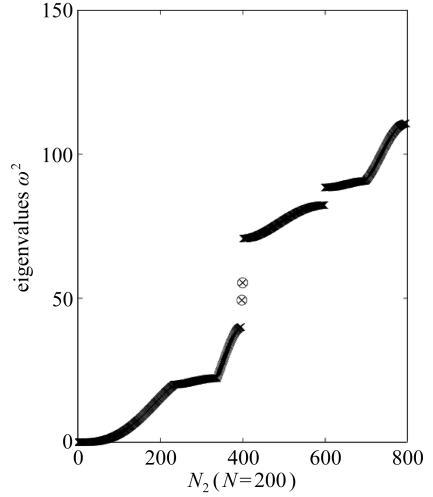
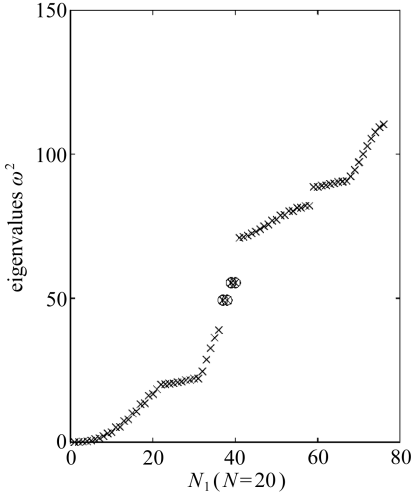


图 7 两端固定

Fig.7 Eigenvalues of the truss with the both ends fixed

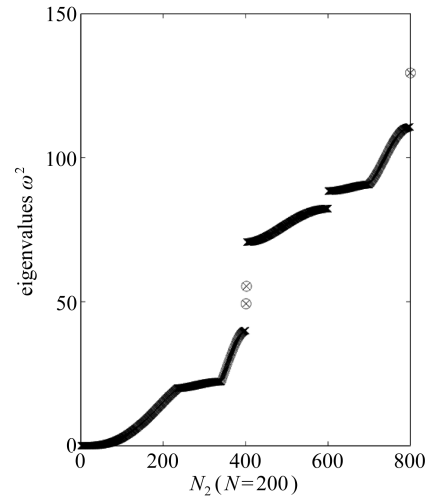
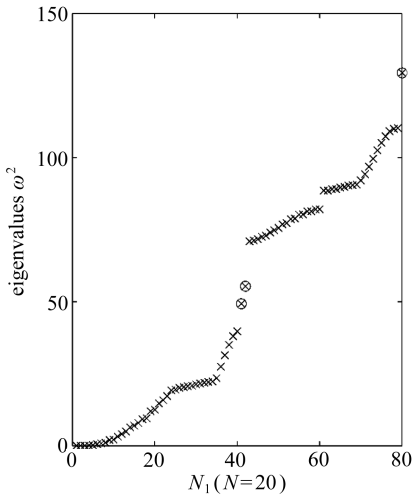
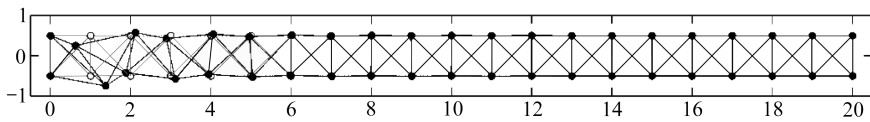


图 8 左端固定,右端自由

Fig.8 Eigenvalues of the truss with the left end fixed and the right free

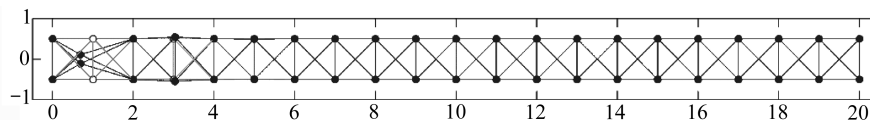
析表明,当 N 足够大时,对于两端固定问题,局部态的特征值由 $|\Phi_{11}| = 0$ 决定,而对于左端固定,右端自由问题,局部态的特征值由 $|\Phi_{11}| = 0$ 和 $|\Phi_{22}| = 0$ 共同决定,无论边界条件如何选择,扩展态的特征值均落在通带内.这些结论在本算例中均得到验证.图 9 绘制了右端自由时 3

个禁带特征值所对应的振动模式.由图 9 可见,3 个局部振动模式中,两个是在左端部附近振动,一个是在右端部附近振动,这 3 个局部态都是由边界条件引起的.对于两端固定时,左端部的局部态与右端部的局部振动模式对称,并且其左端局部振动模式与右端自由工况中的左端局部振动模式相同,因此这里不再画出.由于特征值大多落在通带内(除有限个局部态特征值之外),而通带范围有限,这导致特征值分布密集.同时所有的特征值均落在单胞结构的最小和最大特征值之间,因此当 N 增加时,特征值分布也变密.



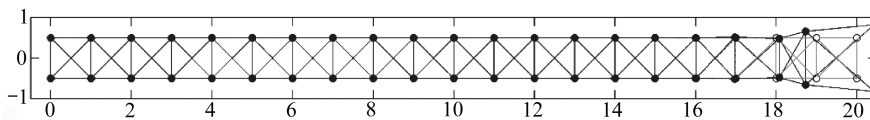
(a) 局部振动模式特征值 $\omega^2 = 49.299\ 3$

(a) The eigenvalue ($\omega^2 = 49.299\ 3$) corresponding to the localized vibratory mode



(b) 局部振动模式特征值 $\omega^2 = 55.355\ 3$

(b) The eigenvalue ($\omega^2 = 55.355\ 3$) corresponding to the localized vibratory mode



(c) 局部振动模式特征值 $\omega^2 = 129.489\ 8$

(c) The eigenvalue ($\omega^2 = 129.489\ 8$) corresponding to the localized vibratory mode

图 9 局部振动模式

Fig.9 The local modes of vibration

4 结 论

本文对有限长周期结构密集特征值现象进行了分析,通过能带结构和单胞结构的特征值两种手段,给出了有限长周期结构特征值的分布估计.其中,基于能带结构的估计结果要比基于单胞结构的特征值范围估计结果更加精细.通过分析表明,有限长周期结构的特征值分布会随着结构单胞数目的增加而变得密集.对于有限长近似周期结构,其特征值分布也会随着结构单胞数的增加而变得密集,其特征值均落在单胞结构的最小和最大特征值之间.对于一维有限长周期结构,当单胞数目 N 足够大时,其局部态特征值或者数目有限,或者分布稠密.当 N 增大时,通带范围有限,扩展态特征值都落在通带范围内,从而亦导致出现密集特征值的现象.最后,通过两个数值算例验证了本文的结论.本文只是给出了密集特征值出现的一条思路,供大家探讨.

参考文献(References):

- [1] 于岩磊,高维成,刘伟,王兆敏,孙毅.密集模态结构模态跃迁分析的简化摄动法[J].工程力学,2012,29(3):33-40.(YU Yan-lei,GAO Wei-cheng,LIU Wei,WANG Zhao-ming,SUN Yi.Simplified perturbation method for analyzing the mode jumping of close mode structure[J].

- Engineering Mechanics*, 2012, **29**(3): 33-40. (in Chinese))
- [2] Kushwaha M S, Halevi P, Dobrzynski L, Djafari-Rouhani B. Acoustic band structure of periodic elastic composites[J]. *Physical Review Letters*, 1993, **71**(13): 2022-2025.
- [3] 刘玉民, 张帆, 吴蕙. 水轮发电机组结构密集特征值求解新方法[J]. 机械强度, 1996, **18**(4): 9-11. (LIU Yu-min, ZHANG Fan, WU Hui. A new method for solving the concentrated eigenvalues of the water trubogenerator [J]. *Journal of Mechanical Strength*, 1996, **18**(4): 9-11. (in Chinese))
- [4] 徐涛, 陈塑寰, 赵建华. 接近亏损系统的矩阵摄动法[J]. 力学学报, 1998, **30**(4): 120-124. (XU Tao, CHEN Su-huan, ZHAO Jian-hua. Perturbation method of near defective systems[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1998, **30**(4): 120-124. (in Chinese))
- [5] 刘中生, 陈塑寰, 王家林, 赵又群. 密集模态摄动的新方法[J]. 固体力学学报, 1993, **14**(1): 1-6. (LIU Zhong-sheng, CHEN Su-huan, WANG Jia-lin, ZHAO You-qun. A new matrix perturbation method for closely spaced eigenvalues of vibration[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 1993, **14**(1): 1-6. (in Chinese))
- [6] 刘璐. 密集型固有振模电力系统模态不稳定现象的研究[D]. 硕士学位论文. 保定: 华北电力大学, 2009. (LIU Lu. Research on the phenomenon of modes instability in close modes power system[D]. Master Thesis. Baoding: North China Electric Power University, 2009. (in Chinese))
- [7] 周树荃, 戴华. 求解大型对称特征值问题的块 Chebyshev-Lanczos 方法[J]. 南京航空航天大学学报, 1989, **21**(4): 22-28. (ZHOU Shu-quan, DAI Hua. The block Chebyshev-Lanczos method for solving large symmetric eigenvalue problems[J]. *Journal of Nanjing Aeronautical Institute*, 1989, **21**(4): 22-28. (in Chinese))
- [8] 赵又群, 刘中生, 陈塑寰. 密集模态的判断准则[J]. 吉林工业大学学报, 1996, **26**(3): 79-82. (ZHAO You-qun, LIU Zhong-sheng, CHEN Su-huan. Judging criterion of closely spaced modes[J]. *Journal of Jilin University of Technology*, 1996, **26**(3): 79-82. (in Chinese))
- [9] 刘中生, 陈塑寰. 频率集聚时模态分析的移位摄动法[J]. 宇航学报, 1993(1): 81-88. (LIU Zhong-sheng, CHEN Su-huan. Perturbation analyses of vibration modes with close eigenvalues by eigenvalue shift[J]. *Journal of Astronautics*, 1993(1): 81-88. (in Chinese))
- [10] 吕振华. 重特征值及其特征向量摄动重分析方法探讨[J]. 振动工程学报, 1993, **6**(4): 327-335. (LÜ Zhen-hua. An investigation into the perturbational reanalysis method of repeated eigenvalues and associated eigenvectors[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 1993, **6**(4): 327-335. (in Chinese))
- [11] 陈塑寰, 徐涛, 韩万芝. 线性振动亏损系统的矩阵摄动理论[J]. 力学学报, 1992, **24**(6): 747-754. (CHEN Su-huan, XU Tao, HAN Wan-zhi. Matrix perturbation for linear vibration deffective systems[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1992, **24**(6): 747-754. (in Chinese))
- [12] 陈塑寰. 结构振动分析的矩阵摄动理论[M]. 重庆出版社, 1991. (CHEN Su-huan. *The Matrix Perturbation Theory for the Analysis of Structural Vibration* [M]. Chongqing Publishing House, 1991. (in Chinese))
- [13] 胡海昌. 参数小变化对本征值的影响[J]. 力学与实践, 1981, **3**(2): 29-31. (HU Hai-chang. The influence of parameters of small changes to this eigenvalue[J]. *Mechanics in Engineering*, 1981, **3**(2): 29-31. (in Chinese))
- [14] 黄昆. 固体物理学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998. (HUANG Kun. *Solid State Physics* [M]. Beijing: Higher Education Press, 1998. (in Chinese))
- [15] Zhong W X, Williams F W. On the localization of the vibration mode of a sub-structural chain-

- type structure[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 1991, **205**(4): 281-288.
- [16] Zhong W X, Williams F W. Wave problems for repetitive structures and symplectic mathematics[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 1992, **206**(6): 371-379.
- [17] 高强, 张腾, 钟万勰. 一维离散结构能带结构与表面态的辛分析方法[J]. 固体力学学报, 2011, **32**(4): 372-381.(GAO Qiang, ZHANG Teng, ZHONG Wan-xie. Symplectic method for energy bands and surface states of 1D periodic structure with defects[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2011, **32**(4): 372-381.(in Chinese))
- [18] 钟万勰. 应用力学的辛数学方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2005.(ZHONG Wan-xie. *Symplectic Solution Methodology in Applied Mechanics*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2005.(in Chinese))

Close Eigenvalues of Periodic Structures With Finite Unit Cells

WU Feng, GAO Qiang, ZHONG Wan-xie

(State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment;
Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology,
Dalian, Liaoning 116024, P.R.China)

(Contributed by ZHONG Wan-xie, M. AMM Editorial Board)

Abstract: For a periodic structure with finite unit cells, the range where eigenvalues existed was estimated based on the eigenproblem of the unit cell. A more precise estimate of the eigenvalue distribution range for a one dimensional periodic structure with finite unit cells was presented based on the energy band theory in solid physics. In terms of the estimated range of eigenvalues, the close eigenvalue phenomenon was made clear. The analysis results show that, for a periodic structure with finite unit cells, the larger the number of the unit cells is, the closer the eigenvalues are. Numerical tests demonstrate the correctness of the proposed conclusions.

Key words: periodic structure; close eigenvalue; energy band; symplectic

Foundation item: The National Basic Research Program of China (973 Program)
(2009CB918501)