

Landweber 迭代正则化方法在 动态载荷识别中的应用*

常晓通, 闫云聚, 刘 鎏

(西北工业大学 力学与土木建筑学院,西安 710129)

摘要: 在载荷识别过程中,由于结构矩阵的病态特性以及测量噪声的影响,常规最小二乘法往往失效,这就是反问题的不适定问题。Landweber 迭代正则化方法可以用来解决载荷识别的不适定问题。线性系统的响应可以表示为载荷与单位脉冲响应函数的卷积积分,将其在时域内离散后可得到结构振动响应的正问题模型。应用该方法,在一个桥梁模型上进行了仿真试验,仿真结果说明提出的识别方法是有效的,可以得到满足工程要求的稳定近似解。

关键词: 不适定性; 载荷识别; Landweber 正则化

中图分类号: TB123; O32 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.09.008

引 言

对导弹、飞行器、海洋平台等大型结构,其所受外载荷很难直接测量,但它们使用时所受的载荷情况又是结构设计所必须了解的。很多情况下,只能根据实测系统的动力响应和已知的系统动态特性来识别结构所受的动态载荷。因此,对于直接测量动载荷比较困难的问题,载荷识别可以作为一种间接获取载荷的途径。

目前,载荷识别的方法主要有频域法和时域法两大类^[1]。其中频域法提出较早,其基本思想是由响应谱识别激励谱,主要利用激励和响应之间频响函数求逆实现,但是矩阵求逆时,经常遇到系数矩阵的病态问题和奇异值分解问题^[2];时域法是从系统动力学方程出发,根据载荷和响应之间的复杂卷积关系的反分析,直接确定动态力的时间历程^[3-4],在工程中有很好的应用前景。早在 1980 年就有学者发现载荷识别的病态问题^[5-6],一些早期的研究使用滤波的方法来减小解的误差^[7-8]。奇异值分解方法也用来解决载荷识别的不适定问题。Jacquelin 等将正则化技术引入到载荷识别解卷积过程中,讨论了正则参数的选取对载荷识别结果的影响^[9]。

Landweber 迭代法是求解线性反问题的一类重要的方法,尤其是对于求解大规模问题是十分有利的。它由 Landweber^[10]和 Fridman^[11]分别独立提出和研究的。本文在时域内对结构动态载荷识别问题进行了深入研究,将动力学正问题表示为单位脉冲响应函数和动载荷的卷积积分,并在时域将该卷积离散;提出了基于 Landweber 正则化的载荷识别方法;最后,将该方法应

* 收稿日期: 2013-06-26; 修订日期: 2013-07-01

基金项目: 2012 年度高等学校博士学科点专项科研基金(优先发展领域)资助项目
(20126102130004)

作者简介: 常晓通(1985—),男,山西屯留人,博士生(通讯作者。E-mail:xtchang@163.com)。

用于动态载荷识别的数值模拟,数值仿真的结果验证了本文提出方法的正确性和稳定性。

1 用 Green 函数建立正问题模型

具有 n 个自由度的比例阻尼系统动力学方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{y}(t) = \mathbf{S}(t), \quad (1)$$

其中, $\mathbf{M} \in R^{n \times n}$, $\mathbf{C} \in R^{n \times n}$, $\mathbf{K} \in R^{n \times n}$ 分别为总体质量矩阵、比例阻尼矩阵和刚度矩阵, $\mathbf{S}(t) \in R^{n \times 1}$ 为外载荷列向量, $\mathbf{y}(t) \in R^{n \times 1}$, $\dot{\mathbf{y}}(t) \in R^{n \times 1}$, $\ddot{\mathbf{y}}(t) \in R^{n \times 1}$ 分别为位移、速度、加速度响应向量。

由质量矩阵和刚度矩阵可以求得结构的固有频率 ω_i 和模态向量 $\boldsymbol{\phi}_i$, 通过模态坐标变换, 可将系统的运动方程分解为 n 个非耦合运动方程, 位移响应为 n 个非耦合运动方程解的线性组合. n 个自由度的结构具有 n 个固有振型, 可构成 n 个独立的位移模式, 结构任意位移可表示为这 n 个独立位移模式的线性组合

$$\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\phi}_1 q_1(t) + \boldsymbol{\phi}_2 q_2(t) + \cdots + \boldsymbol{\phi}_n q_n(t) = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\phi}_i q_i(t), \quad (2)$$

式中, $\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, \cdots, \boldsymbol{\phi}_n]$ 为振型矩阵, $\mathbf{Q} = [q_1, q_2, \cdots, q_n]^T$ 为振型坐标或广义坐标下的位移向量。

将式(2)代入式(1), 可得

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}\ddot{\mathbf{Q}} + \mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}\dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\Phi}\mathbf{Q} = \mathbf{S}(t). \quad (3)$$

用 $\boldsymbol{\phi}_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 左乘式(3)两边各项, 并考虑正交条件:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_j = 0, & (i \neq j), \\ \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_j = 0, & (i \neq j), \end{cases} \quad (4)$$

可得到 n 个解耦的二阶线性方程:

$$M_i \ddot{q}_i + C_i \dot{q}_i + K_i q_i = F_i(t), \quad (5)$$

或写成

$$\ddot{y}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = \frac{F_i(t)}{M_i}, \quad (6)$$

式中

$$\begin{cases} M_i = \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_i, \\ K_i = \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_i = \omega_i^2 M_i, \\ C_i = \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{C} \boldsymbol{\phi}_i = 2\xi_i \omega_i M_i, \\ F_i(t) = \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{S}(t), \end{cases} \quad (7)$$

其中, ξ_i 为第 i 振型阻尼比, M_i, K_i, C_i, F_i 相应为广义质量、广义刚度、广义阻尼和广义载荷。

设系统的初始速度和初始位移分别为 $\dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0$, 则式(2)中 q_i 由非齐次方程(5)本身的特解 q_{2i} 和对应齐次方程的通解 q_{1i} 两部分组成, 即

$$q_i(t) = q_{1i}(t) + q_{2i}(t), \quad (8)$$

代入初始速度和初始位移, 可以得到

$$q_{1i} = e^{-\xi_i \omega_i t} \left(q_{i0} \cos \omega_{id} t + \frac{\dot{q}_{i0} + \xi_i \omega_i q_{i0}}{\omega_{id}} \sin \omega_{id} t \right), \quad (9)$$

其中, q_{i0}, \dot{q}_{i0} 分别为系统初始速度 $\dot{\mathbf{x}}_0$ 和初始位移 \mathbf{x}_0 在模态坐标下的对应值:

$$\begin{cases} q_{i0} = \frac{\Phi_i^T M x_0}{M_i}, \\ \dot{q}_{i0} = \frac{\Phi_i^T M \dot{x}_0}{M_i}. \end{cases} \quad (10)$$

$q_{2i}(t)$ 与系统初始条件无关,对应零初始条件下的系统响应,可由 Duhamel 积分求得

$$q_{2i}(t) = \frac{1}{M_i \omega_{id}} \int_0^t F_i(\tau) e^{-\xi_i \omega_i(t-\tau)} \sin \omega_{id}(t-\tau) d\tau. \quad (11)$$

记

$$y^0 = \sum_{i=1}^n \Phi_i q_{1i} = \sum_{i=1}^n \Phi_i e^{-\xi_i \omega_i t} \left(q_{i0} \cos \omega_{id} t + \frac{\dot{q}_{i0} + \xi_i \omega_i q_{i0}}{\omega_{id}} \sin \omega_{id} t \right), \quad (12)$$

$$y^* = \sum_{i=1}^n \Phi_i q_{2i} = \sum_{i=1}^n \Phi_i \frac{1}{M_i \omega_{id}} \int_0^t F_i(\tau) e^{-\xi_i \omega_i(t-\tau)} \sin \omega_{id}(t-\tau) d\tau, \quad (13)$$

则系统位移为

$$y = y^0 + y^*. \quad (14)$$

根据已知位移对系统载荷进行识别,将位移表示为如下形式:

$$y^* = y - y^0 = \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_i \Phi_i^T}{M_i \omega_{id}} \int_0^t S_i(\tau) e^{-\xi_i \omega_i(t-\tau)} \sin \omega_{id}(t-\tau) d\tau. \quad (15)$$

系统在待识别载荷 $S(t)$ 作用下 t 时刻的位移响应可由以下卷积形式表示:

$$y^*(t) = \int_0^t G(t-\tau) S(\tau) d\tau, \quad (16)$$

式中, $G(t)$ 为系统的 Green 函数. 比较式(15)和(16),我们可以得到其具体形式为

$$G(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_i \Phi_i^T}{M_i \omega_{id}} e^{-\xi_i \omega_i t} \sin \omega_{id} t. \quad (17)$$

在考虑只有一个外界激励存在的情况下,即假设 $S(t)$ 中第 k 个元素为 $f_k(t)$,其它全为 0,化简上式,可以得到自由度 b 处的位移为

$$y_b^*(t) = \int_0^t \sum_{j=1}^n \frac{1}{M_j \omega_{jd}} \phi_{bj} \phi_{kj} f_k(\tau) e^{-\xi_j \omega_j(t-\tau)} \sin \omega_{jd}(t-\tau) d\tau. \quad (18)$$

在自由度 b ($b = 1, 2, \dots, n$) 处,其 Green 函数 $G_b(t)$ 为

$$G_b(t) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{M_j \omega_{jd}} \phi_{bj} \phi_{kj} e^{-\xi_j \omega_j t} \sin \omega_{jd} t. \quad (19)$$

将时间 $[0, T]$ 划分为 m 等份,则上式可以离散为如下形式:

$$\begin{Bmatrix} y_{b1}^* \\ y_{b2}^* \\ \vdots \\ y_{bm}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_1 & & & \\ g_2 & g_1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ g_m & g_{m-1} & \cdots & g_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{m-1} \end{Bmatrix}, \quad (20)$$

可记为

$$Y_b = GS, \quad (21)$$

式中, y_{bi}^* , g_i , s_i 分别为 $t = i\Delta t$ 时刻自由度 b 处的位移、Green 函数和脉冲载荷. 对于多源载荷,可以用同单源载荷一样的方法,离散为线性方程组的形式. 由于线性系统满足叠加原理,可将多源载荷问题表示为如下的矩阵形式:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{Y}_1^* \\ \mathbf{Y}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_n^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} & \cdots & \mathbf{G}_{1n} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} & \cdots & \mathbf{G}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_{n1} & \mathbf{G}_{n2} & \cdots & \mathbf{G}_{nn} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{S}_n \end{Bmatrix}, \quad (22)$$

式中, n 表示载荷源的个数, \mathbf{G}_{ij} 为载荷源 \mathbf{S}_i 到测点 \mathbf{Y}_j^* 之间相应的 Green 函数. 为了便于表述, 仍将式(22)表示为式(21)的形式.

当响应结果含有噪声的时候, 通过方程(21)求解作用载荷 \mathbf{S} 是一个不适定的问题, 也就是会存在解不唯一、不稳定或者不连续的问题.

2 Landweber 正则化方法

考虑一个线性的算子方程

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}, \quad (23)$$

其中, $\mathbf{A}: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ 为有界线性算子, \mathbf{X} 和 \mathbf{Y} 均为可分的 Hilbert 空间.

显然, 对于任意一个给定的 $\mathbf{y} \in \mathbf{A}(\mathbf{X})$, 总存在唯一的解 \mathbf{x} 满足算子方程. 设 $\mathbf{y} \in R(\mathbf{X})$ 为给定的精确数据, $\mathbf{y}^\delta \in \mathbf{Y}$ 为对应的测量数据, 且满足

$$\|\mathbf{y}^\delta - \mathbf{y}\|_{\mathbf{Y}} \leq \delta, \quad (24)$$

δ 为测量数据中含有噪声水平, 按照 Tikhonov 正则化的思想是采用正则解 $\mathbf{x}_\delta^\alpha = (\alpha\mathbf{I} + \mathbf{A}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{y}^\delta$ 作为精确解 $\mathbf{x}^\top = \mathbf{A}^+\mathbf{y}$ 的近似. 其中, $\alpha = \alpha(\delta)$ 是正则化参数.

Landweber 迭代法建议使用如下的迭代格式来对上述问题进行求解:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \omega\mathbf{A}(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1}), \quad (25)$$

其中, $0 < \omega \leq 1/\|\mathbf{A}\|^2$ 为松弛因子, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}^*$, \mathbf{x}^* 为初始猜想值. 关于该正则化方法的收敛性, 文献[12]给出了严格的证明, 这里不再赘述.

3 数值仿真

算例模型为一个桥梁的模型, 桥面和立柱都为钢材料, 密度为 $7\,800\text{ kg/m}^3$, Poisson 比为 0.3. 桥面部分由板单元组成, 柱的部分由梁单元组成. 桥面长 4 m, 宽 1 m, 厚度为 0.05 m, 6 个柱高度均为 1 m, 柱截面为边长 0.04 m 的正方形. 结构的有限元模型、作用力位置以及测点位置示意图如图 1 所示.

假设在桥面板上作用 1 个垂直于板的激励力, 取另一跨上 A 点的响应用于载荷识别. 激励力分别取如下几种形式:

1) 三角载荷

$$F_1(t) = \begin{cases} 50t, & 0\text{ s} < t \leq 0.5\text{ s}, \\ 50 - 50t, & 0.5\text{ s} < t \leq 1.5\text{ s}, \\ 50t - 75, & 1.5\text{ s} < t \leq 2\text{ s}, \\ 0, & 2\text{ s} < t \leq 5\text{ s}; \end{cases}$$

2) 正弦载荷

$$F_2(t) = 50\sin(2\pi \times 2t), \quad 0\text{ s} < t \leq 5\text{ s};$$

3) 随机型载荷

$$F_3(t) = 100 - 20R(t)\sin(11\pi t/2)\sin(\pi t), \quad 0\text{ s} < t \leq 5\text{ s},$$

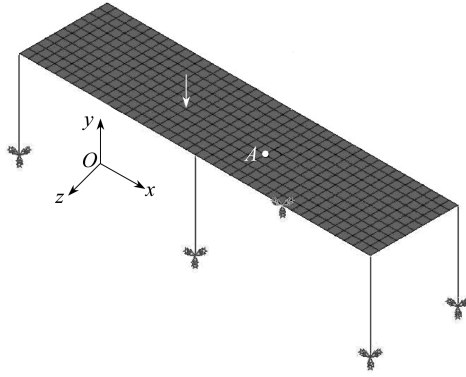


图 1 结构有限元模型

Fig.1 Structural finite element model

$\mathbf{R}(t)$ 是均值为 0 偏差为 1 与 $\bar{\mathbf{y}}$ 具有同样维数的随机向量;

4) 冲击型载荷

$$F_4(t) = 500te^{-10t}, \quad 0 \text{ s} < t \leq 5 \text{ s}.$$

为了研究噪声对识别结果的影响,本文按照式(26)添加了测量误差,来模拟工程中的测量噪声.

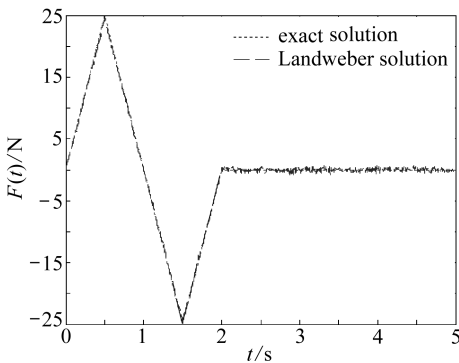
$$\bar{\mathbf{y}}_{\text{noise}} = \bar{\mathbf{y}} + \text{delt} \left[\sqrt{\frac{\sum \bar{\mathbf{y}}_i}{n_i}} \right] \mathbf{R}(t), \quad (26)$$

式中, delt 是误差水平, n_i 是响应信号的长度. 为了定量考察所识别载荷的准确性,把载荷的识别误差定义为

$$e_{\text{error}} = \frac{\sqrt{\| \mathbf{F}_{\text{identification}} - \mathbf{F}_{\text{true}} \|^2}}{\sqrt{\| \mathbf{F}_{\text{true}} \|^2}} \times 100\%, \quad (27)$$

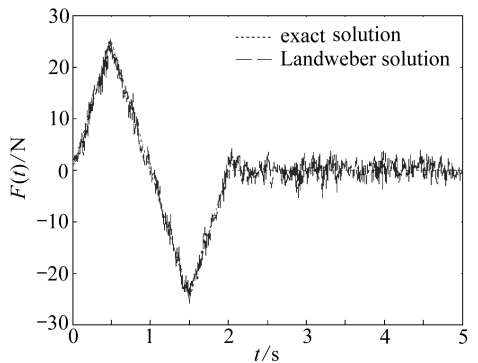
式中, $\mathbf{F}_{\text{identification}}$ 和 \mathbf{F}_{true} 分别表示识别出的载荷和真实载荷.

图 2 给出了噪声水平为 5% 时分别使用正则化方法和常规最小二乘方法的识别结果. 识别的误差分别为 3.58% 和 17.67%.



(a) Landweber 正则化方法识别结果

(a) Landweber regularization method solution



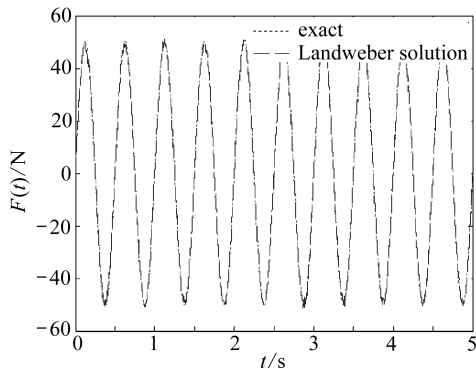
(b) 最小二乘法识别结果

(b) Least square (LS) method solution

图 2 使用 Landweber 正则化方法和最小二乘法的识别结果比较

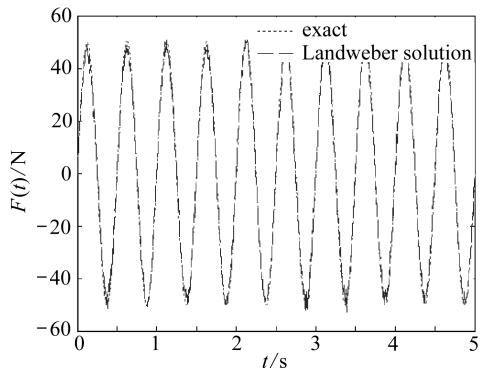
Fig.2 Comparison of results between the Landweber regularization method and the least square (LS) method

图 3、图 4、图 5 分别给出了正弦、随机和冲击载荷在 5% 和 10% 噪声水平下的识别效果.



(a) 噪声水平 5% 时的识别结果

(a) Landweber solution at 5% noise level

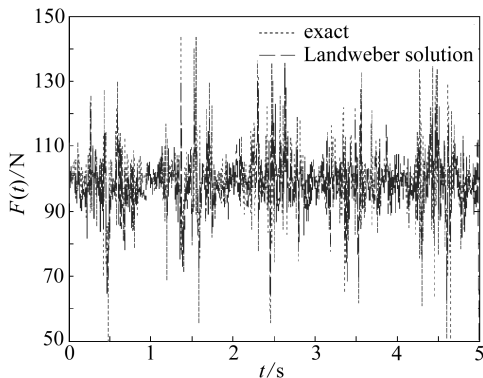


(b) 噪声水平 10% 时的识别结果

(b) Landweber solution at 10% noise level

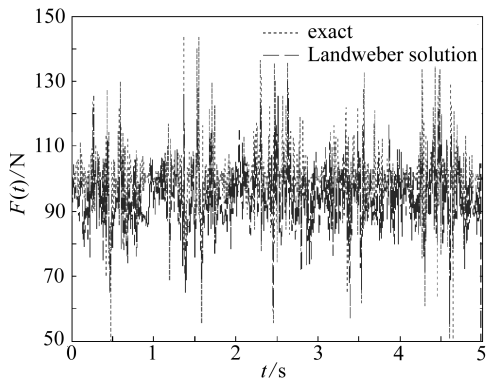
图 3 误差水平分别为 5% 和 10% 时使用 Landweber 正则化方法识别正弦载荷的效果

Fig. 3 Identification effects of sinusoidal force with the Landweber regularization method at different noise levels



(a) 噪声水平 5% 时的识别结果

(a) Landweber solution at 5% noise level

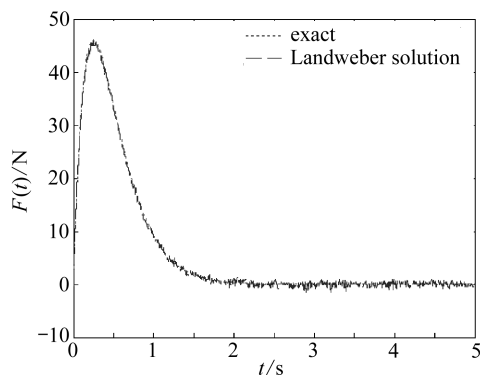


(b) 噪声水平 10% 时的识别结果

(b) Landweber solution at 10% noise level

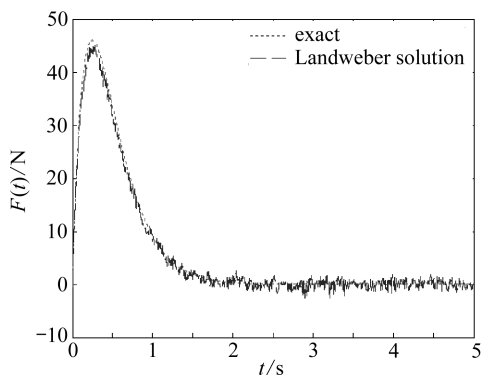
图 4 误差水平分别为 5% 和 10% 时使用 Landweber 正则化方法识别随机载荷的效果

Fig. 4 Identification effects of random force with the Landweber regularization method at different noise levels



(a) 噪声水平 5% 时的识别结果

(a) Landweber solution at 5% noise level



(b) 噪声水平 10% 时的识别结果

(b) Landweber solution at 10% noise level

图 5 误差水平分别为 5% 和 10% 时使用 Landweber 正则化方法识别冲击载荷的效果

Fig. 5 Identification effects of impact force with the Landweber regularization method at different noise levels

对正弦载荷、随机载荷和冲击载荷的识别结果的定量误差列在表 1。

表 1 3 种载荷在不同噪声水平下的识别误差 $e/\%$

Table 1 Identification errors of three loads at different noise levels

	noise level	
	5%	10%
$F_2(t)$	3.26	7.84
$F_3(t)$	9.17	12.32
$F_4(t)$	3.61	7.25

从表中结果可以看出,使用 Landweber 正则化迭代法进行载荷识别结果比较可靠,能够得到需求的稳定近似解。但是,随着噪声水平增加,识别误差也会增大,因此在实际应用中应尽量提高信噪比,或者首先对信号进行去噪处理。

4 结 语

工程实际中动态载荷识别是一个难度较高且较复杂的反问题。测量噪声和结构矩阵奇异是引起结构体系动态载荷识别失真的主要因素,而噪声是实际测量中不可避免的,因此在载荷识别过程中,要尽量提高响应测量信噪比。使用 Landweber 正则化方法,能够降低结构矩阵奇异的影响,改善解的稳定性。

参考文献 (References):

- [1] 许锋, 陈怀海, 鲍明. 机械振动载荷识别研究的现状与未来[J]. 中国机械工程, 2002, 13(6): 526-530. (XU Feng, CHEN Huai-hai, BAO Ming. Study on the general domain based model of force identification and its accuracy analysis[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2002, 13(6): 526-530. (in Chinese))
- [2] 智浩, 文祥荣, 缪龙秀, 林家浩. 动态载荷的频域识别方法[J]. 北方交通大学学报, 2002, 24(4): 5-10. (ZHI Hao, WEN Xiang-rong, MIAO Long-xiu, LIN Jia-hao. Dynamic loading identification in frequency domain[J]. *Journal of Northern Jiaotong University*, 2002, 24(4): 5-10. (in Chinese))
- [3] 蔡元奇, 朱以文, 刘礼华. 动态载荷识别中的模态确定方法研究[J]. 振动工程学报, 2006, 19(4): 543-547. (CAI Yuan-qi, ZHU Yi-wen, LIU Li-hua. Research on method for determining modality in dynamic load identification[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2006, 19(4): 543-547. (in Chinese))
- [4] 张运良, 林皋, 王永学, 李志军, 李广伟. 一种改进的动态载荷时域识别方法[J]. 计算力学学报, 2004, 21(2): 209-215. (ZHANG Yun-liang, LIN Gao, WANG Yong-xue, LI Zhi-jun, LI Guang-wei. An improved method of dynamic load identification in time domain[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2004, 21(2): 209-215. (in Chinese))
- [5] Stevens K K. Force identification problems—an overview[C]//*SEM Spring Conference on Experimental Mechanics*, SEM, 1987: 838-844.
- [6] Starkey J M, Merrill G L. On the ill-conditioned nature of indirect force-measurement techniques[J]. *The International Journal of Modal Analytical and Experimental Modal Analysis*, 1989, 7: 103-108.
- [7] Inoue H, Kishimoto K, Shibuya T, Koizumi T. Estimation of impact load by inverse analysis (optimal transfer function for inverse analysis)[J]. *JSME International Journal, Series I*,

- 1992, **35**(4) : 420-427.
- [8] Inoue H, Ishida H, Kishimoto K, Shibuya T. Measurement of impact load by using an inverse analysis technique(comparison of methods for estimating the transfer function and its application to the instrumented Charpy impact test) [J]. *JSME International Journal, Series I*, 1991, **34**(4) : 453-458.
- [9] Jacquelin E, Bennani A, Hamelin P. Force reconstruction: analysis and regularization of a deconvolution problem[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, **265**(1) : 81-107.
- [10] Landweber L. An iteration formula for Fredholm integaral equations of the first kind[J]. *American Journal of Mathematics*, 1951, **73**(3) : 615-624.
- [11] Fridman V M. Methods of successive approximation for Fredholm integral equations of the first kind[J]. *Uspekhi Mat Nauk*, 1956, **11**(1) : 233-234.
- [12] 王彦飞. 反演问题的计算方法及其应用[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006: 51-59. (WANG Yan-fei. *Computational Methods for Inverse Problems and Their Applications*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2006: 51-59. (in Chinese))

Applications of Landweber Iteration Regularization Method in Dynamic Load Identification

CHANG Xiao-tong, YAN Yun-ju, LIU Liu

(*School of Mechanics, Civil Engineering and Architecture,
Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, P. R. China*)

Abstract: The inverse problem of force identification was always ill-posed due to the inverse process of structural matrix and measurement noise in practical engineering and the ordinary least square method usually obtained the meaningless solution, which was called the ill-posed problem of the inverse problem. The Landweber iteration regularization method was proposed to overcome these problems. The load can be expressed as a series of kernels of impulse function in time domain and the total response of the system can be obtained with the product of the convolution integral of the kernel responses and the load. The load were identified on a bridge model. The simulation results show that the identification method proposed is effective and it can meet the engineering requirements of stable approximate solution.

Key words: ill-posedness; force identification; Landweber regularization technique