

具有时滞耦合的 n 个 van der Pol 振子 弱共振双 Hopf 分岔*

王万永, 陈丽娟

(河南工程学院 理学院, 郑州 451191)

摘要: 研究了具有时滞耦合的 n 个 van der Pol 振子系统中发生的弱共振双 Hopf 分岔. 应用改进的多尺度方法, 得到了 2:5 共振的复振幅方程. 通过将复振幅设为极坐标形式, 将复振幅方程转化为一个二维的实振幅系统. 通过研究实振幅方程的平衡点及其稳定性, 对系统在 2:5 共振点附近的动力学行为进行了开折和分类. 得到了一些有趣的动力学现象, 如振幅死区、周期解和双稳态解等, 相应的数值模拟验证了理论结果的正确性.

关键词: 双 Hopf 分岔; 共振; van der Pol 振子; 多尺度方法

中图分类号: O322; O175.1 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.07.012

引 言

近来大量耦合振子的集体动力学行为成为一个比较热门的研究课题, 越来越多的实验的^[1-2]和数学的^[3-4]研究结果发表. 耦合振子系统提供了研究物理、化学和生物科学等学科^[5-12]中存在的集体动力学一个强有力的工具. 例如, 大量耦合的 van der Pol 振子常常被用来研究工程、电子生物等方面的问题. 因此, 由耦合 van der Pol 振子之间的相互作用所引起的动力学行为受到越来越多的学者关注. 例如, Zhang 等^[13]和 Song 等^[14]分别研究了具有时滞耦合的 3 个 van der Pol 振子系统. Barrón 等^[15]研究了 4 个耦合 van der Pol 振子系统的同步问题. 而 Hirano 等^[16]则研究了耦合 van der Pol 振子系统中极限环的存在性. 近来, 人们对 van der Pol 振子系统进行了进一步地研究. Kovacic 等^[17]研究了一个广义的 van der Pol 型振子极限环的性质. Zhang 等^[18]研究了一个具有变时滞耦合的随机耦合 van der Pol 振子网络, 并利用图论和 Lyapunov 函数法对该网络的渐近边界进行了研究. Xiao 等^[19]对一个分数阶 van der Pol 振子进行了研究. 在本文中, 我们将研究一个具有多个 van der Pol 振子组成的系统中发生的弱共振双 Hopf 分岔.

由于信号有限的传播速度, 化学反应的反应时间等因素的存在, 在耦合系统中不可避免地存在时间滞后, 即时滞. 因此, 时滞在耦合系统中是普遍存在的, 并对系统的动力学行为有着重要的影响. 一些学者已经开始研究时滞对耦合系统集体动力学行为的重要影响^[20-22]. 因此, 在耦合 van der Pol 振子系统中引入时滞是非常有必要的.

* 收稿日期: 2013-04-07; 修订日期: 2013-05-25

作者简介: 王万永(1982—), 男, 河南南阳人, 讲师, 博士(通讯作者. E-mail: wangwanyong630@163.com).

本文将以时滞和耦合强度作为分岔参数,应用多尺度方法研究多个耦合 van der Pol 振子系统中发生的弱共振双 Hopf 分岔,得到其振幅方程,并对其共振点附近的动力学行为进行开折和分类.

1 共振点

在本文中,研究一个有 n 个 van der Pol 振子组成的系统,具有如下方程:

$$\begin{cases} \ddot{u}_1(t) + u_1(t) - (\alpha - u_1^2(t))\dot{u}_1(t) = A\dot{u}_2(t - \tau), \\ \ddot{u}_2(t) + u_2(t) - (\alpha - u_2^2(t))\dot{u}_2(t) = A\dot{u}_3(t - \tau), \\ \vdots \\ \ddot{u}_{n-1}(t) + u_{n-1}(t) - (\alpha - u_{n-1}^2(t))\dot{u}_{n-1}(t) = A\dot{u}_n(t - \tau), \\ \ddot{u}_n(t) + u_n(t) - (\alpha - u_n^2(t))\dot{u}_n(t) = A\dot{u}_1(t - \tau), \end{cases} \quad (1)$$

其中, $n \geq 1$ 为振子的个数, A 为耦合强度, τ 为耦合信号由一个振子传递到另一个振子所花费的时间,即时滞.

为了便于研究,设 $u_i(t) = x_{2i-1}(t)$, $\dot{u}_i(t) = x_{2i}(t)$, 则系统(1)可写为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2, \dot{x}_2(t) = -x_1 + \alpha x_2 + Ax_4(t - \tau) - x_1^2 x_2, \\ \dot{x}_3(t) = x_4, \dot{x}_4(t) = -x_3 + \alpha x_4 + Ax_6(t - \tau) - x_3^2 x_4, \\ \vdots \\ \dot{x}_{2n-3}(t) = x_{2n-2}, \dot{x}_{2n-2}(t) = -x_{2n-3} + \alpha x_{2n-2} + Ax_{2n}(t - \tau) - x_{2n-3}^2 x_{2n-2}, \\ \dot{x}_{2n-1}(t) = x_{2n}, \dot{x}_{2n}(t) = -x_{2n-1} + \alpha x_{2n} + Ax_2(t - \tau) - x_{2n-1}^2 x_{2n}. \end{cases} \quad (2)$$

显然,原点 $x_j = 0 (j = 1, 2, \dots, 2n)$ 是系统(2)的一个平衡点. 系统(2)在该平衡点处的线性化系统的特征方程为

$$(\lambda^2 - \alpha\lambda + 1)^n = (A\lambda e^{-\lambda\tau})^n. \quad (3)$$

如果特征方程(3)有两对纯虚根 $\pm i\omega_1$ 和 $\pm i\omega_2$, 则系统可能发生双 Hopf 分岔,此时,可得

$$(-\omega_1^2 - i\alpha\omega_1 + 1)^n = (Ai\omega_1 e^{-i\omega_1\tau})^n, \quad (4)$$

$$(-\omega_2^2 - i\alpha\omega_2 + 1)^n = (Ai\omega_2 e^{-i\omega_2\tau})^n. \quad (5)$$

当

$$\omega_1 : \omega_2 = k_1 : k_2 \quad (6)$$

时,系统可能发生 $k_1 : k_2$ 的双 Hopf 分岔. 此时,由方程(4) ~ (6) 以及三角函数之间的关系,我们可以通过数值方法解出系统的 3 个临界参数值(见表 1).

表 1 当 n 取不同值时的一些弱共振双 Hopf 分岔点

Table 1 Some double Hopf bifurcation points with different n values

n	$\omega_1 : \omega_2$	α_c	A_c	τ_c	ω_1
2	2 : 3	-0.132 648	0.429 258	1.539 060	0.816 497
3	3 : 5	-0.516 398	0.730 297	1.013 940	0.774 597
5	2 : 5	-2.527 760	2.699 920	0.567 691	0.632 456
7	2 : 5	-3.617 740	3.740 060	0.405 493	0.632 456
9	3 : 7	-4.106 540	4.198 280	0.319 924	0.654 654

例如,当 $n = 7, k_1 : k_2 = 2 : 5$ 时,可解得系统(2)的 3 个临界参数的值为 $\alpha_c = -3.617 74, A_c = 3.740 06, \tau_c = 0.405 493$, 两个频率为 $\omega_1 = 0.632 456, \omega_2 = 1.581 14$. 为了验证在临界参数值处,系统是否具有两对比值为 2 : 5 的纯虚根,而且其它的特征根具有负实部,我们应用动力学

软件 DDE-BifTool 进行数值分析,得到系统最大的若干个特征值,如图 1 所示.

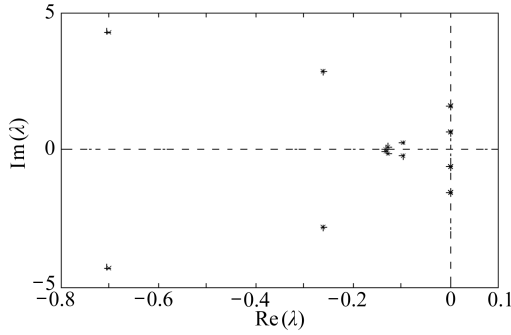


图 1 系统(2)在共振点 $\alpha_c = -3.61774$, $A_c = 3.74006$, $\tau_c = 0.405493$ 处的特征值分布

Fig.1 Distribution of eigenvalues of system(2) at the resonant point of

$$\alpha_c = -3.61774, A_c = 3.74006, \tau_c = 0.405493$$

2 振幅方程

在本节中,将应用多尺度方法计算系统在平衡点处 2:5 共振双 Hopf 分岔的规范型方程并研究分岔点附近的动力学行为.

在文献[23]中,将多尺度方法进行了推广,研究了时滞耦合系统中发生的 1:3 共振双 Hopf 分岔.该方法同样可以研究时滞诱导的弱共振双 Hopf 分岔.

设 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{13}, x_{14})^T$, 则可将式(2)写为向量形式的方程组

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\tau, \mu). \quad (7)$$

然后,由多尺度方法,设方程(7)的解具有如下形式:

$$\mathbf{x}(t) = \varepsilon \mathbf{x}_1(T_0, T_2) + \varepsilon^2 \mathbf{x}_2(T_0, T_2) + \varepsilon^3 \mathbf{x}_3(T_0, T_2) + O(\varepsilon^4). \quad (8)$$

首先按照如下形式摄动参数:

$$\alpha = \alpha_c + \varepsilon^2 \alpha_\varepsilon, A = A_c + \varepsilon^2 A_\varepsilon, \tau = \tau_c + \varepsilon^2 \tau_\varepsilon, \quad (9)$$

对时滞项进行 Taylor 展开,可得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t - \tau) &= \varepsilon \mathbf{x}_1(T_0 - \tau_c, T_2) + \varepsilon^2 \mathbf{x}_2(T_0 - \tau_c, T_2) + \\ &\varepsilon^3 [-\tau_\varepsilon D_0 \mathbf{x}_1(T_0 - \tau_c, T_2) - \tau_c D_2 \mathbf{x}_1(T_0 - \tau_c, T_2) + \\ &\mathbf{x}_3(T_0 - \tau_c, T_2)] + O(\varepsilon^4). \end{aligned} \quad (10)$$

将方程(8)~(10)代入方程(7), Taylor 展开 $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\tau, \mu)$, 分别令方程两端 ε 的各次幂的系数相等,可以得到如下的摄动方程:

$$D_0 \mathbf{x}_1 - \mathbf{F}_x^0 \mathbf{x}_1 - \mathbf{F}_{x_\tau}^0 \mathbf{x}_{1\tau} = \mathbf{0}, \quad (11)$$

$$D_0 \mathbf{x}_2 - \mathbf{F}_x^0 \mathbf{x}_2 - \mathbf{F}_{x_\tau}^0 \mathbf{x}_{2\tau} = \frac{1}{2} \mathbf{F}_{xx}^0 \mathbf{x}_1^2 + \mathbf{F}_{xx_\tau}^0 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_{1\tau} + \frac{1}{2} \mathbf{F}_{x_\tau x_\tau}^0 \mathbf{x}_{1\tau}^2, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} D_0 \mathbf{x}_3 - \mathbf{F}_x^0 \mathbf{x}_3 - \mathbf{F}_{x_\tau}^0 \mathbf{x}_{3\tau} = \\ \mathbf{F}_{x\mu}^0 \mathbf{x}_1 \mu_\varepsilon + \frac{1}{6} \mathbf{F}_{xxx}^0 \mathbf{x}_1^3 + \mathbf{F}_{xx}^0 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 + \mathbf{F}_{x_\tau \mu_\varepsilon}^0 \mathbf{x}_{1\tau} \mu_\varepsilon + \frac{1}{2} \mathbf{F}_{xxx_\tau}^0 \mathbf{x}_1^2 \mathbf{x}_{1\tau} + \\ \frac{1}{2} \mathbf{F}_{xx_\tau}^0 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_{1\tau}^2 + \mathbf{F}_{xx_\tau}^0 \mathbf{x}_{1\tau} \mathbf{x}_2 + \frac{1}{6} \mathbf{F}_{x_\tau x_\tau x_\tau}^0 \mathbf{x}_{1\tau}^3 + \mathbf{F}_{xx_\tau}^0 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_{2\tau} + \mathbf{F}_{x_\tau x_\tau}^0 \mathbf{x}_{1\tau} \mathbf{x}_{2\tau} - \\ \tau_c \mathbf{F}_{x_\tau}^0 D_2 \mathbf{x}_{1\tau} - \tau_\varepsilon \mathbf{F}_{x_\tau}^0 D_0 \mathbf{x}_{1\tau} - D_2 \mathbf{x}_1. \end{aligned} \quad (13)$$

因为系统(2)不含平方项,方程(12)的右端项实际上为 0,因此,方程(12)可以省略.

方程(11)的解可以写为如下形式:

$$\mathbf{x}_1 = A_1(T_2)\mathbf{p}_1 e^{i\omega_1 T_0} + A_2(T_2)\mathbf{p}_2 e^{i\omega_2 T_0} + \text{c. c.}, \quad (14)$$

其中, $A_j(j=1,2)$ 是复振幅, \mathbf{p}_j 是相应于特征值 $i\omega_j$ 的右特征向量,

$$\mathbf{p}_1 = (1, i\omega_1, 1, i\omega_1, \dots, 1, i\omega_1),$$

$$\mathbf{p}_2 = \left(1, i\omega_2, \frac{s_1}{s_4}, i\omega_2 \left(\frac{s_1}{s_4}\right), \dots, \left(\frac{s_1}{s_4}\right)^6, i\omega_2 \left(\frac{s_1}{s_4}\right)^6\right),$$

其中, $s_1 = \cos[\omega_1 \tau_c] + i \sin[\omega_1 \tau_c]$ 和 $s_4 = \cos[\omega_2 \tau_c] - i \sin[\omega_2 \tau_c]$, c. c. 表示前面所有项的共轭.

将方程(14)代入方程(13), 并且吸收参数 $\varepsilon^{[24]}$, 可得下面的复振幅方程:

$$\begin{cases} \dot{A}_1 = C_{1\mu}\mu_\varepsilon A_1 + C_{11\bar{1}}A_1^2\bar{A}_1 + C_{12\bar{2}}A_1A_2\bar{A}_2, \\ \dot{A}_2 = C_{2\mu}\mu_\varepsilon A_2 + C_{1\bar{1}2}A_1\bar{A}_1A_2 + C_{22\bar{2}}A_2^2\bar{A}_2, \end{cases} \quad (15)$$

其中, 系数 $C_{j\mu}$ 和 C_{ijk} 为复系数, 其值如下:

$$C_{1\mu} = (0.197\ 516 - 0.035\ 770\ 9i)A_\varepsilon + (0.200\ 13 + 0.015\ 499\ 8i)\alpha_\varepsilon - (0.084\ 613\ 4 + 0.467\ 208i)\tau_\varepsilon,$$

$$C_{2\mu} = (0.343\ 08 + 0.042\ 44i)A_\varepsilon + (0.342\ 632 - 0.045\ 973\ 7i)\alpha_\varepsilon + (0.250\ 971 - 2.028\ 86i)\tau_\varepsilon,$$

$$C_{11\bar{1}} = -0.033\ 354\ 9 - 0.002\ 583\ 29i, \quad C_{12\bar{2}} = -0.066\ 709\ 9 - 0.005\ 166\ 58i,$$

$$C_{1\bar{1}2} = -0.114\ 211 + 0.015\ 324\ 6i, \quad C_{22\bar{2}} = -0.057\ 105\ 3 + 0.007\ 662\ 28i.$$

设

$$A_1 = \frac{1}{2}r_1 e^{i\theta_1}, \quad A_2 = \frac{1}{2}r_2 e^{i\theta_2}, \quad (16)$$

将方程(16)代入复振幅方程(15), 分离实部、虚部, 可以得到两个与相位变量解耦的振幅方程, 即规范型方程

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = (0.197\ 516A_\varepsilon + 0.200\ 13\alpha_\varepsilon - 0.084\ 613\ 4\tau_\varepsilon)r_1 - 0.008\ 338\ 73r_1^3 - 0.016\ 677\ 5r_1r_2^2, \\ \dot{r}_2 = (0.343\ 087A_\varepsilon + 0.342\ 632\alpha_\varepsilon + 0.250\ 971\tau_\varepsilon)r_2 - 0.028\ 552\ 6r_1^2r_2 - 0.014\ 276\ 3r_2^3. \end{cases} \quad (17)$$

令 $\dot{r}_1 = 0$ 和 $\dot{r}_2 = 0$, 可以得到振幅方程(17)的平衡点如下:

$$E_0(0, 0), \quad E_1(\sqrt{23.686\ 6A_\varepsilon + 24\alpha_\varepsilon - 10.147\tau_\varepsilon}, 0),$$

$$E_2(0, \sqrt{24.031\ 9A_\varepsilon + 24\alpha_\varepsilon + 17.579\ 5\tau_\varepsilon}),$$

$$E_3(\sqrt{8.125\ 76A_\varepsilon + 8\alpha_\varepsilon + 15.102\tau_\varepsilon}, \sqrt{7.780\ 4A_\varepsilon + 8\alpha_\varepsilon - 12.624\ 5\tau_\varepsilon}),$$

其中, 相应于原系统的状态变量 \mathbf{x} 的 Hopf 分岔是振幅变量 r_1, r_2 的静态分岔.

3 动力学分析

由于弱共振是余维二的分岔, 因此, 在振幅方程(17)中, 虽然含有 3 个参数, 但是只能选择其中的两个作为分岔参数. 固定参数 $\alpha = \alpha_c$ (即令 $\alpha_\varepsilon = 0$), 选择我们比较关心的时滞 τ 和耦合强度 A 作为分岔参数, 对系统在分岔点附近的动力学行为进行分类分析. 通过对振幅方程的平衡点及其稳定性的分析, 我们可以将平面 τ - A 分为 6 个区域, 在每个区域内, 平衡点的个数和稳定性都不相同, 其拓扑结构如图 2 (并参见图 3) 的 I ~ VI 所示. 在区域 I 内, 系统有一

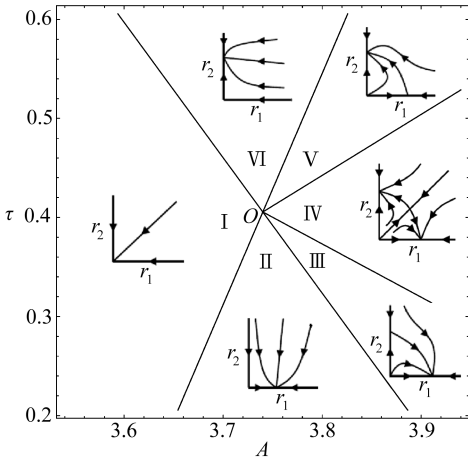
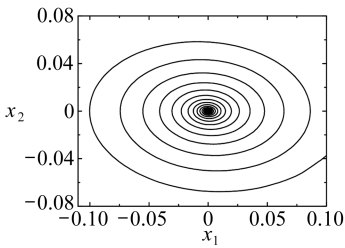


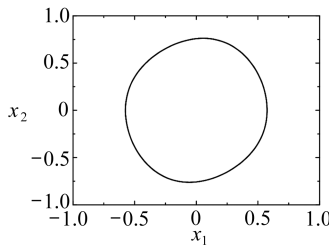
图2 当 $\alpha_c = -3.61774$ 时,系统(14)在参数平面 τ - A 内的动力学行为分类图

Fig.2 Classification of intrinsic dynamic behavior of system (14) in the parameter plane of τ - A with $\alpha_c = -3.61774$

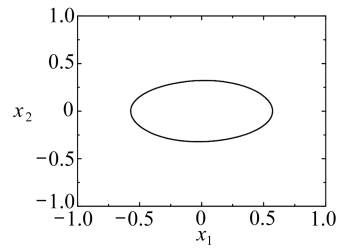
个稳定的平凡平衡点 $E_0(0,0)$,因此区域 I 就是所谓的死区,在此参数范围内振子的周期振动由于时滞反馈的作用而被抑制了.随着 τ, A 的变化,当参数进入区域 II 时,平凡平衡点失稳,一个稳定的平衡点 $E_1(r_{10},0)$ 出现, $E_1(r_{10},0)$ 相应于原系统频率为 ω_1 的周期解.在区域 III 中,平衡点 $E_0(0,0)$ 和 $E_1(r_{10},0)$ 仍然存在,平衡点 $E_1(r_{10},0)$ 变为不稳定的,同时一个不稳定的平衡点 $E_2(0, r_{20})$ 出现,该平衡点相应于原系统频率为 ω_2 的周期解.当参数落在区域 IV 中,一个不稳定的双模态平衡点 $E_3(r_{12}, r_{22})$ 出现,平衡点 $E_0(0,0)$ 和 $E_1(r_{10}, 0)$ 保持稳定性不变,单模态解 $E_2(0, r_{20})$ 变为稳定平衡点.当参数变化到区域 V 时,双模态解 $E_3(r_{12}, r_{22})$ 消失,平衡点 $E_0(0, r_{20})$ 仍是稳定平衡点,而平衡点 $E_1(r_{10}, 0)$ 则变为不稳定的平衡点.在区域 VI 中,平衡点 $E_1(r_{10}, 0)$ 消失,平衡点 $E_2(0, r_{20})$ 保持其稳定性.



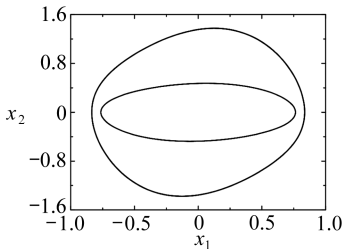
(a) (A, τ) 取在区域 I 内时, 稳定平衡点的相图
(a) Phase portrait of solution in region I



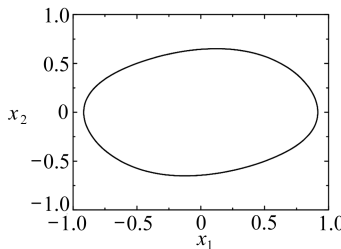
(b) (A, τ) 取在区域 II 内时,周期解的相图
(b) Phase portrait of periodic solution in region II



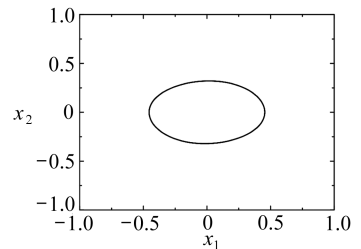
(c) (A, τ) 取在区域 III 内时,周期解的相图
(c) Phase portrait of periodic solution in region III



(d) (A, τ) 取在区域 IV 内时, 双稳态解的相图
(d) Phase portrait of bistability in region IV



(e) (A, τ) 取在区域 V 内时,周期解的相图
(e) Phase portrait of periodic solution in region V



(f) (A, τ) 取在区域 VI 内时,周期解的相图
(f) Phase portrait of periodic solution in region VI

图3 系统(14)在图2中相应区域内的相图

Fig.3 Phase portraits of system (14) in different regions

4 结 论

在本文中,我们研究了一个具有 7 个耦合 van der Pol 振子组成的时滞系统中发生的弱共振双 Hopf 分岔,通过应用多尺度方法,得到了 2:5 弱共振的规范型方程.通过研究其规范型方程,我们对系统在共振点附近的动力学行为进行了分类,相应的数值模拟验证了结果的正确性.结果显示,在多个具有时滞耦合的 van der Pol 振子系统中,其弱共振点附近存在振幅死区、周期解和双稳态等动力学现象,同时本文也为研究大量耦合振子的集体动力学行为提供了可参考的方法和结果.

致谢 本文工作受到河南工程学院博士基金项目(D2012021)的资助,特此感谢.

参考文献(References):

- [1] Brailove A A, Linsay P S, Koster G. An experimental study of a population of relaxation oscillators with a phase-repelling mean-field coupling[J]. *International Journal of Bifurcation Chaos*, 1996, **6**(2): 1211-1253.
- [2] Ramana Reddy D V, Sen A, Johnston G L. Experimental evidence of time delay induced death in coupled limit cycle oscillators[J]. *Physical Review Letters*, 2000, **85**(16): 3381-3384.
- [3] Satoh K. Computer experiments on the co-operative behavior of a network of interacting nonlinear oscillators[J]. *Journal of Physical Society of Japan*, 1989, **58**: 2010-2021.
- [4] Hadley P, Beasley M R, Wiesenfeld K. Phase locking of Josephson-junction series arrays[J]. *Physical Review B*, 1988, **38**(13): 8712-8719.
- [5] Nakajima K, Sawada Y. Experimental studies on the weak coupling of oscillatory chemical reaction systems[J]. *Journal of Chemical Physics*, 1980, **72**(4): 2231-2234.
- [6] Bar-Eli K. On the stability of coupled chemical oscillators[J]. *Physica D*, 1985, **14**(2): 242-252.
- [7] Shiino M, Frankowicz M. Synchronization of infinitely many coupled limit-cycle oscillators [J]. *Physical Letter A*, 1989, **136**(3): 103-108.
- [8] Aronson D G, Ermentrout G B, Koppel N. Amplitude response of coupled oscillators[J]. *Physica D*, 1990, **41**(3): 403-449.
- [9] Mirollo R E, Strogatz S H. Amplitudes death in an array of limit-cycle oscillators[J]. *Journal of Statistical Physics*, 1990, **60**(1/2): 245-262.
- [10] Collins J J, Stewart I N. Coupled nonlinear oscillators and the symmetries of animal gaits[J]. *Journal of Nonlinear Science*, 1993, **3**(1): 349-392.
- [11] Daido H. Onset of cooperative entrainment in limit-cycle oscillators with uniform all-to-all interactions: bifurcation of the order function[J]. *Physica D*, 1996, **91**(1/2): 24-66.
- [12] Pecora L M. Synchronization conditions and desynchronizing patterns in coupled limit-cycle and chaotic systems[J]. *Physical Review E*, 1998, **58**(1): 347-360.
- [13] Zhang C R, Zheng B D, Wang L C. Multiple Hopf bifurcation of three coupled van der Pol oscillators with delay[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2011, **217**(1): 7155-7166.
- [14] Song Y L, Xu J, Zhang T H. Bifurcation, amplitude death and oscillation patterns in a system of three coupled van der Pol oscillators with diffusively delayed velocity coupling[J]. *Chaos*, 2011, **21**(2): 023111.
- [15] Barrón M A, Sen M. Synchronization of four coupled van der Pol oscillators[J]. *Nonlinear*

- Dynamics*, 2009, **56**(4):357-367.
- [16] Hirano N, Rybicki S. Existence of limit cycles for coupled van der Pol equations[J]. *Journal of Differential Equations*, 2003, **195**(1):194-209.
- [17] Kovacic I, Mickens R E. A generalized van der Pol type oscillator: investigation of the properties of its limit cycle[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2012, **55**(9): 645-653.
- [18] Zhang C M, Li W X, Wang K. Boundedness for network of stochastic coupled van der Pol oscillators with time-varying delayed coupling[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, **37**(7): 5394-5402.
- [19] Xiao M, Zheng W X, Cao J D. Approximate expressions of a fractional order van der Pol oscillator by the residue harmonic balance method[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2013, **89**(1): 1-12.
- [20] Niebur E, Schuster H G, Kammen D. Collective frequencies and metastability in networks of limit-cycle oscillators with time delay[J]. *Physical Review Letters*, 1991, **67**(20): 2753-2756.
- [21] Nakamura Y, Tominaga F, Munakata T. Clustering behavior of time-delayed nearest-neighbor coupled oscillators[J]. *Physical Review E*, 1994, **49**(6): 4849-4856.
- [22] Seunghwan K, Seon H, Ryu C S. Multistability in coupled oscillator systems with time delay [J]. *Physical Review Letters*, 1997, **79**(15): 2911-2914.
- [23] Wang W Y, Xu J. Multiple scales analysis for double Hopf bifurcation with 1 : 3 resonance [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2011, **66**(1/2): 39-51.
- [24] Luongo A, Paolone A, Di Egidio A. Multiple timescales analysis for 1 : 2 and 1 : 3 resonant Hopf bifurcations[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2003, **34**(3/4): 269-291.

Weak Resonant Double Hopf Bifurcation of n van der Pol Oscillators With Delay Coupling

WANG Wan-yong, CHEN Li-juan

(College of Science, Henan Institute of Engineering,
Zhengzhou 451191, P. R. China)

Abstract: Weak resonant double Hopf bifurcation of n van der Pol oscillators with delay coupling was investigated. With an extended method of multiple scales, the complex amplitude equations were obtained. With the complex amplitudes expressed in a polar form, the complex amplitude equations were reduced to a two dimensional real amplitude system. The equilibria and their stability of the real amplitude equations were studied, and the dynamics around 2 : 5 resonant point unfolded and classified. Some interesting phenomena are found, such as amplitude death, periodic solution and bistability, etc. Validity of the analytical results is proved by their consistency with numerical simulations.

Key words: double Hopf bifurcation; resonance; van der Pol oscillator; method of multiple scales