文章编号:1000-0887(2013)07-0736-06

病态代数系统求解的精细迭代方法*

张文志, 黄培彦

(华南理工大学 土木与交通学院,广州 510640)

(我刊编委黄培彦来稿)

摘要: 提出了病态代数系统求解的精细迭代方法. 首先利用一个小参数对病态矩阵加以改良,将原病态系统的求解问题转化为该改良系统的求解问题. 然后利用精细积分法给出了改良矩阵求逆的高精度方法. 该方法具有高精度、高效率的优点,且对改良参数的适应性较好,具有良好的应用前景. 理论和数值分析证明了该方法的有效性.

关 键 词: 病态代数系统; 精细积分法; 迭代算法

中图分类号: O241.5; O302 **文献标志码**: A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.07.008

引 言

长期以来,迭代法在病态方程的求解中起着重要的作用. 其中具有开拓意义的是由 Wilkinson 等提出的迭代求解方法[1-2],此后该类方法虽然获得了不断的改进和发展(如文献[3-9]的工作),但 Wilkinson 法在计算过程中需要直接对病态矩阵求逆,这大大限制了其应用.

本文通过将病态代数系统转变为良性系统进行求解,并以精细积分法[10]求解改良矩阵的逆矩阵,提出一种求解病态代数系统的精细迭代方法.

1 病态代数系统的新解法

考虑病态代数系统

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}, \tag{1}$$

式中, $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定矩阵, $\boldsymbol{b}$ 为 n 维向量.

由于病态问题难于直接求解,将病态问题转化为易于求解的良性问题显得尤为重要. 因此,本文尝试引入一个小参数 q, 将病态问题(1)转变为一个相对良性的问题,提出如下 Wilkinson 法的改进迭代算法:

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{g}, \tag{2}$$

* **收稿日期**: 2013-05-20; **修订日期**: 2013-06-03
基金项目: 国家自然科学基金(重点)资助项目(11132004;51078145)
作者简介: 张文志(1982—),男,安徽人,博士(E-mail:cheungmanchi@126.com);
黄培彦(1952—),汉族,男,广东人,博士,教授,博士生导师(通讯作者. Tel:+86-20-87114460; E-mail: pyhuang@scut.edu.cn).

式中, $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{G} = \boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{g} = (\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{b}$, $q > 0$, $\boldsymbol{I}$ 为 n 阶单位矩阵.

2　基于精细积分的矩阵求逆法

尽管对病态矩阵进行了改良,但迭代式(2)依然需要对矩阵求逆,为保证其计算精度,下面本文提出能精确求解 $(\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{I})^{-1}$ 的精细积分解法.

首先,记

$$\boldsymbol{R}(t) = \int_0^t \exp(-\boldsymbol{B}s)\,\mathrm{d}s, \tag{3}$$

式中, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + q\boldsymbol{I}$. 显然

$$\boldsymbol{R}(t) = \int_0^t \exp(-\boldsymbol{B}s)\,\mathrm{d}s = -\boldsymbol{B}^{-1}\exp(-\boldsymbol{B}s)\,|_0^t = -\boldsymbol{B}^{-1}\exp(-\boldsymbol{B}t) + \boldsymbol{B}^{-1}.$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 正定,当 $t \to \infty$时, $\exp(-\boldsymbol{B}t) \to \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}(\infty) = \boldsymbol{I}$,有 $\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{R}(\infty)$. 令 $\boldsymbol{H} = -\boldsymbol{B}$, 注意到

$$\boldsymbol{R}(2t) = \int_0^{2t} \exp(\boldsymbol{H}s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \exp(\boldsymbol{H}s)\,\mathrm{d}s + \int_t^{2t} \exp(\boldsymbol{H}s)\,\mathrm{d}s,$$

对 $\int_t^{2t} \exp(\boldsymbol{H}s)\,\mathrm{d}s$ 作变换,即可得到

$$\boldsymbol{R}(2t) = (\boldsymbol{I} + \exp(\boldsymbol{H}t))\boldsymbol{R}(t). \tag{4}$$

由式(4)可给出 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 的一个递推算法. 为此,取一个小步长 τ, 记

$$\boldsymbol{R}_j = \boldsymbol{R}(2^j\tau) \qquad (j = 0, 1, \cdots). \tag{5}$$

由式(5),有

$$\boldsymbol{R}_j = \prod_{i=0}^{j-1}(\boldsymbol{I} + \exp(2^i\boldsymbol{H}\tau))\boldsymbol{R}_0 \qquad (j = 1, 2, \cdots), \tag{6}$$

其中, $\exp(2^i\boldsymbol{H}\tau)$ 可由精细积分法[10]计算,过程如下:

对 $\exp(\boldsymbol{H}\tau)$ 做 Taylor 展开:

$$\exp(\boldsymbol{H}\tau) \approx \boldsymbol{I} + \sum_{i=1}^{4}\frac{(\boldsymbol{H}\tau)^i}{i!}, \tag{7}$$

进而由式(3)、(5)可得

$$\boldsymbol{R}_0 = \tau\left(\boldsymbol{I} + \sum_{i=1}^{4}\frac{(\boldsymbol{H}\tau)^{i-1}}{i!}\right). \tag{8}$$

记

$$\begin{cases}\boldsymbol{T}_\alpha^{(0)} = \boldsymbol{H}\tau + (\boldsymbol{H}\tau)^2/2 + (\boldsymbol{H}\tau)^3/6 + (\boldsymbol{H}\tau)^4/24, \\ \boldsymbol{T}_\alpha^{(i+1)} = 2\boldsymbol{T}_\alpha^{(i)} + (\boldsymbol{T}_\alpha^{(i)})^2,\end{cases} \tag{9}$$

则

$$\exp(2^i\boldsymbol{H}\tau) = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{T}_\alpha^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \cdots). \tag{10}$$

由于 τ 非常小,式(10)可有效避免有效数字的丢失.

由式(4)和式(10),可得如下迭代式:

$$\boldsymbol{R}_{j+1} = (\boldsymbol{I} + \exp(2^j\boldsymbol{H}\tau))\boldsymbol{R}_j \qquad (j = 1, 2, \cdots). \tag{11}$$

当 j 足够大时,由式(11) 可得到较精确的 $\boldsymbol{B}^{-1}$. 值得注意的是,式(11) 的计算过程相当于不断倍增 $\boldsymbol{R}(t)$ 的积分区域,其计算效率是很高的.

3 迭代算法的收敛性分析

令 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$,则 $1-\lambda_i/(\lambda_i+q)>0$ 为 $\boldsymbol{G}$ 的特征值. 相应的,$\boldsymbol{G}$ 的谱半径为

$$\rho(\boldsymbol{G})=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_i+q}\right)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\frac{q}{\lambda_i+q}\right). \tag{12}$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 正定,有 $\lambda_i>0$. 易知对于任意 $q>0$ 均有 $\rho(\boldsymbol{G})<1$, 即迭代式(2)无条件收敛.

4 数 值 算 例

算例 1(取自文献[11]的算例 3) 求解病态线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$, 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5.0&7.0&6.0&5.0\\7.0&10.0&8.0&7.0\\6.0&8.0&10.0&9.0\\5.0&7.0&9.0&10.0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}23.0\\32.0\\33.0\\31.0\end{pmatrix}.$$

其理论解为:$\boldsymbol{x}=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 表 1 为本文计算结果(取 $\tau=10^{-8}$,$q=10^{-13}$)与文献[11]计算结果的对比.

表 1 本文结果与文献[11]结果的比较

Table 1 Comparison of results of this paper with ref. [11]

solution components	our results ($k=2$)	results from ref. [11] ($k=26\ 469$)	exact solution
x_1	1.000 000 000 000 00	0.999 999 995 1	1.000 000 000 000 00
x_2	1.000 000 000 000 00	1.000 000 003 0	1.000 000 000 000 00
x_3	1.000 000 000 000 00	1.000 000 001 0	1.000 000 000 000 00
x_4	1.000 000 000 000 00	0.999 999 999 3	1.000 000 000 000 00

由表 1 可以看出,本文方法只需 2 次迭代运算即可得到计算机上的精确解,其精度远远高于文献[11]迭代 26 469 次所得解答的精度. 由此可以看出本文方法的高效率和高精度.

算例 2(见文献[6]的例 3) 考虑病态方程 $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{b}$, 其中

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{90\times 90},\ \boldsymbol{b}=[b_1,b_2,\cdots,b_{90}]^{\mathrm{T}},$$

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & i\neq j,\\ 1+p^2, & i=j,\end{cases}\quad i,j=1,2,\cdots,90;$$

$$b_i=\sum_{k=1}^{90}a_{ik},\qquad i=1,2,\cdots,90.$$

其理论解为 $\boldsymbol{x}=[1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$,这里取 $p=5\times10^{-6}$. 表 2 给出了本文计算结果(取 $\tau=10^{-6}$)与其它方法计算结果的对比.

由表 2 可以看出,本文方法的精度几乎不受所选参数 q 的影响,对参数 q 具有良好的适应性. 而文献[6]方法的精度明显受参数影响. 由表 2 还可看出,本文方法的精度远高于其它方法.

为了考察步长 τ 对解答精度的影响, 本文取 $q=10^{-12}$, $k=2$ 进行计算. 表 3 给出了 $\tau=10^{-3}\sim10^{-14}$ 的计算结果.

由表 3 可以看出,本文解答的精度几乎不受步长 τ 的影响. 因此步长 τ 的选择具有一定的

任意性,其要点在于确保式(7)中的高阶项足够小.

表2 算例2的结果对比

Table 2 Comparison between computed solutions for example 2

method	parameter	significant digits	k
Wilkinson's solver	$q=0,\ p=1$	4	100 000
solver from ref. [6]	$q=10^{-5}$	8	2
	$q=10^{-7}$	7	2
	$q=10^{-9}$	5	10
	$q=10^{-12}$	4	2
	$q=10^{-13}$	4	2
our solver	$q=10^{-5}$	13	2
	$q=10^{-7}$	13	2
	$q=10^{-9}$	13	2
	$q=10^{-12}$	14	1
	$q=10^{-13}$	14	1

表3 τ 对误差范数的影响

Table 3 Influence of τ on the relative error norm

τ	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}
error norm	3.60E-13	3.91E-14	5.72E-14	5.71E-14	6.09E-14	1.34E-14
τ	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}	10^{-13}	10^{-14}
error norm	4.15E-14	7.68E-15	3.89E-14	7.86E-14	2.94E-14	4.55E-14

算例3(取自文献[7]的算例4) 考虑Hilbert矩阵构成的方程 $\boldsymbol{H}_n\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$. $\boldsymbol{H}$ 的元素 h_{ij} 由下式给出:

$$h_{ij}=\frac{1}{i+j-1},\qquad i,j=1,2,\cdots,n.$$

右侧项

$$b_i=\sum_{k=1}^{n}h_{ik},\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

易知该方程的精确解为 $\boldsymbol{x}=[1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$. 本文取 $\tau=10^{-4}$ 进行计算,表4给出了本文方法与其它方法计算结果的对比.

表4 算例3的结果对比($n=12$)

Table 4 Comparison between computed solutions for example 3 ($n=12$)

method	parameter	significant digits	k
Wilkinson's solver	$q=0,\ p=1$	no	500 000
solver from ref. [6]	$q=10^{-8}$	6	43
	$q=10^{-9}$	6	5
	$q=10^{-10}$	6	1
	$q=10^{-12}$	5	1
our solver	$q=10^{-8}$	7	341
	$q=10^{-9}$	7	54
	$q=10^{-10}$	7	3
	$q=10^{-12}$	6	1

由表 4 可以再次看出,本文方法对参数 q 具有良好的适应性,且本文方法所得解答的精度高于其它方法.

为了考察矩阵阶数 n 对解答精度的影响,本文取 $n=20, 40, \cdots, 2\,000$ 进行计算,结果见表 5.

表 5 矩阵阶数对误差范数的影响

Table 5 Matrix order's influence on the relative error norm

n	20	40	60	80	100	200
error norm	3.04E-6	4.48E-6	4.98E-6	5.10E-6	5.54E-6	6.48E-6
n	400	500	600	800	1 000	2 000
error norm	6.73E-6	7.96E-6	7.24E-6	9.07E-6	8.76E-6	8.36E-6

由表 5 可以看出,矩阵阶数对本文计算结果的精度影响并不明显.

5 结　论

本文给出了一种病态代数系统求解的精细迭代方法.由于能够充分利用精细积分法的优点,该方法具有较高的精度和求解效率.本文方法的计算过程几乎不受离散步长 τ 和改良参数 q 的影响,且对小参数 q 无条件收敛,具有较好的应用前景.

参考文献(References):

[1] Martin R S, Peters G, Wilkinson J H. Symmetric decompositions of a positive definite matrix[J]. *Numer Math*, 1965, **7**(5): 362-383.

[2] Martin R S, Peters G, Wilkinson J H. Iterative refinement of the solution of a positive definite system of equations[C]//Baner F L ed. *Handbook for Automatic Computation*. **Vol II**. *Linear Algebra*. Berlin: Springer, 1971.

[3] Skeel R D. Iterative refinement implies numerical stability for Gaussian elimination[J]. *Math Comp*, 1980, **35**(151): 817-832.

[4] Nicholas J H. Iterative refinement enhances the stability of QR factorization methods for solving linear equations[J]. *BIT*, 1991, **31**(3): 447-468.

[5] Nicholas J H. Iterative refinement for linear systems and LAPACK[J]. *IMA J Numer Anal*, 1997, **17**(4): 495-509.

[6] WU Xin-yuan, SHAO Rong, ZHU Yi-ran. New iterative improvement of a solution for an ill-conditioned system of linear equations based on a linear dynamics system[J]. *Computers and Mathematics With Applications*, 2002, **44**(8/9): 1109-1116.

[7] WU Xin-yuan, SHAO Rong, XUE Guo-he. Iterative refinement of solution with biparameter for solving ill-conditioned systems of linear algebraic equations[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2002, **131**(2/3): 235-244.

[8] WU Xin-yuan. An effective predictor-corrector process for large scale linear system of equations[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, **1**(180): 160-166.

[9] WU Xin-yuan, FANG Yong-lei. Wilkinson's iterative refinement of solution with automatic step-size control for linear system of equations[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, **193**(2): 506-513.

[10] ZHONG Wan-xie, Williams F W. A precise time step integration method[J]. *Journal of Me-

chanical Engineering Science, 1994, **208**(6): 427-430.

[11] 邹积麟, 钱稼如. 病态方程的复合结构解法. 清华大学学报(自然科学版), 2001, **41**(4/5): 231-234.(ZOU Ji-lin, QIAN Jia-ru. Composite structure method for ill-conditioned linear equations[J]. *Journal of Tsinghua University*(*Science and Technology*), 2001, **41**(4/5): 231-234. (in Chinese))

Precise Iterative Refinement of Solution for Ill-Conditioned Systems of Linear Algebraic Equations

ZHANG Wen-zhi, HUANG Pei-yan

(*School of Civil and Transportation Engineering*, *South China University of Technology*, *Guangzhou* 510640, *P. R. China*)

Abstract: A precise iterative refinement of solution for ill-conditioned systems of linear algebraic equations was proposed. First, the ill-conditioned matrix was improved through introduction of a small parameter, and then via the precise integration method, a highly precise method was provided for the inversion of the improved matrix. Both the theoretical convergence analysis and numerical examples show the efficiency and accuracy of the method.

Key words: ill-conditioned linear system; precise integration method (PIM); iterative method