

矩形微通道热沉内单相稳态层流流体的流动与传热分析*

王丽凤, 邵宝东, 程赫明, 唐艳军

(昆明理工大学 建筑工程学院 工程力学系,昆明 650500)

摘要: 采用解析方法分析了矩形微通道热沉内单相稳态层流流体的流动与传热. 基于 y 方向流速和导热不变的假设, 建立流体在矩形微通道内流动的流速方程和传热的温度方程, 进而推导出 Nusselt 数和 Poiseuille 数的理论表达式. 通过计算结果可以看出, 推导的 Nusselt 数和 Poiseuille 数的解析解与其他文献的结果吻合较好, 而且当宽高比趋于无穷大时, Nusselt 数和 Poiseuille 数分别趋近于 8.235 和 96, 这与其他文献结果完全相同. 在 Reynolds 数相同时, 摩擦因数随着宽高比的增加而增加, 而在相同宽高比时, 摩擦因数随 Reynolds 数的增加而减小.

关键词: 矩形微通道; 热沉; Nusselt 数; Poiseuille 数; 稳态层流

中图分类号: TK124; O35 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.08.009

引言

微通道热沉因其具有结构紧凑、散热效率高、功耗低及使用的冷却液少等优点而得到广泛应用, 包括涡轮叶片、聚变反应堆覆层、火箭发动机、航空电子设备、混合动力汽车电子设备、储氢、制冷、微重力热控、毛细泵循环等领域的冷却问题^[1]. 很多学者也在相关领域进行了大量研究. Shah^[2]采用最小二乘匹配技术分析了解任意横截面槽道内充分发展层流与传热问题, 得到了等腰三角形、圆角等边三角形、正弦、菱形及梯形横截面槽道内流体流动与传热的分析结果. 其中, 对于矩形横截面, 作者给出了 Nusselt 数的表达式, 并采用数值方法计算了不同高宽比下的 Nusselt 数的值. Lee 等^[3]采用实验方法和数值模拟研究了矩形微通道内热发展区的换热问题, 换热系数随给定流率减小而增加. Morini 等^[4]采用分析方法研究了 Newton 单相流体在矩形微通道内自然对流层流的瞬态行为, 基于 Boussinesq 经典假设, 采用双正弦 Fourier 变换和 Laplace 变换, 求解了连续方程、动量方程和能量方程. 刘赵森等^[5]基于连续介质方法采用数值方法研究了液体在不同几何结构微通道中流动和传热性能. 研究发现, 截面宽高比越大, Poiseuille 数越小; 在 Re 为 20 ~ 1 800 时, Nusselt 数正比于水力直径和宽高比. 徐斌等^[6]对矩形微通道内单相层流流动和传热特性进行了实验研究和三维数值模拟研究. 在恒热流边界条件下,

* 收稿日期: 2013-05-16; 修订日期: 2013-06-17

基金项目: 云南省应用基础研究重点项目(2007A0015Z)

作者简介: 王丽凤(1972—), 女, 黑龙江鸡西人, 讲师, 硕士(E-mail: wanglifeng0314@163.com); 邵宝东(1971—), 男, 黑龙江鸡西人, 副教授, 博士(通讯作者. E-mail: shbd_1221@163.com).

摩擦因数沿流动方向有递减趋势。进口处的 Nusselt 数有最大值。Mansoor 等^[7]采用数值模拟方法研究了高热流下矩形微通道内的流体流动与传热问题。研究表明,换热系数随着热流的增加而增加,并给出发展中单相流的 Nusselt 数的关系式。鲁进利等^[8]实验研究了矩形、半圆形及三角形截面微通道内去离子水的流动阻力特性,结果表明当截面形状相同时,摩擦阻力因数随着当量直径的减小而降低,当量直径接近而截面形状不同时,其摩擦阻力因数也不相同。钟主海等^[9]实验研究了水在水力直径 $167\ \mu\text{m} \sim 195\ \mu\text{m}$ 矩形硅通道和水力直径为 $168\ \mu\text{m} \sim 399\ \mu\text{m}$ 圆形玻璃微管中的流动特性,结果表明微通道的形状对流动阻力特性没有明显影响。龚磊等^[10]采用数值方法研究了微通道双电层对压强梯度液体流动的阻力效应,给出不同电阻力数的微通道流量、流量损失率、速度剖面的数值结果,并合理解释了双电层对微通道液体流动的阻力效应。

尽管管槽内流体的流动与传热研究已经得到了一些经典理论,但是很多结论都是针对圆管,而矩形及其它截面槽道内流体的流动与传热的结论大多都是基于实验和数值模拟而得到的经验公式。这些公式只适用于某些特殊实验条件下,当实验条件改变时,所得结果也会改变。很少有从理论上推导出矩形截面微通道流动与传热的通用分析结果。本文针对常热流边界条件下矩形微通道内流体的单相稳态层流流动与传热问题,从理论上推导矩形微通道内流体流速及温度分布规律的解析表达式,得到通用的 Nusselt 数和 Poiseuille 数的表达式。

1 矩形微通道分析模型

单个矩形微通道结构示意图如图 1 所示,微通道的宽度为 b ,高度为 a ,建立图 1 所示直角坐标系,流体沿 x 方向流动。在微通道底部施加常热流边界条件。假设微通道内流体的温度和速度不沿 y 方向变化,可以分别表示为 $T(z,x)$ 和 $u(z,x)$ 。微通道内流体的流动与传热分析基于以下几个假设:1) 流体是不可压缩的;2) 流体的热物性是常数;3) 流体在微通道内的层流流动是充分发展的;4) 忽略粘性耗散的影响。

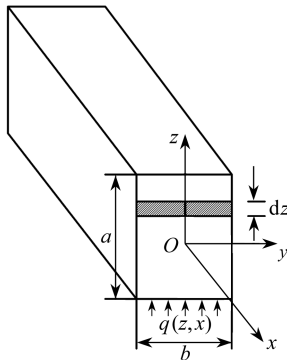


图 1 单个矩形微通道

Fig. 1 A single rectangular micro-channel

2 流速分析

在充分发展区内,流体力学状态的一个重要特征是径向速度分量 v 及轴向速度分量的梯度 $(\partial u/\partial x)$ 处处为 0。在充分发展区净动量通量处处为 0,因此动量守恒的要求就简化为流体中切应力与压力之间的简单平衡。

考虑图 2 所示微元体在 x 方向的力平衡,有

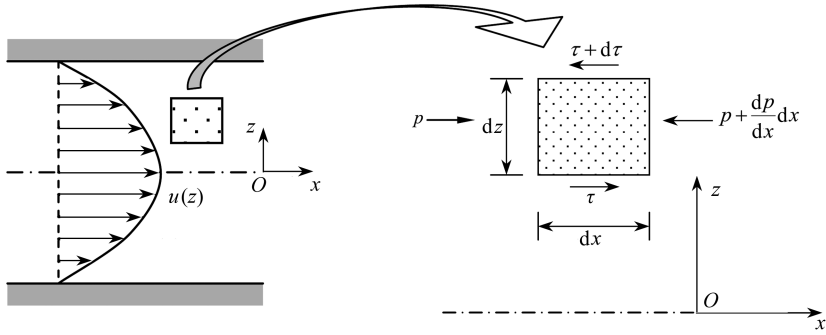


图2 充分发展层流微元体的力平衡

Fig. 2 Force balance on a differential element for fully developed laminar flow

$$\tau \cdot b dx - \left[\tau b dx + \frac{d}{dz} (\tau \cdot b dx) dz \right] + p \cdot b dz - \left[p \cdot b dz + \frac{d}{dx} (p \cdot b dz) dx \right] = 0, \quad (1)$$

式(1)经化简得

$$-\frac{d\tau}{dz} = \frac{dp}{dx}. \quad (2)$$

由 Newton 流体的粘性定律, 假设 $\tau = -\mu(du/dz)$, 代入式(2), 有

$$\mu \frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{dp}{dx}. \quad (3)$$

将式(3)积分两次, 分别得到

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) z + C_1, \quad (4)$$

$$u(z, x) = \frac{1}{\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2. \quad (5)$$

将边界条件 $u(a/2, x) = 0$, $(\partial u / \partial z) |_{z=0} = 0$ 代入式(4)和(5), 得

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) \left(\frac{a}{2} \right)^2.$$

将所得积分常数代回式(5), 得

$$u(z, x) = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) \left(\frac{a}{2} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{z}{a/2} \right)^2 \right], \quad (6)$$

式(6)为矩形微通道内充分发展流体的速度表达式. 式(6)可以用来求解某一截面流体的平均速度. 流体的质量流率为 $\dot{m} = \rho u_m A_c$, 也可写成

$$\dot{m} = \int_{A_c} \rho u(z, x) dA_c.$$

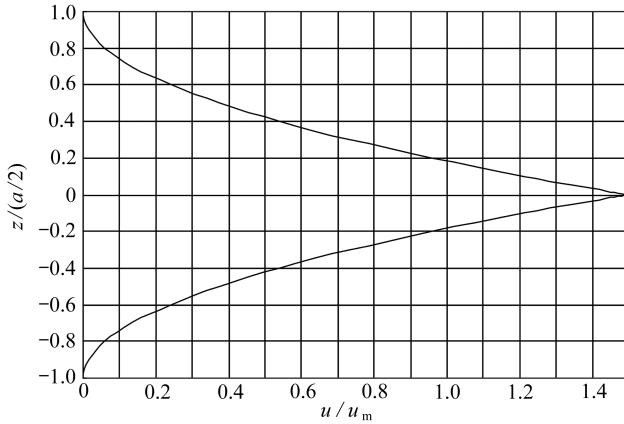
对于矩形截面微通道, $dA_c = b dz$, 因此

$$u_m = \frac{\int_{A_c} \rho u(z, x) dA_c}{\rho A_c} = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} u(z, x) dz = -\frac{a^2}{12\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (7)$$

由式(6)和式(7)可以得到

$$\frac{u(z)}{u_m} = \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{z}{a/2} \right)^2 \right]. \quad (8)$$

图3为速度比值在矩形微通道横截面 z 方向的变化规律. 从图3可以看出在矩形微通道中心速度达到最大值, 最大速度是平均速度的 1.5 倍, 而在壁面处为 0.

图3 u/u_m 沿 z 方向变化规律Fig. 3 Variation of u/u_m along z direction

3 热平衡分析

由 Newton 冷却定律 $q = \dot{m}c_p(T_{\text{out}} - T_{\text{in}})$, 忽略 x 方向的导热, 在充分发展区域, z 方向的速度为 0.

因此考虑图 4 所示微元体 x 方向对流换热和 z 方向传导换热的热能平衡有

$$q(z, x) - \left[q(z, x) + \frac{\partial q(z, x)}{\partial z} dz \right] = (\dot{m}) c_p \left[\left(T(z, x) + \frac{\partial T(z, x)}{\partial x} dx \right) - T(z, x) \right]. \quad (9)$$

经整理得

$$(\dot{m}) c_p \frac{\partial T(z, x)}{\partial x} dx = - \frac{\partial q(z, x)}{\partial z} dz, \quad (10)$$

微元体的质量流率为 $d\dot{m} = \rho \cdot u \cdot b \cdot dz$, 在某一截面处 (即 x 等于某一值时) 沿 z 方向的热流

$$q(z) = -k \left(\frac{\partial T(z, x)}{\partial z} \right) b dx. \quad (11)$$

将式(11)代入式(10), 得

$$u \frac{\partial T(z, x)}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 T(z, x)}{\partial z^2}, \quad (12)$$

其中, $\alpha = k/(c_p \rho)$. 式(12)为流体在微通道内传热的热能平衡方程.

将式(8)代入式(12), 得

$$\frac{3}{2} u_m \left[1 - \left(\frac{z}{a/2} \right)^2 \right] \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (13)$$

对于表面常热流边界, 忽略 x 方向导热, 有 $\partial^2 T/\partial x^2 = 0$. 当 q_s'' 为常数, 有

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{\text{fd}, t} = \left. \frac{dT_m}{dx} \right|_{\text{fd}, t}. \quad (14)$$

将式(13)积分两次, 分别得到

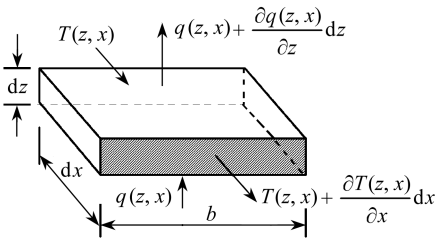


图4 矩形微通道中的微元体

Fig. 4 A differential element in the rectangular micro-channel

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{3u_m}{2\alpha} \left(\frac{dT_m}{dx} \right) \left[z - \frac{1}{(a/2)^2} \frac{z^3}{3} \right] + C_1, \quad (15)$$

$$T(z, x) = \frac{3u_m}{2\alpha} \left(\frac{dT_m}{dx} \right) \left[\frac{z^2}{2} - \frac{1}{(a/2)^2} \frac{z^4}{12} \right] + C_1 z + C_2. \quad (16)$$

考虑如下边界条件:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad T\left(\frac{a}{2}, x\right) = T_s(x). \quad (17)$$

求得积分常数分别为

$$C_1 = 0, \quad C_2 = T_s(x) - \frac{5u_m}{8\alpha} \left(\frac{dT_m}{dx} \right) \left(\frac{a}{2} \right)^2.$$

将积分常数代入式(16)得

$$T(z, x) = T_s(x) - \frac{3u_m}{2\alpha} \left(\frac{dT_m}{dx} \right) \left(\frac{a}{2} \right)^2 \left[\frac{5}{12} + \frac{1}{12} \left(\frac{z}{a/2} \right)^4 - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a/2} \right)^2 \right], \quad (18)$$

式(18)为矩形通道内充分发展流体的温度表达式. 由式(18)可以得到平均温度表达式:

$$T_m(x) = \frac{\int_{A_c} \rho u c_p T dA_c}{\dot{m} c_p} = \frac{\int_{-a/2}^{a/2} \rho u(z) c_p T(z, x) b dz}{\rho u_m a b c_p} = \frac{1}{a u_m} \int_{-a/2}^{a/2} u(z) T(z, x) dz, \quad (19a)$$

$$T_m(x) = T_s(x) - \frac{17}{35} \left(\frac{u_m (a/2)^2}{\alpha} \right) \left(\frac{dT_m}{dx} \right). \quad (19b)$$

对于矩形截面有

$$P = 2(a + b), \quad \dot{m} = \rho u_m ab, \\ \frac{dT_m}{dx} = \frac{q_s'' P}{\dot{m} c_p} = \frac{q_s'' 2(a + b)}{\rho u_m a b c_p}, \quad D_h = \frac{4A_c}{P} = \frac{2ab}{a + b}.$$

则式(19b)可以写为

$$T_m(x) - T_s(x) = -\frac{17}{70} \left(\frac{q_s'' a(a + b)}{k b} \right). \quad (20)$$

将式(20)代入 Newton 冷却定律的表达式得

$$h = \frac{q_s''}{T_s(x) - T_m(x)} = \frac{70}{17} \frac{kb}{a(a + b)}. \quad (21)$$

根据 Nusselt 数的定义有

$$Nu_{D_h} = \frac{h D_h}{k} = \frac{35}{68} \frac{D_h^2}{(a/2)^2} = \frac{140}{17} \frac{1}{(1 + a/b)^2}. \quad (22)$$

令槽道高宽比 $\alpha = a/b$, 则

$$Nu_{D_h} = \frac{140}{17} \frac{1}{(1 + \alpha)^2}. \quad (23)$$

式(23)表明, Nusselt 数只与矩形截面的宽高比 α 有关, 而与 Reynolds 数无关, 这与很多由实验得到的经验公式结果相似. 式(23)与 Kays 和 Crawford^[11]得到的式(24)比较, 本文所得公式为更直观简洁的解析表达式, 而且无 Reynolds 数的条件限制, 应用范围更广.

$$Nu_{fd} = 8.235(1 - 1.883/\alpha + 3.767/\alpha^2 - 5.814/\alpha^3 + 5.361/\alpha^4 - 2/\alpha^5)^{[11]}. \quad (24)$$

根据摩擦因数和 Reynolds 数的定义有

$$f = \frac{-(dp/dx) D_h}{\rho u_m^2 / 2}, \quad (25)$$

$$Re = \frac{\rho u_m D_h}{\mu} \quad (26)$$

将式(25)与式(26)相乘,同时考虑平均速度的表达式(7),得到 Poiseuille 数的表达式

$$f Re = 6 \frac{D_h^2}{(a/2)^2} = \frac{96}{(1+a/b)^2} = \frac{96}{(1+\alpha)^2} \quad (27)$$

4 结果分析与讨论

取不同宽高比来计算 Nusselt 数和 Poiseuille 数的表达式(23)和式(27),结果如表 1 所示。

表 1 常表面热流边界条件下不同宽高比矩形微通道 Nusselt 数和 Poiseuille 数

Table 1 Nusselt numbers and Poiseuille numbers for different aspect ratios of the rectangular micro-channel under constant surface heat flux

$(b/a)(1/\alpha)$ aspect ratios	Nu [12]	Nu [11]	Nu (eq. (23))	$f Re$ [11]	$f Re$ (eq. (27))
1	3.549 3	3.61	2.059	57	24
1.43	3.991 5	3.73	2.852	59	33.245
2	4.496 8	4.12	3.660	62	42.670
3	5.217 0	4.79	4.632	69	54
4	5.705 5	5.33	5.271	73	61.440
8	6.698 2	6.49	6.507	82	75.850
∞	8.235 0	8.23	8.235	96	96

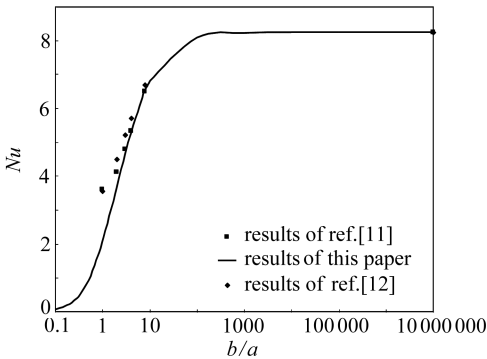


图 5 Nusselt 数随宽高比的变化

Fig. 5 Variation of Nusselt numbers with aspect ratios

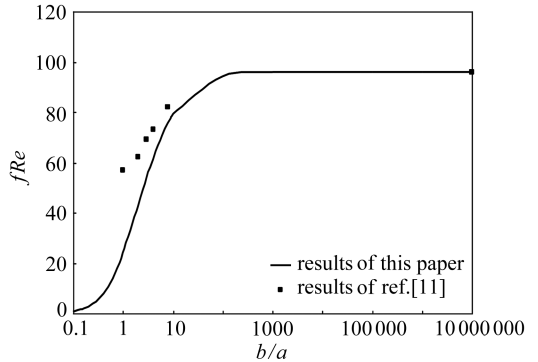


图 6 Poiseuille 数随宽高比的变化

Fig. 6 Variation of Poiseuille numbers with aspect ratios

从表 1 可以看出,本文的计算结果在宽高比小于 2 时与文献[11-12]的结果出入较大,但是随着宽高比的增加,本文结果与文献[11-12]中的结果相差越来越小,当宽高比趋于无穷时,即平板时,结果完全相同。这也可从图 5 和图 6 的变化趋势看出。本文结果与文献[11-12]存在不同的一个可能的原因是本文中假设流体在 y 方向上的流速和导热不变。

从图 5 可以看出 Nusselt 数随着宽高比增加而增加,当宽高比趋近于无穷大时,即流体在无限大平板内流动时,Nusselt 数趋近于固定值 8.235,这与文献[11-12]的结果一样。从图 6 可以看出 Poiseuille 数随宽高比增加而增加,当宽高比趋近于无穷大时,Poiseuille 数趋近于固定值 96,这与文献[11]的结果一样。

图 7 为不同宽高比时摩擦因数随 Reynolds 数的变化规律。从图 7 可以看出,在 Reynolds 数相同时,摩擦因数随着宽高比的增加而增加,而在宽高比相同时,摩擦因数随 Reynolds 数的增加而减小。

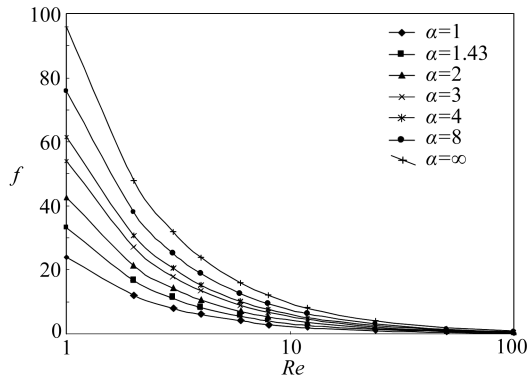


图7 不同宽高比时摩擦因数随 Reynolds 数的变化

Fig. 7 Variation of friction coefficients with Reynolds numbers for different aspect ratios

5 结 论

本文采用解析方法研究了矩形微通道热沉内单相稳态层流流体的流动与传热问题。基于 y 方向流速和导热不变的假设,建立流体在微通道内流动的流速方程和传热的温度方程。进而推导出 Nusselt 数和 Poiseuille 数的简单表达式。通过计算分析,得出以下结论:

1) 在充分发展的微通道内某一横截面上,流体 Nusselt 数的大小只与矩形截面的宽高比有关,而和流体在该截面处的速度、压力及温度无关。Nusselt 数随着宽高比的增加而增大,当宽高比趋于无穷大时,即平板内流体流动时,Nusselt 数趋近于固定值 8.235。

2) 在充分发展微通道内的某一横截面上,流体的 Poiseuille 数只与矩形截面的宽高比有关,而与流体的其他因素无关。Poiseuille 数随宽高比增加而增大,当宽高比趋于无穷大时,即平板内流体流动时,Poiseuille 数趋近于固定值 96。

3) 在 Reynolds 数相同时,摩擦因数随着宽高比的增加而增加,而在宽高比相同时,摩擦因数随 Reynolds 数的增加而减小。

参考文献 (References):

- [1] Mudawar I. Two-phase microchannel heat sinks: theory, applications, and limitations[J]. *Journal of Electronic Packaging*, 2011, **133**(4): 041002-1-041002-31.
- [2] Shah R K. Laminar flow friction and forced convection heat transfer in ducts of arbitrary geometry[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1975, **18**(7/8): 849-862.
- [3] Lee Poh-Seng, Garimella S V, LIU Dong. Investigation of heat transfer in rectangular microchannels[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2005, **48**(9): 1688-1704.
- [4] Morini G L, Spiga M. Transient laminar natural convection along rectangular ducts[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2001, **44**(24): 4703-4710.
- [5] 刘赵森, 逢燕, 申峰. 几何尺寸对矩形微通道液体流动和传热性能的影响[J]. 机械工程学报, 2012, **48**(16): 139-145. (LIU Zhao-miao, PANG Yan, SHEN Feng. Effects of geometry on liquid flow and heat transfer in microchannels[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2012, **48**(16): 139-145. (in Chinese))
- [6] 徐斌, 陆向迅, 吴建, 王洋, 薛宏. 微通道流体物性对流动与传热影响的数值模拟和实验研究[J]. 水动力学研究与进展, 2008, **23**(6): 675-680. (XU Bin, LU Xiang-xun, WU Jian, WANG Yang, XUE Hong. Influence of thermophysical properties on the flow and heat transfer in rectangular microchannels[J]. *Chinese Journal of Hydrodynamics*, 2008, **23**(6): 675-680. (in

- Chinese))
- [7] Mansoor M M, Wong K-C, Mansoor S. Numerical investigation of fluid flow and heat transfer under high heat flux using rectangular micro-channels[J]. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2012, **39**(2): 291-297.
- [8] 鲁进利, 周宾, 许忠林, 蒋洁, 郭雨含, 郝英立. 不同截面微通道中流动阻力特性[J]. 东南大学学报(自然科学版), 2011, **41**(3): 554-557. (LU Jin-li, ZHOU Bin, XU Zhong-lin, JIANG Jie, GUO Yu-han, HAO Ying-li). Flow characteristics in microchannel with different cross-section[J]. *Journal of Southeast University (Natural Science Edition)*, 2011, **41**(3): 554-557. (in Chinese))
- [9] 钟主海, 刘磊, 樊辉青, 张翔. 矩形和圆形微通道内流体流动特性的实验研究[J]. 中国电机工程学报, 2012, **32**(14): 76-81. (ZHONG Zhu-hai, LIU Lei, FAN Hui-qing, ZHANG Xiang. Experimental study on flow characteristics in rectangular and circular microchannels[J]. *Proceeding of the CSEE*, 2012, **32**(14): 76-81. (in Chinese))
- [10] 龚磊, 吴健康. 微通道液体流动双电层阻力效应[J]. 应用数学和力学, 2006, **27**(10): 1219-1224. (GONG Lei, WU Jian-kang. Resistance effect of electric double layer on liquid flow in microchannel[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, **27**(10): 1219-1224. (in Chinese))
- [11] Kays W M, Crawford M E. *Convective Heat and Mass Transfer*[M]. New York: McGraw-Hill, 1980.
- [12] Theodore L B, Adrienne S L, Frank P I, David P D. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*[M]. 7th ed. Hoboken: John Eiley & Sons, 2011.

Fluid Flow and Heat Transfer Analysis of Single-Phase Steady Laminar Flow in Rectangular Micro-Channel Heat Sinks

WANG Li-feng, SHAO Bao-dong, CHENG He-ming, TANG Yan-jun
(Department of Engineering Mechanics, Architectural Engineering Institute,
Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, P. R. China)

Abstract: Fluid flow and heat transfer of single-phase steady laminar flow in a rectangular micro-channel were investigated by analytic method. Based on the assumption of constant flow velocity and heat transfer along y direction, flow velocity and heat transfer equations for fluid flow in the rectangular micro-channel were set up. Then the theoretical expressions of Nusselt number and Poiseuille number were derived. The computed results show that the analytic solutions derived coincide well with the results of other literatures. When the aspect ratio of the cross section tends to infinity, Nusselt number and Poiseuille number tend to be 8.235 and 96, respectively, which are identical to those of other literatures. When Reynolds number is fixed, the friction coefficient increases with the aspect ratio, and when the aspect ratio is fixed, the friction coefficient decreases with Reynolds number increase.

Key words: rectangular micro-channel; heat sink; Nusselt number; Poiseuille number; steady laminar flow