

一种新的计算 Timoshenko 梁 截面剪切系数的方法*

王 乐, 王 亮

(中国运载火箭技术研究院,北京 100076)

摘要: Timoshenko 梁理论中考虑了截面剪切变形的影响,推导了一种新的计算剪切系数的方法. 首先采用悬臂梁纯弯曲变形条件下截面剪应力分布的精确解,基于能量原理得到了各种梁截面剪切系数新的表达式,然后推导了弯扭耦合变形条件下截面剪应力分布的精确解,进一步获得了该条件下截面的剪切系数. 结果表明,悬臂梁端面作用力偏离截面的弯曲中心将使剪切系数变小,通过与 Cowper 计算结果的对比发现结果偏小,其原因是 Cowper 没有考虑与外力垂直的剪应力的影响,因此新的计算结果更优越.

关键词: Timoshenko 梁理论; 剪切系数; 弯曲; 扭转; 剪应力

中图分类号: O343.2 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.07.011

引 言

Timoshenko^[1]首次在梁模型中引入了剪切变形,其梁模型中定义了剪切系数用于描述剪应力沿梁截面的变化. 剪切系数的计算有多种观点及计算公式,不同的学者给出了不同的表达式.

胡海昌等^[2-3]指出,在 Timoshenko 梁模型中假定截面剪应变为常数,但剪应力不是常数,因此与 Hooke 定律相矛盾. Cowper 通过重新定义梁的挠度和转角解决了这个矛盾,他利用 Love^[4]关于悬臂梁剪应力分布的解析解得到了剪切系数的解析式^[5]. Stephen 采用 Kennard 和 Leibowitz 的方法,对 Cowper 提出的理论进行了完善,采用 Love 的解计算了重力作用下 Timoshenko 梁的剪切系数^[6]. 牡丹旭等采用子空间变分原理按照 Cowper 的定义计算了梁的剪切系数,结果表明,子空间变分原理适于求解复杂截面梁的剪切系数^[7]. Hutchinson 利用 Love 关于悬臂梁应力分布的解析解研究了悬臂梁自由振动状态下的剪切系数,但其计算结果未得到试验验证^[8]. Hull 给出了 Mindlin 板的剪切系数精确表达式,发现板的剪切系数与板的固有频率和板的形状参数等因素有关^[9],Kawashima 使用 Cowper 对剪切系数的定义推导了材料为各向异性体的石英水晶矩形截面梁的剪切系数,并证明了剪切系数与材料的刚度、截面的形状等因素的关系^[10]. Puchegger 等采用 Hutchinson 的梁理论推导了各向异性材料的截面剪切系数并进行了数值仿真验证^[11]. Omidvar 推导了正交各向异性分层复合材料薄壁梁截面的剪切系数,

* 收稿日期: 2013-03-13; 修订日期: 2013-05-23

作者简介: 王乐(1984—),男,湖北荆州人,工程师,硕士(通讯作者. E-mail: aabeau@163.com).

并给出了常用薄壁梁截面剪切系数的计算公式,当计算各向同性材料时他的计算结果与 Cowper 相同^[12].

虽然 Cowper 对 Timoshenko 梁截面挠度和转角的定义解决了剪应力和剪应变不满足 Hooke 定律的矛盾,然而 Cowper 的定义仍然存在一定的局限性,且 Love 的解不是精确解.本文基于能量原理,采用悬臂梁剪应力分布的精确解计算了梁截面的剪切系数,并考虑了外力偏心对剪切系数的影响.

1 新的计算截面剪切系数的表达式

1.1 基于能量原理的剪切系数计算方法

本文采用文献[2]提出的基于能量原理的剪切系数计算方法,设悬臂梁材料为各向同性材料(受力图见图1),长为 L ,坐标系原点位于悬臂梁的底面,将悬臂梁的形心轴作为 z 轴,以截面的惯性主轴为 x 轴和 y 轴.设外力只作用于悬臂梁的一端,沿 x 轴方向,在侧面上不受任何外力的作用,忽略悬臂梁体力.

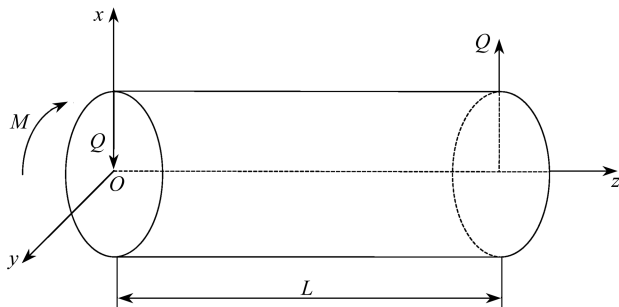


图1 悬臂梁受力图

Fig.1 Force fig. of a cantilever beam

设剪力 Q 在梁截面内产生的剪应力为 τ_{zx} 和 τ_{zy} , C 是截面的剪切刚度,定义为

$$C = kGA, \quad (1)$$

上式中 k 是截面的剪切系数, G 是材料的剪切弹性模量, A 是截面面积,则根据能量守恒原理可得截面的剪切系数表示为

$$\frac{1}{k} = A \iint \left[\left(\frac{\tau_{zy}}{Q} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{zx}}{Q} \right)^2 \right] dx dy. \quad (2)$$

1.2 不同形状截面的剪切系数计算

1.2.1 纯弯曲变形条件下的剪切系数

当外力 Q 通过截面的弯曲中心时,梁将发生纯弯曲变形,其截面剪应力分布见文献[13].

1.2.1.1 圆形截面

对于圆形截面,设截面边界的方程为

$$x^2 + y^2 = a^2. \quad (3)$$

将文献[13]给出的圆形截面剪应力分布代入式(2),可得其截面剪切系数为

$$k = \frac{6(1+\nu)^2}{8\nu^2 + 14\nu + 7}. \quad (4)$$

1.2.1.2 椭圆形截面

对于椭圆形截面,设截面边界的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (5)$$

将文献[13]给出的椭圆形截面剪应力分布代入式(2),令 $m = b/a$, 可得其截面剪切系数为

$$k = \frac{3(1+\nu)^2(3+m^2)^2}{2[\nu^2 m^6 + m^4(5\nu^2 + 4\nu + 2) + 11(1+\nu)^2 m^2 + 15(1+\nu)^2]}. \quad (6)$$

1.2.1.3 环形截面

对于环形截面,设其外边界方程为 $x^2 + y^2 = a^2$,内边界方程为 $x^2 + y^2 = b^2$,将文献[13]给出的环形截面剪应力分布代入式(2),令 $m = b/a$, 可得其截面剪切系数为

$$k = \frac{24(1+m^2)^2(1+\nu)^2}{(m^2+1)^2(32\nu^2+56\nu+28)+m^2(76\nu^2+196\nu+107)}. \quad (7)$$

1.2.1.4 薄壁圆环

令式(7)中 $m = 1$ 可得薄壁圆环截面剪切系数

$$k = \frac{96(1+\nu)^2}{204\nu^2+420\nu+219}. \quad (8)$$

1.2.2 弯扭耦合变形条件下的剪切系数

当外力偏离截面弯曲中心时,梁将发生弯曲和扭转耦合变形,其截面剪应力分布与纯弯曲相比将发生变化,需要重新求解,设偏心距为 e , 则梁截面的扭矩为

$$M_z = -Qe. \quad (9)$$

1.2.2.1 圆形截面

弹性力学的应力平衡方程和以应力表示的变形协调方程见式(10)和式(11):

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} (1+\nu) \nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = 0, (1+\nu) \nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = 0, \\ (1+\nu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = 0, (1+\nu) \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} = 0, \\ (1+\nu) \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} = 0, (1+\nu) \nabla^2 \tau_{zx} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial x} = 0, \\ \Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z. \end{cases} \quad (11)$$

在柱体周围的侧面上,边界条件见式(12),其中在侧面上 $\cos(N, z) = 0$,

$$\begin{cases} \sigma_x \cos(N, x) + \tau_{xy} \cos(N, y) + \tau_{xz} \cos(N, z) = 0, \\ \tau_{yx} \cos(N, x) + \sigma_y \cos(N, y) + \tau_{yz} \cos(N, z) = 0, \\ \tau_{zx} \cos(N, x) + \tau_{zy} \cos(N, y) + \sigma_z \cos(N, z) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

根据 Saint-Venant 原理,可以将悬臂梁两端的外力合成到端面的弯心上,得到合成力 Q 和合成力矩 M_z , 忽略构成合力和合力矩的具体分布,得到悬臂梁的端面边界条件见式(13):

$$\begin{cases} Q = \iint_R \tau_{zx} dx dy, \quad 0 = \iint_R \tau_{zy} dx dy, \\ 0 = \iint_R \sigma_z dx dy, \quad 0 = \iint_R y \sigma_z dx dy, \\ Q(L-z) = - \iint_R x \sigma_z dx dy, \quad M_z = \iint_R (x \tau_{yz} - y \tau_{zx}) dx dy. \end{cases} \quad (13)$$

式(11)至式(13)需要求解二阶偏微分方程,直接求解比较困难,因此本文采用试凑法.假设

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \quad (14)$$

沿 z 轴任一截面的弯矩为

$$M_y = Q(L-z). \quad (15)$$

假设

$$\sigma_z = - (L-z) \frac{Q}{I_y} x, \quad (16)$$

上式中 I_y 是截面绕 y 轴的惯性矩,将 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 和 σ_z 代入式(10)和式(11),得到

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{Q}{I_y} x = 0, \quad (17)$$

$$\nabla^2 \tau_{zx} + \frac{1}{1+\nu} \frac{Q}{I_y} = 0, \quad \nabla^2 \tau_{zy} = 0. \quad (18)$$

引入应力函数 ϕ , 使之满足

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{Q}{2I_y} x^2, \quad \tau_{zy} = - \frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (19)$$

则式(17)自动满足,代入式(18)可得

$$\frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \phi) = 2G\nu \frac{Q}{EI_y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \phi) = 0. \quad (20)$$

将式(20)积分,得到应力函数的控制方程:

$$\nabla^2 \phi = 2G\nu \frac{Q}{EI_y} y - 2\alpha G. \quad (21)$$

可以证明,积分常数 α 是单位长度的扭转角^[13], σ_z 满足边界条件式(13)的第3式至第5式,通过侧面边界条件可以证明式(13)的第1式和第2式成立^[13].

则此类问题的求解变为在边界条件式(12)和式(13)的第6式条件下通过求解式(21),得到应力函数 ϕ , 从而可以得到 τ_{zx} 和 τ_{zy} .

将应力函数分解为两部分,令 $\phi = \phi_1 + \phi_2$, 其中 ϕ_1 为弯曲应力函数, ϕ_2 为扭转应力函数.

由式(21)可得

$$\nabla^2 \phi = \frac{\nu}{\nu+1} \frac{Q}{I_y} y - 2\alpha G. \quad (22)$$

由式(12)第3式和式(19)可得

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{2} \frac{Q}{I_y} x^2 \cos(N, x). \quad (23)$$

令 $\phi_1 = A_1 y^3 + B_1 x^2 y + C_1 y$, $\phi_2 = D_2 x^2 + E_2 y^2$, 将 ϕ_1 和 ϕ_2 代入式(23), 并由等式恒成立的条件可得

$$B_1 a^2 + C_1 = \frac{1}{2} \frac{Q}{I_y} a^2, \quad (24)$$

$$3A_1 - 3B_1 = -\frac{1}{2} \frac{Q}{I_y}, \quad (25)$$

$$-2D_2 + 2E_2 = 0. \quad (26)$$

由式(21), 令

$$\nabla^2 \phi_1 = 2G\nu \frac{Q}{EI_y} y, \quad \nabla^2 \phi_2 = -2\alpha G, \quad (27)$$

可得

$$6A_1 + 2B_1 = \frac{\nu}{\nu + 1} \frac{Q}{I_y}, \quad (28)$$

$$2D_2 + 2E_2 = -2\alpha G. \quad (29)$$

将式(19)代入端面边界条件式(13)第6式可得

$$M_z = \iint_R [-2D_2 x^2 - 2E_2 y^2] dx dy. \quad (30)$$

联立式(24)、式(25)和式(28)可得

$$A_1 = \frac{(2\nu - 1)Q}{24(1 + \nu)I_y}, \quad B_1 = \frac{(2\nu + 1)Q}{8(1 + \nu)I_y}, \quad C_1 = \frac{(2\nu + 3)Q}{8(1 + \nu)I_y} a^2. \quad (31)$$

联立式(26)、式(29)和式(30)可得

$$D_2 = E_2 = -\frac{M_z}{\pi a^4}, \quad \alpha = \frac{2M_z}{\pi a^4 G}. \quad (32)$$

将 A_1, B_1, C_1, D_2 和 E_2 代入应力函数 ϕ , 并将 ϕ 代入式(19), 则圆形截面弯扭耦合变形条件下的剪应力分布精确解为

$$\begin{cases} \tau_{zx} = \frac{(2\nu + 3)Q}{8(1 + \nu)I_y} \left(a^2 - x^2 - \frac{1 - 2\nu}{3 + 2\nu} y^2 \right) + 2 \frac{Qe}{\pi a^4} y, \\ \tau_{zy} = -\frac{(2\nu + 1)Q}{4(1 + \nu)I_y} xy - 2 \frac{Qe}{\pi a^4} x. \end{cases} \quad (33)$$

根据式(2)计算梁截面剪切系数可得

$$k = \frac{6(1 + \nu)^2}{8\nu^2 + 14\nu + 7 + 12(1 + \nu)^2 e^2/a^2}. \quad (34)$$

1.2.2.2 椭圆形截面

按照 1.2.2.1 的方法可得椭圆形截面的剪应力分布精确解为

$$\begin{cases} \tau_{zx} = \frac{2(\nu + 1)a^2 + b^2}{(1 + \nu)(3a^2 + b^2)} \frac{Q}{2I_y} \left(a^2 - x^2 - \frac{(1 - 2\nu)a^2}{2(1 + \nu)a^2 + b^2} y^2 \right) + 2 \frac{Qe}{\pi a^3 b^3} y, \\ \tau_{zy} = -\frac{(1 + \nu)a^2 + \nu b^2}{(1 + \nu)(3a^2 + b^2)} \frac{Q}{I_y} xy - 2 \frac{Qe}{\pi a^3 b} x. \end{cases} \quad (35)$$

根据式(2)计算梁截面剪切系数可得

$$k = [3(1 + \nu)^2 (3 + m^2)^2] / \{ 2[\nu^2 m^6 + m^4(5\nu^2 + 4\nu + 2) + 11(1 + \nu)^2 m^2 + 15(1 + \nu)^2] + 3(1 + \nu)^2 (3 + m^2)^2 (e^2/a^2) (1 + 1/m^2) \}. \quad (36)$$

1.2.2.3 环形截面

按照 1.2.2.1 的方法可得环形截面的剪应力分布精确解为

$$\begin{cases} \tau_{zx} = \frac{1}{8(1+\nu)} \frac{Q}{I_y} \left[(2\nu-1)y^2 + (3+2\nu) \left(-x^2 + a^2 + b^2 - a^2b^2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \right] + 2 \frac{Qe}{\pi(a^4 - b^4)} y, \\ \tau_{zy} = -\frac{1}{4(1+\nu)} \frac{Q}{I_y} xy \left[1 + 2\nu + (3+2\nu) \frac{a^2b^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] - 2 \frac{Qe}{\pi(a^4 - b^4)} x. \end{cases} \quad (37)$$

根据式(2)计算梁截面剪切系数可得

$$k = [24(1+m^2)^2(1+\nu)^2] / \{ (m^2+1)^2(32\nu^2+56\nu+28) + m^2(76\nu^2+196\nu+107) + 48(e^2/a^2)(1+m^2)(1+\nu)^2 \}. \quad (38)$$

1.2.2.4 薄壁圆环

令式(38)中 $m=1$ 可得薄壁圆环截面的剪切系数

$$k = \frac{96(1+\nu)^2}{204\nu^2 + 420\nu + 219 + 96(e^2/a^2)(1+\nu)^2}. \quad (39)$$

1.2.3 小结

通过对比梁不同形状截面纯弯曲变形条件及弯扭耦合变形条件下的剪切系数可知,当梁端面的外力偏离截面的弯曲中心时,截面的剪切系数将变小,且偏心距越大,剪切系数越小,各截面剪切系数表达式的分母中最后一项均与 e^2/a^2 成正比。

2 与 Cowper 解的比较

Cowper 于 1966 年给出了几种截面的剪切系数计算结果,他没有考虑外力偏心对剪切系数的影响,本文计算结果与 Cowper 计算结果的比较见表 1,图 2 至图 5。

表 1 各截面剪切系数计算结果与 Cowper 结果的比较

Table 1 The comparison of shear coefficient for various cross section with the results of Cowper

section shape	solution of Cowper	solution of this paper
circle	$k = \frac{6(1+\nu)}{7+6\nu}$	$k = \frac{6(1+\nu)^2}{8\nu^2 + 14\nu + 7 + 12(1+\nu)^2 e^2/a^2}$
ellipse	$k = \frac{12(1+\nu)(3+m^2)}{\nu m^4 + (16+10\nu)m^2 + 40+37\nu}$ $m = b/a$	$k = [3(1+\nu)^2(3+m^2)^2] / \{ 2[\nu^2 m^6 + m^4(5\nu^2 + 4\nu + 2) + 11(1+\nu)^2 m^2 + 15(1+\nu)^2] + 3(1+\nu)^2(3+m^2)^2(e^2/a^2)(1+1/m^2) \}$ $m = b/a$
ring	$k = \frac{6(1+\nu)(1+m^2)^2}{(7+6\nu)(1+m^2)^2 + (20+12\nu)m^2}$ $m = b/a$	$k = [24(1+m^2)^2(1+\nu)^2] / \{ (m^2+1)^2(32\nu^2 + 56\nu + 28) + m^2(76\nu^2 + 196\nu + 107) + 48(e^2/a^2)(1+m^2)(1+\nu)^2 \}$ $m = b/a$
thin-walled ring	$k = \frac{2(1+\nu)}{4+3\nu}$	$k = \frac{96(1+\nu)^2}{204\nu^2 + 420\nu + 219 + 96(e^2/a^2)(1+\nu)^2}$

由比较结果可知,对于圆形及椭圆形截面,当 Poisson 比 $\nu=0$ 时,Cowper 的计算结果与本文相同,但随着 ν 的增大,Cowper 的计算结果逐渐增大,而本文的计算结果逐渐减小;对于环形截面和薄壁圆环截面,Cowper 的计算结果也均比本文计算结果大,其原因是 Cowper 在定义梁的挠度和转角时没有考虑与外力垂直的剪应力 τ_{zy} 的影响,由式(2)可知,忽略 τ_{zy} 将使剪切

系数增大,因此本文各截面的剪切系数计算结果均比 Cowper 小。

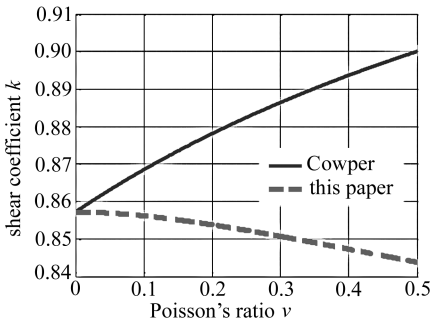


图2 圆形截面剪切系数对比

Fig. 2 Comparison of shear coefficients for the circle section

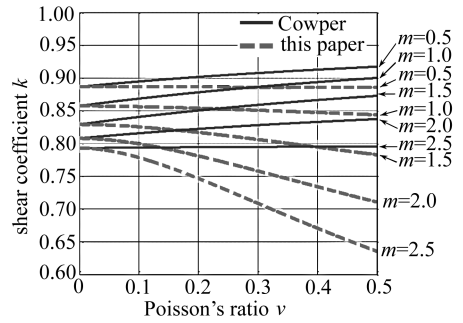


图3 椭圆形截面剪切系数对比

Fig. 3 Comparison of shear coefficients for the ellipse section

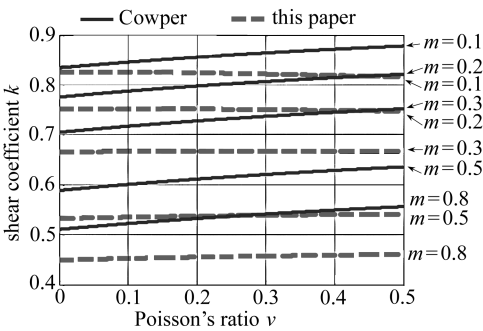


图4 环形截面剪切系数对比

Fig. 4 Comparison of shear coefficients for ring section

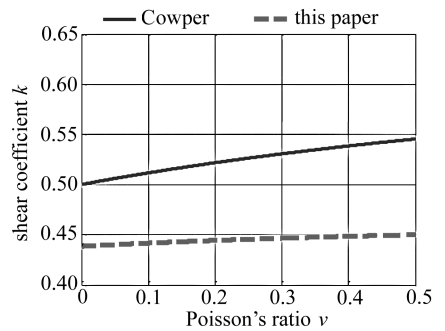


图5 薄壁圆环截面剪切系数对比

Fig. 5 Comparison of shear coefficients for thin-walled ring section

3 结论及展望

1) 梁端面的外力偏离截面的弯曲中心时,梁将发生弯扭耦合变形,本文采用试凑法给出了梁发生弯扭耦合变形条件下截面剪应力分布的精确解;

2) 与纯弯曲变形相比,弯扭耦合变形条件下截面的剪切系数将变小,且偏心距越大,剪切系数越小,各截面剪切系数表达式分母中偏心距的影响项均与 e^2/a^2 成正比;

3) 本文得出的各截面剪切系数均比 Cowper 小,其原因是 Cowper 在定义梁的挠度和转角时没有考虑与外力垂直的剪应力 τ_{zy} 的影响,因此本文的解更优越;

4) 本文研究了梁发生静变形条件下截面的剪切系数,考虑了与外力垂直的剪应力 τ_{zy} 及外力偏离弯曲中心的距离的影响,但没有考虑惯性力的影响,今后将在计算模型中引入惯性力,研究梁的固有特性等因素对截面剪切系数的影响。

参考文献 (References):

- [1] Timoshenko S P. On the correction for shear of differential equation for transverse vibrations of bars of prismatic bars[J]. *Philosophical Magazine*, 1921, **41**(5):744-746.
- [2] 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用[M]. 北京:科学出版社, 1981: 139-147. (HU Hai-cang. *Variational Principle for Elasticity and Its Application* [M]. Beijing: Science Press, 1981: 139-147. (in Chinese))

- [3] Leibowitz R C, Kennard K H. Theory of vibrating nonlinear beams[R]. David Taylor Model Basin Reports, 1317, 1961:180.
- [4] Love A E H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*[M]. Chapter 16. New York: Dover Publications, 1944.
- [5] Cowper G R. The shear coefficient in Timoshenko's beam theory[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1966, **33**(3):393-398.
- [6] Stephen N G. Timoshenko's shear coefficient from a beam subjected to gravity loading[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1980, **47**(1):121-127.
- [7] 杜丹旭, 郑泉水. 子空间变分原理的修正及其应用于确定梁的剪切系数[J]. 固体力学学报, 1996, **17**(4):348-352. (DU Dan-xu, ZHENG Quan-shui. Revised subspace variational principle and its applications to determine shear coefficients of beams[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 1996, **17**(4):348-352. (in Chinese))
- [8] Hutchinson J R. Shear coefficients for Timoshenko beam theory[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2001, **68**(1):87-92.
- [9] Hull A J. Mindlin shear coefficient determination using model comparison[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, **294**(1):125-130.
- [10] Kawashima H. The shear coefficient for quartz crystal of rectangular cross section in Timoshenko's beam theory[J]. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 1996, **43**(3):434-440.
- [11] Puchegger S, Loidl D, Kromp K, Peterlik H. Hutchinson's shear coefficient for anisotropic beams[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, **266**(2):207-216.
- [12] Omidvar B. Shear coefficient in orthotropic thin-walled composite beams[J]. *Journal of Composites for Construction*, 1998, **2**(1):46-56.
- [13] 钱伟长, 叶开沅. 弹性力学[M]. 北京:科学出版社, 1956:185-198. (CHIEN Wei-zang, YEH Kai-yuan. *Theory of Elasticity*[M]. Beijing:Science Press, 1956:185-198. (in Chinese))

A New Method of Obtaining Timoshenko's Shear Coefficients

WANG Le, WANG Liang

(China Academy of Launch Vehicle Technology, Beijing 100076, P. R. China)

Abstract: With the effects of shear deformation of slender beams considered in Timoshenko beam theory, a new method of obtaining Timoshenko's shear coefficients was derived. First, the exact solutions of the cross section's shear stress distribution of the cantilever beam under action of pure bending were used, and the new expressions of various cross sections were obtained based on energy principle. Then, the exact solutions of the cross section's shear stress distribution of the cantilever beam under action of bending and torsion were derived and the coefficients obtained. The results show that the coefficients decrease when the terminal force departs from the bending center. The results are smaller than those given by Cowper because his theory doesn't include the influence of shear stress perpendicular to the terminal force, and solution of the new method is better.

Key words: Timoshenko beam theory; shear coefficient; bending; torsion; shear stress