

# 基于改进位移模式的二维有限元线法超收敛算法\*

唐义军, 罗建辉

(湖南大学 土木工程学院,长沙 410082)

**摘要:** 提出了基于改进位移模式的二维有限元线法超收敛算法. 利用单元内部需满足平衡方程的条件, 推导了超收敛计算的解析公式的显式, 即将高阶有限元线法解的位移模式用常规有限元线法解的位移模式表示. 用常规有限元线法解的位移模式与高阶有限元线法解的位移模式之和构造新的位移模式, 基于线性形函数, 采用变分形式推导了有限元线法求解的修正的常微分方程组. 该算法在前处理和后处理中同时使用超收敛计算公式, 在原有试函数的基础上, 增加了高阶试函数, 使得单元内平衡方程的残差减少, 从而达到提高精度的目标. 对于二维 Poisson 方程问题, 给出了有代表性的算例, 节点和单元内的位移、导数的收敛精度得到了极大的提高.

**关键词:** 有限元线法; 二维问题; 前处理; 位移模式; Poisson 方程; 超收敛

**中图分类号:** O241.81; O302 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.08.005

## 引言

单元内的位移、单元应力精度比节点位移、节点应力精度呈数量级的下降. 这一现象引发了对于常规位移法有限元收敛计算的研究<sup>[1-2]</sup>. 袁驷等基于结构力学中的矩阵位移法<sup>[3]</sup>和有限元数学理论中的投影定理<sup>[2]</sup>, 对一维  $C^0$  问题提出了有限元后处理超收敛计算的单元能量投影法<sup>[4]</sup>. 该方法推广到了一维有限元其它问题和二维有限元线法问题<sup>[5-8]</sup>.

本文在文献[9-10]的基础上, 将改进位移模式的超收敛算法推广到二维有限元线法 (finite element method of lines, FEMOL) 中, 数值算例表明这一方法对于二维有限元线法是同样适用的.

## 1 问题描述

### 1.1 模型问题

本文的分析推导以如下的二维 Poisson 方程(椭圆方程)模型问题为例展开:

$$Lu = -\nabla^2 u = \bar{f}, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad (1a)$$

\* 收稿日期: 2013-01-10; 修订日期: 2013-06-25

基金项目: 湖南省自然科学基金资助项目(08JJ3011)

作者简介: 唐义军(1977—), 男, 湖南人, 博士生(通讯作者. E-mail: yijuntang168@163.com);

罗建辉(1957—)男, 湖南人, 教授(E-mail: luojianhui@hnu.edu.cn).

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, \quad \text{在 } \Gamma_D \text{ 上}, \quad (1b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = \bar{\mathbf{q}}, \quad \text{在 } \Gamma_N \text{ 上}, \quad (1c)$$

式中各符号均为常规用法,而上划线表示给定或已知的量(下同)。

## 1.2 FEMOL 解

以下考虑模型问题(1)的 FEMOL 解,图 1 所示为一典型的 FEMOL 参数单元  $e$  的几何映射,其中  $L_i$  表示第  $i$  条结线,其中  $S_j$  表示第  $j$  个端边。常用的几何映射关系为

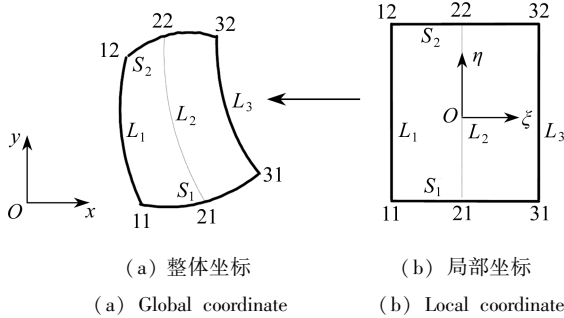


图 1 有限元线法二次单元模型

Fig.1 A quadratic element mapping of FEMOL

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{p+1} N_i(\xi) \mathbf{x}_i(\eta), \\ \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{p+1} N_i(\xi) \mathbf{y}_i(\eta), \end{cases} \quad (2a)$$

在单元内选用插值函数为

$$\mathbf{u}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{p+1} N_i(\xi) \mathbf{d}_i(\eta), \quad (2b)$$

式中,  $N_i(\xi)$  为  $p$  次 Lagrange 插值函数(形函数),  $\mathbf{d}_i(\eta)$  为结线上的解函数。与有限元法相似,将单元上的位移矢量  $\mathbf{u}$  代入势能泛函得到单元的势能  $\Pi^e \mathbf{d}^e$ ;再将各单元的贡献集成起来构成结构的总势能  $\Pi \mathbf{d} = \sum_e \Pi^e \mathbf{d}^e$ ;最后,对总势能泛函取一阶变分并令其为 0,则可导出如下形式的一组常微分方程:

$$\mathbf{A} \mathbf{u}^{h''} + \mathbf{G} \mathbf{u}^{h'} + \mathbf{H} \mathbf{u}^h + \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad -1 \leq \eta \leq 1 \quad (3)$$

及与此相应的边界条件。式中'表示对  $\eta$  求导,  $\mathbf{A}, \mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{F}$  一般都为  $\eta$  的函数,具体可参考文献 [11],结合相应的边界条件,即可求得结线位移函数向量  $\mathbf{d}$ 。

## 2 高阶解 $\mathbf{u}^\#$ 公式

有限元线法以  $\mathbf{u}^h$  为有限元解的试函数,已处处满足物理方程和几何方程。但只满足单元的平衡方程,不能保证在单元内处处满足平衡方程。下面将利用单元内满足平衡方程的条件导出高阶解  $\mathbf{u}^\#$  公式。在  $\xi = \xi_a$  处截开,对于单元左边部分  $\Omega_1$  应该满足

$$\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{L} \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \xi_1 < \xi_a < \xi_2. \quad (4)$$

将上式写成积分形式<sup>[12]</sup>:

$$\int_{\Omega_1} (\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{L} \mathbf{u}) \mathbf{v}^h dA = \mathbf{0}, \quad (5)$$

上式中,  $\mathbf{v}^h$  为任意函数, 将  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^h + \mathbf{u}^\#$  ( $\mathbf{u}^h$  为常规有限元线法的解,  $\mathbf{u}^\#$  为问题的高阶解) 代入式(5)可以得到

$$\int_{\Omega_1} (\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{L}\mathbf{u}^h) \mathbf{v}^h dA - \int_{\Omega_1} \mathbf{L}\mathbf{u}^\# \mathbf{v}^h dA = \mathbf{0}, \tag{6}$$

也即

$$\int_{\Omega_1} (\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{L}\mathbf{u}^h) \mathbf{v}^h dA = \int_{\Omega_1} \mathbf{L}\mathbf{u}^\# \mathbf{v}^h dA. \tag{7}$$

利用分部积分, 可以得到如下恒等式:

$$\int_{\Omega_1} \mathbf{L}\mathbf{u}^\# \mathbf{v}^h dA + \oint_{\partial\Omega_1} \mathbf{u}^\# \mathbf{v}_n^h ds = \int_{\Omega_1} \mathbf{u}^\# \mathbf{L}\mathbf{v}^h dA + \oint_{\partial\Omega_1} \mathbf{u}^\# \mathbf{v}_n^h ds, \tag{8}$$

上式中,  $\mathbf{u}_n = \partial\mathbf{u}/\partial n$ , 因为  $\mathbf{v}^h$  为任意函数, 则可以令  $\mathbf{L}\mathbf{v}^h = \mathbf{0}$ , 则上式也可以表示为

$$\int_{\Omega_1} \mathbf{L}\mathbf{u}^\# \mathbf{v}^h dA = \oint_{\partial\Omega_1} \mathbf{u}^\# \mathbf{v}_n^h ds - \oint_{\partial\Omega_1} \mathbf{u}^\# \mathbf{v}^h ds. \tag{9}$$

将式(9)代入式(7)可得到

$$\int_{\Omega_1} (\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{L}\mathbf{u}^h) \mathbf{v}^h dA = \oint_{\partial\Omega_1} \mathbf{u}^\# \mathbf{v}_n^h ds - \oint_{\partial\Omega_1} \mathbf{u}^\# \mathbf{v}^h ds. \tag{10}$$

又因为

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} (\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{L}\mathbf{u}^h) \mathbf{v}^h dA &= \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_a} (\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{L}\mathbf{u}^h) N_1 \mathbf{J}\mathbf{v}_1^h d\xi d\eta + \\ &\int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_a} (\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{L}\mathbf{u}^h) N_2 \mathbf{J}\mathbf{v}_2^h d\xi d\eta, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \int_{L_1} \mathbf{u}^\# \mathbf{v}^h ds &= - \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_a} (\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{L}\mathbf{u}^h) N_1 \mathbf{J}\mathbf{v}_1^h d\xi d\eta - \\ &\int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_a}^{\xi_2} (\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{L}\mathbf{u}^h) N_1 \mathbf{J}\mathbf{v}_1^h d\xi d\eta, \end{aligned} \tag{12}$$

式(12)中的推导忽略了端边项的影响<sup>[8]</sup>.

将式(11)加上式(12)可以得到

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} (\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{L}\mathbf{u}^h) \mathbf{v}^h dA + \oint_{L_1} \mathbf{u}^\# \mathbf{v}^h ds &= \\ \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_a} (\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{L}\mathbf{u}^h) N_2 \mathbf{J}\mathbf{v}_2^h d\xi d\eta - \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_a}^{\xi_2} (\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{L}\mathbf{u}^h) N_1 \mathbf{J}\mathbf{v}_1^h d\xi d\eta. \end{aligned} \tag{13}$$

接下来求

$$\oint_{\partial\Omega_1} \mathbf{u}^\# \mathbf{v}_n^h ds = \int_{L_1} \mathbf{u}^\# \mathbf{v}_n^h ds + \int_{L_a} \mathbf{u}^\# \mathbf{v}_n^h ds. \tag{14}$$

式(14)中的推导忽略了端边项的影响. 因为  $\mathbf{u}^\#$  为高阶解,  $\mathbf{u}^\#(\xi_1) = \mathbf{u}'(\xi_1) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{u}^\#(\xi_2) = \mathbf{u}'(\xi_2) = \mathbf{0}$ , 所以

$$\int_{L_1} \mathbf{u}^\# \mathbf{v}_n^h ds = \mathbf{0}. \tag{15}$$

将式(15)代入式(14)可以得到

$$\oint_{\partial\Omega_1} \mathbf{u}^\# \mathbf{v}_n^h ds = \int_{L_a} \mathbf{u}^\# \mathbf{v}_n^h ds. \tag{16}$$

另外

$$\oint_{\partial\Omega_1} \mathbf{u}_n^\# \mathbf{v}^h ds = \int_{L_1} \mathbf{u}_n^\# \mathbf{v}^h ds + \int_{L_a} \mathbf{u}_n^\# \mathbf{v}^h ds, \quad (17)$$

则综合式(10)、(13)、(16)和(17)可得

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_a} (\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{L}\mathbf{u}^h) N_2 \mathbf{J} \mathbf{v}_2^h d\xi d\eta - \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_a}^{\xi_2} (\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{L}\mathbf{u}^h) N_1 \mathbf{J} \mathbf{v}_1^h d\xi d\eta + \int_{L_a} \mathbf{u}_n^\# \mathbf{v}^h ds - \int_{L_a} \mathbf{u}^\# \mathbf{v}_n^h ds = \mathbf{0}. \quad (18)$$

式(18)即为袁驷等<sup>[8]</sup>提出的单元投影定理的虚位移方程的形式,与袁驷等基于投影定理的推导不同,此处直接利用单元内满足平衡方程的条件导出了式(18)。

另外,FEMOL 单元试探函数的法向导数为

$$\mathbf{v}_n^h = (\mathbf{c}\mathbf{v}_\xi^h + \mathbf{b}\mathbf{v}_\eta^h)/\mathbf{J}_L, \quad \mathbf{c} = (\mathbf{x}_\eta^2 + \mathbf{y}_\eta^2)/\mathbf{J}, \quad \mathbf{b} = (\mathbf{x}_\xi \mathbf{x}_\eta + \mathbf{y}_\xi \mathbf{y}_\eta)/\mathbf{J}. \quad (19)$$

利用式(19)可以求出

$$\int_{L_a} \mathbf{u}^\# \mathbf{v}_n^h ds = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \mathbf{u}^\# \mathbf{c} \mathbf{v}_\xi^h d\eta + \mathbf{b} \mathbf{u}^\# \mathbf{v}^h |_{\eta_1}^{\eta_2} - \int_{\eta_1}^{\eta_2} \mathbf{v}^h \mathbf{b}_\eta \mathbf{u}^\# d\eta - \int_{\eta_1}^{\eta_2} \mathbf{v}^h \mathbf{b} \mathbf{u}_\eta^\# d\eta, \quad (20)$$

上式中,因为  $\mathbf{b} \mathbf{u}^\# \mathbf{v}^h |_{\eta_1}^{\eta_2}$  为端边项,对内点无影响,可以不考虑。另外,略去结线方向的高阶小量

$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \mathbf{v}^h \mathbf{b} \mathbf{u}_\eta^\# d\eta$  项<sup>[8]</sup>。则将式(20)代入式(18)中可以得到

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_a} (\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{L}\mathbf{u}^h) N_2 \mathbf{J} \mathbf{v}_2^h d\xi d\eta - \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_a}^{\xi_2} (\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{L}\mathbf{u}^h) N_1 \mathbf{J} \mathbf{v}_1^h d\xi d\eta + \int_{L_a} \mathbf{u}_n^\# \mathbf{v}^h ds - \int_{\eta_1}^{\eta_2} (\mathbf{u}^\# \mathbf{c} \mathbf{v}_\xi^h)_{L_a} d\eta + \int_{\eta_1}^{\eta_2} (\mathbf{v}^h \mathbf{b}_\eta \mathbf{u}^\#)_{L_a} d\eta = \mathbf{0}. \quad (21)$$

为了由式(21)求出  $\mathbf{u}^\#$  和  $\mathbf{u}_n^\#$  的具体表达式,可以设  $\mathbf{v}^h = (\xi - \xi_a) \mathbf{v}_0^h(\eta)$ , 则  $\mathbf{v}^h |_{\xi_a} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{v}_\xi^h = \mathbf{v}_0^h(\eta)$ ,  $\mathbf{v}_1^h = (\xi_1 - \xi_a) \mathbf{v}_0^h(\eta)$ ,  $\mathbf{v}_2^h = (\xi_2 - \xi_a) \mathbf{v}_0^h(\eta)$ , 考虑  $\mathbf{v}_0^h$  的任意性得

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}^\#)_{L_a} &= \left( \frac{\xi_2 - \xi}{\mathbf{c}} \right)_{L_a} \int_{\xi_1}^{\xi_a} (\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{L}\mathbf{u}^h) N_2 \mathbf{J} d\xi - \\ &\left( \frac{\xi_1 - \xi}{\mathbf{c}} \right)_{L_a} \int_{\xi_a}^{\xi_2} (\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{L}\mathbf{u}^h) N_1 \mathbf{J} d\xi. \end{aligned} \quad (22)$$

### 3 改进位移模式的二维有限元线法超收敛的求解

为推导方便和体现超收敛算法的优势,本文以下推导均以线性元 ( $p = 1$ ) 为例进行,对于常规有限元线法的单元试探函数

$$\mathbf{u}^h(\xi, \eta) = \mathbf{u}_1^h(\eta) N_1(\xi) + \mathbf{u}_2^h(\eta) N_2(\xi), \quad (23)$$

上述试探函数的形函数  $N_1(\xi)$ ,  $N_2(\xi)$  均为一次形函数,  $\mathbf{u}_1^h(\eta)$ ,  $\mathbf{u}_2^h(\eta)$  为待求的单元结线位移向量。

考虑有限元线法单元的几何映射为线性,且形函数为一次形函数,可以求出

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial y} \end{array} \right\} = \frac{1}{\mathbf{J}} \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{2} h_2 \left( -\frac{1}{2} \mathbf{u}_1^h(\eta) + \frac{1}{2} \mathbf{u}_2^h(\eta) \right) \\ \frac{1}{2} h_1 \left( \frac{1}{2} (1 - \xi) \mathbf{u}_1^{h'}(\eta) + \frac{1}{2} (1 + \xi) \mathbf{u}_2^{h'}(\eta) \right) \end{array} \right], \quad (24)$$

上述式中  $h_1$  和  $h_2$  为矩形线性单元的  $x$  方向和  $y$  方向的边长。

$$\mathbf{J} = \mathbf{x}_\xi \mathbf{y}_\eta - \mathbf{x}_\eta \mathbf{y}_\xi, \quad (25)$$

则

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^h}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{u}^h}{\partial y^2} \end{Bmatrix} = \frac{1}{J^2} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{1}{8} h_1^2 ((1 - \xi) \mathbf{u}_1'''(\eta) + (1 + \xi) \mathbf{u}_2'''(\eta)) \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$$(\mathbf{u}^\#)_{L_a} = \left( \bar{f} \frac{h_1^2}{8} (1 - \xi^2) + \frac{h_1^2}{4h_2^2} N^\# \mathbf{u}^{h''} \right), \quad (27)$$

上式中

$$N^\# = \left[ 1 - \frac{1}{3} \xi - \xi^2 + \frac{1}{3} \xi^3, 1 + \frac{1}{3} \xi - \xi^2 - \frac{1}{3} \xi^3 \right],$$

可以验证,  $L\mathbf{u} = L(\mathbf{u}^h + \mathbf{u}^\#) = L\mathbf{u}^h + L\mathbf{u}^\# = \bar{f}$ . 另外, 从  $\mathbf{u}^\#$  的表达式可以看出, 当  $h_1 = 0$  时,  $\mathbf{u}^\# = \mathbf{0}$ , 即  $L(\mathbf{u}^h + \mathbf{u}^\#) = L\mathbf{u}^h$ , 但是实际计算中  $h_1 \neq 0$ , 也就是  $\mathbf{u}^\# \neq \mathbf{0}$ ,  $L(\mathbf{u}^h + \mathbf{u}^\#) \neq L\mathbf{u}^h$ , 即不考虑高阶解对结果影响较大. 另外, 从高阶解表达式可以看出,  $h_1/h_2$  的比值增大时,  $\mathbf{u}^\#$  以  $(h_1/h_2)^2$  的数量级增大. 同一问题  $\mathbf{u}^\#$  的影响随着单元数的增多而增大 (即  $h_2$  的减小), 实际问题计算中单元数是非常多的.

求出高阶解后, 即可以按照有限元线法的常规方法来求解修正后的常微分方程组. 按照前述, 单元上的试探函数  $\mathbf{u}$  在结线上设为未知且连续的  $\eta$  的函数, 而在结线间以 Lagrange 插值近似:

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{p+1} N_i(\xi) \mathbf{u}_i^h + \mathbf{u}^\#. \quad (28)$$

对于  $\sum_{i=1}^{p+1} N_i(\xi) \mathbf{u}_i^h$  部分则由常规的有限元线法推导出来, 接下来只需推导  $\mathbf{u}^\#$  部分. 从有限元线法可知, 结线方向 (称解析方向) 的结线函数由导出的常微分方程组解出, 而另一方向 (称离散方向) 采用有限元插值形函数进行离散, 其解答的精度在解析方向高, 离散方向低, 本文意在提高离散方向的精度; 另从文献 [8] 可知, 虽然  $\mathbf{u}^\#$  不可忽略, 但其沿结线方向的导数  $\mathbf{u}_x^\#$  是高阶小量, 因此可以舍掉该项, 以下只计算  $\mathbf{u}_x^\#$ :

$$\frac{\partial \mathbf{u}^\#}{\partial x} = \left( -\bar{f} \frac{h_1}{2} \xi + \frac{h_1}{2h_2^2} N^{\#'} \mathbf{u}^{h''} \right). \quad (29)$$

将试函数  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^h + \mathbf{u}^\#$  及导数代入泛函, 按照常规有限元线法的推导方法可以得到修正后的常微分方程组为

$$N\mathbf{u}^{h(4)} + K\mathbf{u}^{h''} + G\mathbf{u}^{h'} + H\mathbf{u}^h + L = \mathbf{0}, \quad -1 \leq \eta \leq 1, \quad (30)$$

式中

$$N = - \int_{-1}^1 \frac{h_1^2}{4h_2^4} N^{\#'} N^{\#'} \mathbf{J} d\xi, \quad (31)$$

$$K = A - \int_{-1}^1 \frac{h_1}{h_2^2} \mathbf{y}_\eta N^{\#'} N^{\#'} d\xi, \quad (32)$$

$$G = A' + B - B^T, \quad H = B' - C, \quad (33)$$

$$L = F + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \bar{f} h_1 \xi \mathbf{y}_\eta N' d\xi, \quad (34)$$

而  $A^e, B^e, C^e, A'^e, B'^e, a, b, c, F^e, P_j^e (j = 1, 2)$  为常规有限元线法的表达式, 具体见文献 [11].

而结线端点边界条件的变分形式为(设相邻单元公共端边被映射为相同的  $\eta_j$  值)

$$\delta \mathbf{u}^{h''} \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad (35)$$

$$(\delta \mathbf{u}^h(\eta_j))^T (\mathbf{Q}_j - \eta_j \mathbf{P}_j) = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \quad (36)$$

$$(\delta \mathbf{u}^{h'}(\eta_j))^T \mathbf{M}_j = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \quad (37)$$

$$(\delta \mathbf{u}^{h''}(\eta_j))^T \mathbf{S}_j = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \quad (38)$$

上式中

$$\mathbf{R} = \int_{-1}^1 \bar{\mathbf{f}} \frac{h_1^2}{4h_2^2} \xi \mathbf{N}^{\#'} \mathbf{J} d\xi + \int_{-1}^1 \frac{h_1^2}{4h_2^2} \mathbf{N}^{\#} \bar{\mathbf{f}} \mathbf{J} d\xi + \frac{h_1^2}{4h_2^2} \mathbf{N}^{\#'} \bar{\mathbf{q}}_{L_i} \mathbf{J}_{L_i}, \quad (39)$$

$$\mathbf{Q}_j = \mathbf{A} \mathbf{u}^{h'} + \mathbf{B} \mathbf{u}^h - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{h_1^2}{2h_2^4} \mathbf{N}^{\#'} \mathbf{T} \mathbf{N}^{\#'} \mathbf{u}^{h''} \mathbf{J} d\xi - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{h_1}{h_2^2} \mathbf{y}_\eta \mathbf{N}'^T \mathbf{u}^{h'} \mathbf{N}^{\#'} d\xi, \quad \eta = \eta_j, j = 1, 2, \quad (40)$$

$$\mathbf{M}_j = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{h_1^2}{2h_2^4} \mathbf{N}^{\#'} \mathbf{T} \mathbf{N}^{\#'} \mathbf{u}^{h''} \mathbf{J} d\xi + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{h_1}{h_2^2} \mathbf{y}_\eta \mathbf{N}'^T \mathbf{u}^h \mathbf{N}^{\#'} d\xi, \quad (41)$$

$$\mathbf{S}_j = - \sum_{j=1}^2 \int_{s_j} \frac{h_1^2}{4h_2^2} \mathbf{N}^{\#} \bar{\mathbf{q}}_{s_j} \mathbf{J}_{s_j} d\xi. \quad (42)$$

## 4 算 例

对于本文的模型问题,定解条件取为

$$\begin{cases} -\nabla^2 u = 2, & -1 < x < 1, -1 < y < 1, \\ u = 0, & x = \pm 1, y = \pm 1. \end{cases} \quad (43)$$

问题的物理模型是一受均布荷载的方膜,取 1/4 区域(第一象限),用一个线性单元计算(收敛效果最差情况),网格见图 2.由问题的对称性可知,本问题的精确解在两个方向是相同的.

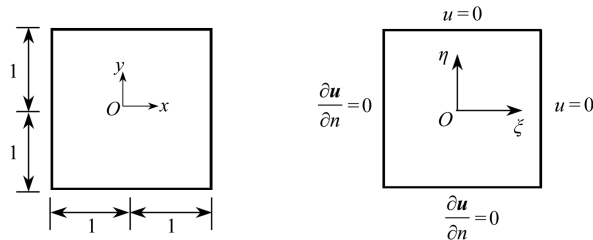


图 2 矩形区域问题

Fig.2 Rectangular domain problem

以下选取  $y = 0$  和  $x = 0$  两个截面,计算出  $y = 0$  上的 FEMOL 解的位移和导数、本文超收敛算法解的位移和导数、精确解的位移和导数、文献[8]的 EEP(element-energy-projection)法解的位移和导数;同时计算出  $x = 0$  上的 FEMOL 解位移和导数、本文超收敛算法解位移和导数.具体计算结果如表 1 至表 4 所示:表 1 给出了线性单元 FEMOL、超收敛算法和 EEP 法  $x$  方向的位移;表 2 给出了线性单元 FEMOL、超收敛算法和 EEP 法  $y$  方向的位移;表 3 给出了线性单元 FEMOL、超收敛算法和 EEP 法  $x$  方向的位移的导数;表 4 给出了线性单元 FEMOL、超收敛算法  $y$  方向的位移的导数.算例数值计算保留 6 位有效数字. $e$  为误差.FEMOL 表示常规有限元线法的结果.

表 1 线性单元  $x$  方向的位移

Table 1 Displacement of linear element in  $x$  direction

position $x$	exact solution	FEMOL	error $e$	super-convergent algorithm	error $e$	EEP method	error $e$
0	0.589 371	0.656 897	0.114 561	0.630 447	0.069 694 1	0.656 897	0.114 573
0.25	0.557 765	0.492 673	0.116 701	0.593 340	0.063 781 0	0.623 882	0.118 540
0.5	0.458 679	0.328 449	0.283 924	0.488 657	0.065 358 0	0.514 117	0.120 864
0.75	0.279 459	0.164 224	0.412 350	0.297 258	0.063 690 7	0.311 517	0.114 714
1	0	0	0	0	0	0	0

表 2 线性单元  $y$  方向的位移

Table 2 Displacement of linear element in  $y$  direction

position $y$	exact solution	FEMOL	error $e$	super-convergent algorithm	error $e$
0	0.589 371	0.656 897	0.114 573	0.630 447	0.069 694 1
0.25	0.557 765	0.624 225	0.119 155	0.591 890	0.061 180 8
0.5	0.458 679	0.519 988	0.133 665	0.473 447	0.032 197 8
0.75	0.279 459	0.324 334	0.160 577	0.271 412	0.028 793 4
1	0	0	0	0	0

表 3 线性单元  $x$  方向的位移导数

Table 3 Displacement derivative of linear element in  $x$  direction

position $x$	exact solution	FEMOL	error $e$	super-convergent algorithm	error $e$	EEP method	error $e$
1	1.350 629	0.656 897	0.513 636	1.426 271	0.056 004 8	1.313 794 0	0.027 272 3
0.75	0.901 879	0.656 897	0.271 635	0.964 554	0.069 493 5	1.038 955 0	0.151 990 0
0.5	0.545 473	0.656 897	0.204 270	0.579 403	0.062 202 3	0.699 785 0	0.282 896 0
0.25	0.255 698	0.656 897	1.569 030	0.270 818	0.059 130 9	0.296 282 3	0.158 721 0
0	0	0.656 897	—	0	0	0	0

表 4 线性单元  $y$  方向的位移导数

Table 4 Displacement derivative of linear element in  $y$  direction

position $y$	exact solution	FEMOL	error $e$	super-convergent algorithm	error $e$
1	1.350 629	0.656 897	0.513 636 0	1.153 615	0.145 868
0.75	0.901 879	0.624 225	0.307 861 0	0.969 347	0.074 808
0.5	0.545 473	0.519 988	0.046 720 4	0.640 535	0.174 275
0.25	0.255 698	0.324 334	0.268 425 0	0.310 569	0.214 592
0	0	0	0	0	0

可以看出：

1) 本文的超收敛算法计算结果(位移、导数)比常规的有限元线法和文献[8]的 EEP 法计算结果的精度要高。

2) 超收敛算法的  $x$  和  $y$  方向位移(导数)精度相当,解决了有限元线法在离散方向的精度较低的问题。

3) 本文改进位移模式的超收敛算法比单纯的后处理 EEP 法的精度有提高,在结线方向,EEP 法不能对精度(位移和导数)进行提高,超收敛算法在  $y$  方向的精度要比 FEMOL(解析方向解)的精度高。

4) 端边超收敛计算之后的切向导数误差大幅降低,收敛阶提高,达到了比 FEMOL 和 EEP 法的结线位移、结线切向导数高一数量级的精度,单元内部结点导数的精度达到了比

FEMOL 和 EEP 法的结线位移、结线切向导数高一数量级的精度。

## 5 结 论

通过上述研究,可以得出下列几点结论:

1) 本文成功地将改进位移模式的超收敛算法推广到了二维有限元线法的问题,对于 Poisson 方程问题,本文的结果收敛精度得到了极大的提高。

2) 本文的超收敛计算方法通过前处理和后处理来计算单元内的位移和应力,其结果比常规的 FEMOL 单元内结果和 EEP 方法有极大改善。而常规超收敛计算方法是一种后处理方法,其基准精度,即结点位移的精度,与常规的有限元相同。

3) 从高阶解表达式分析可知,不考虑特解的作用影响较大。对于找不到精确形函数的问题,本文的算法有明显的效果。

4) 本文提出了一种提高位移法有限元计算精度的新思路,已成功地应用于二维有限元线法 Poisson 方程问题,应该可以推广到二维其它问题。理论上这种思路对于三维问题也应有一定的启示。这为改进位移模式来提高位移法有限元计算精度的方法在一般有限元分析中的应用奠定了良好的基础。

## 参考文献(References):

- [1] Zienkiewicz O C, Zhu J Z. The super-convergent patch recovery and a posteriori error estimates—part I: the recovery technique[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992, **33**(7): 1331-1364.
- [2] 陈传森. 有限元超收敛构造理论[M]. 长沙: 湖南科学技术出版社, 2002. (CHEN Chuan-miao. *Structure Theory of Super Convergence of Finite Elements*[M]. Changsha: Hunan Science and Technology Press, 2002. (in Chinese))
- [3] 袁驷. 从矩阵位移法看有限元应力精度的损失与恢复[J]. 力学与实践, 1998, **20**(4): 1-6. (YUAN Si. The loss and recovery of stress accuracy in FEM as seen from matrix displacement method[J]. *Mechanics and Practice*, 1998, **20**(4): 1-6. (in Chinese))
- [4] 袁驷, 王枚. 一维有限元后处理超收敛解答计算的 EEP 法[J]. 工程力学, 2004, **21**(2): 1-9. (YUAN Si, WANG Mei. An element-energy-projection method for post-computation of super-convergent solutions in one-dimensional FEM[J]. *Engineering Mechanics*, 2004, **21**(2): 1-9. (in Chinese))
- [5] 袁驷, 王枚, 和雪峰. 一维  $C^1$  有限元超收敛解答计算的 EEP 法[J]. 工程力学, 2006, **23**(2): 1-9. (YUAN Si, WANG Mei, HE Xue-feng. Computation of super-convergent solutions in one-dimensional  $C^1$  FEM by EEP method[J]. *Engineering Mechanics*, 2006, **23**(2): 1-9. (in Chinese))
- [6] 王玫, 袁驷. Timoshenko 梁单元超收敛结点应力的 EEP 法计算[J]. 应用数学和力学, 2004, **25**(11): 1124-1134. (WANG Mei, YUAN Si. Computation of super-convergent nodal stresses of Timoshenko beam elements by EEP method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2004, **25**(11): 1124-1134. (in Chinese))
- [7] 袁驷, 林永静. 二阶非自伴两点边值问题 Galerkin 有限元后处理超收敛解答计算的 EEP 法[J]. 计算力学学报, 2007, **24**(2): 142-147. (YUAN Si, LIN Yong-jing. An EEP method for post-computation of super-convergent solutions in one-dimensional Galerkin FEM for second order non-self-adjoint boundary-value problem[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2007, **24**(2): 142-147. (in Chinese))
- [8] 袁驷, 王枚, 王旭. 二维有限元线法超收敛解答计算的 EEP 法[J]. 工程力学, 2007, **24**(1): 1-



10. (YUAN Si, WANG Mei, WANG Xu. An element-energy-projection method for super-convergence solutions in two-dimensional finite element method of lines[J]. *Engineering Mechanics*, 2007, **24**(1): 1-10. (in Chinese))
- [9] 唐义军, 罗建辉. 基于改进位移模式的一维  $C^1$  有限元超收敛算法[J]. 计算力学学报, 2012, **29**(5): 721-725. (TANG Yi-jun, LUO Jian-hui. Algorithm of super-convergent in one-dimensional  $C^1$  FEM based on improved displacement mode[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2012, **29**(5): 721-725. (in Chinese))
- [10] 唐义军, 罗建辉. 基于改进位移模式的一维有限元超收敛算法[J]. 计算力学学报, 2012, **29**(6): 954-959. (TANG Yi-jun, LUO Jian-hui. Algorithm of super-convergent in one-dimensional FEM based on improved displacement mode[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2012, **29**(6): 954-959. (in Chinese))
- [11] 袁驹. 有限元线法[J]. 数值计算与计算机应用, 1992, **13**(4): 252-260. (YUAN Si. The finite element method of lines[J]. *Journal on Numerical Methods and Computer Applications*, 1992, **13**(4): 252-260. (in Chinese))
- [12] LUO Jian-hui, LONG Yu-qiu, LIU Guang-dong. A new orthogonality relationship for orthotropic thin plate theory and its variational principle[J]. *Science in China Series G-Physics and Astronomy*, 2005, **38**(3): 371-380.

## Algorithm of Super-Convergent in Two-Dimensional Finite Element of Lines Based on Improved Displacement Mode

TANG Yi-jun, LUO Jian-hui

(*Institute of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, P. R. China*)

**Abstract:** Algorithm of super-convergent in two-dimensional finite element method of lines (FEMOL) based on improved displacement mode was presented. An explicit analytical formula of super-convergent calculating was derived with the conditions of equilibrium equations strictly met within the element, of which the displacement mode of high-order finite element of lines solution was expressed with that of a conventional finite element of lines solution. The new displacement mode was constructed with the sum of the displacement mode of conventional finite element of lines solution and that of high-order finite element of lines solution. Based on the linear shape function, the improved ordinary differential equations for FEMOL solution were derived in the variation form. The super-convergent formula was used for this algorithm in both the pre-processing and post-processing to improve the accuracy of the solution and reduce the residual of balance equation, with the higher-order trial function added to the original trial function. A calculation example is presented for Poisson's equation of a two-dimensional problem, the convergence accuracy of the displacement and derivative at nodes and in elements is greatly improved.

**Key words:** FEMOL; two-dimensional problem; pre-processing; displacement mode; Poisson's equation; super-convergence