文章编号:1000-0887(2013)06-0643-08

向量优化问题有效点集的稳定性*

赵　勇[1], 彭再云[2], 张石生[3]

(1. 重庆师范大学 数学学院, 重庆 400047;
2. 重庆交通大学 理学院, 重庆 400074;
3. 云南财经大学 数学与统计学院, 昆明 650224)

(我刊编委张石生来稿)

摘要: 在不需要紧性假设下,利用拟 C- 凸函数及回收锥的性质,建立了向量优化问题有效点集的稳定性, 获得了一列目标函数和可行集均扰动情形下的向量优化问题与对应的向量优化问题有效点集的 Painlevé-Kuratowski 内收敛性结果. 所得结果推广和改进了相关文献(Attouch H, Riahi H. Stability results for Ekeland's ϵ- variational principle and cone extremal solution; Huang X X. Stability in vector-valued and set-valued optimization)中的相应结果, 并给出例子说明了所得结果的正确性.

关 键 词: 向量优化问题; Painlevé-Kuratowski 收敛性; 稳定性

中图分类号: O224　　**文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.06.010

引　　言

稳定性分析是向量优化的一个重要研究方向, 在理论和实际应用上都有重要研究意义. 一些书籍介绍了这方面的工作, 参见文献[1-2]. 早期的稳定性分析的文章可参见文献[3-5]. Attouch 和 Riahi[6] 在图像收敛概念的基础上研究了向量优化问题的稳定性. Chen 和 Huang[7] 得到了关于向量值函数的 Ekeland ϵ- 变分原理的稳定性结果. Huang[8] 在紧性条件下讨论了向量和集值优化问题有效点集及近似有效点集分别在 Painlevé-Kuratowski 和 Mosco 意义下的收敛性. Lucchetti 和 Miglierina[9] 研究了目标函数和可行集都带扰动的凸向量优化问题的稳定性. Oppezzi 和 Rossi[10-11] 研究了向量映射序列的 Gamma-收敛性, 并将其运用到稳定性理论中. Crespi 等[12] 在文献[13]的基础上讨论了锥拟凸向量优化问题的稳定性. 而后, Lalitha 和 Chatterjee[14] 建立了(严格)真拟凸向量优化问题 Henig 有效解集的稳定性结果. 在文献[15-16]中, 作者分别获得了凸向量优化问题与向量(或集值)平衡问题的稳定性结果. 最近, Lalitha 和 Chatterjee[17-18] 讨论了(真)拟凸向量优化问题弱有效点集、有效点集、Henig 真有效点集

* 收稿日期: 2013-04-27
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11271389; 11201509; 71271226);重庆市自然科学基金资助项目(CSTC,2012jjA00016; 2011AC6104; 2011BA0030);重庆市教委资助项目(130428)
作者简介: 赵勇(1989—),男,重庆人,硕士生(E-mail: zhaoyongty@126.com);
彭再云(1980—), 男,重庆人,副教授,博士(E-mail: pengzaiyun@126.com);
张石生(1934—), 男, 教授(通讯作者: E-mail: changss@yahoo.cn).

的稳定性.

受文献[6,8,18]的启发，本文在不需要紧性假设下讨论了向量优化问题有效点集在Painlevé-Kuratowski意义下的稳定性，所得结果推广和改进了文献[6,8]中的相应结果，并通过例子对结果进行了验证.

1 预备知识与基本定义

在本文中，假设 X 和 Y 分别为 k 维和 p 维欧氏空间. 令 C 是 Y 中具有非空内部的尖闭凸锥，其由 C 诱导的偏序如下：对任意的 $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2\in Y$

$$\boldsymbol{y}_1\leqslant_C\boldsymbol{y}_2\Leftrightarrow\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{y}_1\in C,$$

$$\boldsymbol{y}_1<_C\boldsymbol{y}_2\Leftrightarrow\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{y}_1\in\operatorname{int}C.$$

记 C 的正极锥为

$$C^*=\{\boldsymbol{l}\in Y^*:\boldsymbol{l}(\boldsymbol{c})\geqslant0,\ \forall\boldsymbol{c}\in C\}.$$

设 $E\subset R^k$，f: $E\to R^p$ 为向量值映射，对于 $\boldsymbol{\alpha}\in R^p$，$f$ 在 $\boldsymbol{\alpha}$ 的水平集 $f^{\boldsymbol{\alpha}}$ 定义为

$$f^{\boldsymbol{\alpha}}=\{\boldsymbol{x}\in E:f(\boldsymbol{x})\leqslant_C\boldsymbol{\alpha}\}.$$

对于闭凸集 $A\subset R^k$，定义 A 的回收锥为

$$0^+(A)=\{\boldsymbol{d}\in R^k:\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{d}\in A,\ \forall\boldsymbol{a}\in A,\ \forall t\geqslant0\}.$$

定义 1.1[6] 令 A 是 X 中的非空子集，点 $\boldsymbol{z}\in A$ 称为 A 的极大点，若

$$(\boldsymbol{z}+C)\cap A=\{\boldsymbol{z}\}.$$

记 $\operatorname{ext}_C A$ 为 A 的所有极大点组成的集合.

定义 1.2[8] 向量值映射 f: $X\to Y$ 称为关于 C 是下半连续的，若对任意的 $\boldsymbol{y}\in Y$，集合 $\{\boldsymbol{x}\in X:f(\boldsymbol{x})\leqslant_C\boldsymbol{y}\}$ 是闭的.

定义 1.3[10] 令 X 是第一可数拓扑空间. 集合序列 $\{A_n\subset X:n\in\mathbf{N}\}$ 称为Painlevé-Kuratowski(PK)收敛到 A(记为 $A_n\xrightarrow{\mathrm{PK}}A$) 的，如果

$$\limsup_{n\to\infty}A_n\subset A\subset\liminf_{n\to\infty}A_n,$$

记

$$\liminf_{n\to\infty}A_n:=\{\boldsymbol{x}\in X\mid\exists(\boldsymbol{x}_n),\boldsymbol{x}_n\in A_n,\ \forall n\in\mathbf{N},\ \boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{x}\},$$

$$\limsup_{n\to\infty}A_n:=\{\boldsymbol{x}\in X\mid\exists(n_k),\exists(\boldsymbol{x}_{n_k}),\ \boldsymbol{x}_{n_k}\in A_{n_k},\ \forall k\in\mathbf{N},\ \boldsymbol{x}_{n_k}\to\boldsymbol{x}\},$$

其中，$\limsup_{n\to\infty}A_n\subset A$ 称为Painlevé-Kuratowski外收敛，$A\subset\liminf_{n\to\infty}A_n$ 称为Painlevé-Kuratowski内收敛.

定义 1.4[8] 称向量值映射序列 f_n: $X\to Y$，$n=1,2,\cdots$，Painlevé-Kuratowski(PK)收敛到向量值映射 f: $X\to Y$，如果 $\operatorname{epi}f_n\xrightarrow{\mathrm{PK}}\operatorname{epi}f$，其中

$$\operatorname{epi}f_n=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}):\boldsymbol{y}\in f_n(\boldsymbol{x})+C\},\ \operatorname{epi}f=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}):\boldsymbol{y}\in f(\boldsymbol{x})+C\}.$$

定义 1.5[8] 设 $\{f_n:E_n\to Y,\ n=1,2,\cdots\}$ 是向量值映射序列，记 $\{(E_n,f_n):n=1,2,\cdots\}$ 为相应的序列对. 令 f: $E\to Y$，称 (E_n,f_n) Painlevé-Kuratowski(PK)收敛到 (E,f)(记为 $(E_n,f_n)\xrightarrow{\mathrm{PK}}(E,f)$)，如果 $\bar f_n\xrightarrow{\mathrm{PK}}\bar f$，其中

$$\bar f_n(\boldsymbol{x})=\begin{cases}f_n(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x}\in E_n,\\ +\infty, & \boldsymbol{x}\in X\backslash E_n;\end{cases}$$

$$\bar{f}(\boldsymbol{x})=\begin{cases} f(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x}\in E,\\ +\infty, & \boldsymbol{x}\in X\backslash E.\end{cases}$$

定义 1.6[18] 假设 E 是 R^k 中的凸集，函数 f 在 E 上称为拟 C- 凸的，如果对任意的 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in E$，$\boldsymbol{\alpha}\in R^p$ 和 $\lambda\in[0,1]$，

$$f(\boldsymbol{x})\leqslant\boldsymbol{\alpha}, f(\boldsymbol{y})\leqslant\boldsymbol{\alpha}\Rightarrow f(\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y})\leqslant\boldsymbol{\alpha}.$$

2 有效点集的稳定性

考虑带约束的向量优化问题

$$(\mathrm{P})\quad \min f(\boldsymbol{x})\quad \mathrm{s.t.}\ \boldsymbol{x}\in E,$$

其中，$f: R^k\to R^p$ 和 E 是 R^k 中的非空子集.

考虑一列带扰动约束的向量优化问题 (P_n)，$n\in\mathbf{N}$，为

$$(\mathrm{P}_n)\quad \min f_n(\boldsymbol{x})\quad \mathrm{s.t.}\ \boldsymbol{x}\in E_n,$$

其中，$f_n: R^k\to R^p$ 和 E_n 是 R^k 中的非空子集.

本文主要讨论了向量优化问题有效点集的 Painlevé-Kuratowski 内收敛性. 为了证明的需要，下面先给出几个重要的引理.

引理 2.1 设 $f_n, f: R^k\to R^p$ 和 E_n，$E\subset R^k$. 如果 $(E_n, f_n)\xrightarrow{\mathrm{PK}}(E, f)$，则有对于任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in R^p$，$\lim\sup_n f_n^{\boldsymbol{\alpha}}\subset f^{\boldsymbol{\alpha}}$.

证明 设 $\boldsymbol{x}_n\in\bar{f}_n^{\boldsymbol{\alpha}}$ 和 $\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{x}_0$. 则显然有 $(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{\alpha})\to(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\alpha})$ 和 $(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{\alpha})\in\mathrm{epi}\ \bar{f}_n$. 由于 $(E_n, f_n)\xrightarrow{\mathrm{PK}}(E, f)$，则由定义 1.5 得，$\mathrm{epi}\ \bar{f}_n\xrightarrow{\mathrm{PK}}\mathrm{epi}\ \bar{f}$. 故 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\alpha})\in\mathrm{epi}\ \bar{f}$，即，$\boldsymbol{x}_0\in\bar{f}^{\boldsymbol{\alpha}}$. 又 $\bar{f}^{\boldsymbol{\alpha}}=f^{\boldsymbol{\alpha}}$，$\bar{f}_n^{\boldsymbol{\alpha}}=f_n^{\boldsymbol{\alpha}}$，所以 $\lim\sup_n f_n^{\boldsymbol{\alpha}}\subset f^{\boldsymbol{\alpha}}$.

引理 2.2 假设存在 $\boldsymbol{l}\in Y^*$ 和 $\epsilon>0$，有 $-C\subset\{\boldsymbol{y}\in Y: \boldsymbol{l}(\boldsymbol{y})+\epsilon\|\boldsymbol{y}\|\leqslant 0\}$. (E_n, f_n)，(E, f) 的定义见定义 1.5，$\forall n\in\mathbf{N}$，E_n 是 X 中非空闭凸子集，f_n 在 E_n 上关于 C 是下半连续的，$E\subset X$ 是非空闭凸的，f 在 E 上关于 C 是下半连续的. 且满足下面的条件：

(i) $\inf_{n\in\mathbf{N}}\inf_{\boldsymbol{x}\in E_n}\boldsymbol{l}(f_n(\boldsymbol{x}))>-\infty$；

(ii) $(E_n, f_n)\xrightarrow{\mathrm{PK}}(E, f)$；

(iii) 对任意的 $\boldsymbol{\beta}\in R^p$，当 $E\cap f^{\boldsymbol{\beta}}\neq\varnothing$ 时，有 $0^+(E\cap f^{\boldsymbol{\beta}})=\mathbf{0}$. f_n 在 E_n 上是拟 C- 凸的，f 在 E 上是拟 C- 凸的.

则对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in R^p$，有

$$f_n(E_n\cap f_n^{\boldsymbol{\alpha}})+C\xrightarrow{\mathrm{PK}}f(E\cap f^{\boldsymbol{\alpha}})+C.$$

证明 (i) 首先证明，$f(E\cap f^{\boldsymbol{\alpha}})+C\subset\lim\inf_{n\to\infty}f_n(E_n\cap f_n^{\boldsymbol{\alpha}})+C$.

对任意的 $\boldsymbol{y}\in f(E\cap f^{\boldsymbol{\alpha}})$，$\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{x}\in E\cap f^{\boldsymbol{\alpha}}$，$\forall\boldsymbol{c}\in C$，有 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{c})\in\mathrm{epi}\ \bar{f}$. 由于 $\bar{f}_n\xrightarrow{\mathrm{PK}}\bar{f}$，则有

$$\mathrm{epi}\ \bar{f}\subset\liminf_{n\to\infty}\mathrm{epi}(\bar{f}_n).$$

于是存在 $(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n)\in \mathrm{epi}(\bar{f}_n)$, $\boldsymbol{y}_n=\bar{f}_n(\boldsymbol{x}_n)+\boldsymbol{c}_n$ 使得$(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_n)\to(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{c})$.

显然当 n 充分大时, $\boldsymbol{x}_n\in E_n\cap f_n^{\boldsymbol{\alpha}}$. 因此

$$\boldsymbol{y}_n=\bar{f}_n(\boldsymbol{x}_n)+\boldsymbol{c}_n=f_n(\boldsymbol{x}_n)+\boldsymbol{c}_n\in f_n(E_n\cap f_n^{\boldsymbol{\alpha}})+C.$$

(ii) 下面证明 $\limsup\limits_{n\to\infty}(f_n(E_n\cap f_n^{\boldsymbol{\alpha}})+C)\subset f(E\cap f^{\boldsymbol{\alpha}})+C$.

对任意的 $\boldsymbol{y}\in\limsup\limits_{n\to\infty}(f_n(E_n\cap f_n^{\boldsymbol{\alpha}})+C)$, 任意 $\boldsymbol{x}_{n_k}\in E_{n_k}\cap f_{n_k}^{\boldsymbol{\alpha}}$, $\boldsymbol{c}_{n_k}\in C$, $f_{n_k}(\boldsymbol{x}_{n_k})+\boldsymbol{c}_{n_k}\in f_{n_k}(E_{n_k}\cap f_{n_k}^{\boldsymbol{\alpha}})+C$ 使得

$$f_{n_k}(\boldsymbol{x}_{n_k})+\boldsymbol{c}_{n_k}\to\boldsymbol{y}. \tag{1}$$

给定 $\boldsymbol{u}\in E$, 令 $\boldsymbol{\beta}=f(\boldsymbol{u})$, 则有 $\boldsymbol{u}\in E\cap f^{\boldsymbol{\beta}}$. 由条件(ii)和引理2.1得, 存在子列 $\boldsymbol{u}_k\in E_{n_k}\cap f_{n_k}^{\boldsymbol{\beta}}$ 使得 $\boldsymbol{u}_k\to\boldsymbol{u}$.

下证 $\{\boldsymbol{x}_{n_k}\}$ 是有界的. 反证法, 假设当 $k\to\infty$, $\|\boldsymbol{x}_{n_k}\|\to\infty$. 则对任意 $\lambda\geqslant 0$ 和充分大的 k,

$$\boldsymbol{z}_k=\left(1-\frac{\lambda}{\|\boldsymbol{x}_{n_k}\|}\right)\boldsymbol{u}_k+\frac{\lambda}{\|\boldsymbol{x}_{n_k}\|}\boldsymbol{x}_{n_k}.$$

由 E_{n_k} 的凸性得, $\boldsymbol{z}_k\in E_{n_k}$. 由于$(E_n,f_n)\xrightarrow{\mathrm{PK}}(E,f)$, 显然 $\boldsymbol{z}_k\to\boldsymbol{u}+\lambda\boldsymbol{d}\in E$,其中 $\boldsymbol{d}$ 是 R^p 中的单位向量.

由 $\boldsymbol{x}_{n_k}\in E_{n_k}\cap f_{n_k}^{\boldsymbol{\alpha}}$,有 $f_{n_k}(\boldsymbol{x}_{n_k})\leqslant_C\boldsymbol{\alpha}$. 又 $f_{n_k}(\boldsymbol{u}_k)\leqslant_C\boldsymbol{\beta}$. 于是, 存在 $\boldsymbol{p}$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}\leqslant\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{\beta}\leqslant\boldsymbol{p}$. 故有 $f_{n_k}(\boldsymbol{x}_{n_k})\leqslant_C\boldsymbol{p}$ 和 $f_{n_k}(\boldsymbol{u}_k)\leqslant_C\boldsymbol{p}$. 由 f_{n_k} 的拟 C-凸性得, $f_{n_k}(\boldsymbol{z}_k)\leqslant_C\boldsymbol{p}$. 由 $\boldsymbol{z}_k\to\boldsymbol{u}+\lambda\boldsymbol{d}$ 和$(E_n,f_n)\xrightarrow{\mathrm{PK}}(E,f)$, 有

$$f(\boldsymbol{u}+\lambda\boldsymbol{d})\leqslant_C\boldsymbol{p}.$$

这蕴含着对任意的 $\lambda\geqslant 0$, $\boldsymbol{u}+\lambda\boldsymbol{d}\in E\cap f^{\boldsymbol{p}}$. 于是

$$\boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{d}\in 0^+(E\cap f^{\boldsymbol{p}}),$$

矛盾. 因此, $\{\boldsymbol{x}_{n_k}\}$ 是有界的. 注意到 $y\neq+\infty$,故存在子列 $\{\boldsymbol{x}_{n_{k_l}}\}$ 和 $\boldsymbol{x}\in E$ 使得 $\boldsymbol{x}_{n_{k_l}}\to\boldsymbol{x}$. 由引理2.1 知, $\boldsymbol{x}\in f^{\boldsymbol{\alpha}}$. 于是, 由$(E_n,f_n)\xrightarrow{\mathrm{PK}}(E,f)$, 得$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathrm{epi}(f)$, 即, $\boldsymbol{y}\in f(\boldsymbol{x})+C\subset f(E\cap f^{\boldsymbol{\alpha}})+C$. 结论得证.

引理2.3 假设 $\mathrm{int}\,C\neq\varnothing$, $E\subset X$ 是非空闭凸的, $f:E\to Y$ 在 E 上是拟 C-凸的, f 在 E 上关于 C 是下半连续的. 对任意的 $\boldsymbol{\beta}\in R^p$, 当 $E\cap f^{\boldsymbol{\beta}}\neq\varnothing$, 有 $0^+(E\cap f^{\boldsymbol{\beta}})=\boldsymbol{0}$. 则对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in R^p$, $f(E\cap f^{\boldsymbol{\alpha}})+C$ 是非空闭的且 $\mathrm{ext}_{-C}[f(E\cap f^{\boldsymbol{\alpha}})+C]=\mathrm{ext}_{-C}f(E\cap f^{\boldsymbol{\alpha}})$.

证明 首先由定义得

$$\mathrm{ext}_{-C}[f(E\cap f^{\boldsymbol{\alpha}})+C]=\{\boldsymbol{z}\in f(E\cap f^{\boldsymbol{\alpha}})+C:(f(E\cap f^{\boldsymbol{\alpha}})+C-\boldsymbol{z})\cap(-C)=\boldsymbol{0}\},$$

$$\mathrm{ext}_{-C}f(E\cap f^{\boldsymbol{\alpha}})=\{\boldsymbol{z}\in f(E\cap f^{\boldsymbol{\alpha}}):(f(E\cap f^{\boldsymbol{\alpha}})-\boldsymbol{z})\cap(-C)=\boldsymbol{0}\}.$$

不难看出 $\mathrm{ext}_{-C}[f(E\cap f^{\boldsymbol{\alpha}})+C]=\mathrm{ext}_{-C}f(E\cap f^{\boldsymbol{\alpha}})$. 下证 $f(E\cap f^{\boldsymbol{\alpha}})+C$ 是非空闭的.

对任意的 $f(\boldsymbol{x}_n)+\boldsymbol{c}_n\in f(E\cap f^{\boldsymbol{\alpha}})+C$, $\boldsymbol{x}_n\in E\cap f^{\boldsymbol{\alpha}}$, $\boldsymbol{c}_n\in C$ 使得

$$f(\boldsymbol{x}_n)+\boldsymbol{c}_n\to\boldsymbol{y}, \tag{2}$$

其中, $f(\boldsymbol{x}_n)\leqslant_C\boldsymbol{\alpha}$. 令 $\boldsymbol{u}\in E$, $\boldsymbol{\beta}=f(\boldsymbol{u})$, 则 $\boldsymbol{u}\in E\cap f^{\boldsymbol{\beta}}$. 因此, 存在 $\boldsymbol{p}$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}\leqslant\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{\beta}\leqslant\boldsymbol{p}$.

故有$f(\boldsymbol{x}_n) \leqslant_C \boldsymbol{p}$ 和$f(\boldsymbol{u}) \leqslant_C \boldsymbol{p}$.

下证 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 是有界的. 反证法, 假设当 $n \to \infty$ 时, $\|\boldsymbol{x}_n\| \to \infty$. 则对任意的 $\lambda \geqslant 0$,

$$\boldsymbol{z}_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\|\boldsymbol{x}_n\|}\right)\boldsymbol{u} + \frac{\lambda}{\|\boldsymbol{x}_n\|}\boldsymbol{x}_n.$$

因为 E 是闭凸的, 所以 $\boldsymbol{z}_n \in E$, $\boldsymbol{z}_n \to \boldsymbol{u} + \lambda\boldsymbol{d} \in E$, 其中 $\boldsymbol{d}$ 是 R^p 中的单位向量. 由 f 的拟 C- 凸性得, $f(\boldsymbol{z}_n) \leqslant_C \boldsymbol{p}$. 又因为 f 是下半连续的, 所以 $f(\boldsymbol{u} + \lambda\boldsymbol{d}) \leqslant_C \boldsymbol{p}$. 于是

$$\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{d} \in 0^+(E \cap f^{\boldsymbol{p}}),$$

矛盾. 故 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 是有界的. 于是存在子列 $\{\boldsymbol{x}_{n_k}\}$ 和 $\boldsymbol{x} \in E$ 使得 $\boldsymbol{x}_{n_k} \to \boldsymbol{x}$. 又由 f 的下半连续性知, $\boldsymbol{x} \in f^{\boldsymbol{\alpha}}$. 结合式(2) 有 $f(\boldsymbol{x}_{n_k}) + \boldsymbol{c}_{n_k} \to \boldsymbol{y}$.

任意固定 $\boldsymbol{e} \in \operatorname{int} C$, 则对任意的 $\epsilon > 0$, $\exists K_0$, 当 $k \geqslant K_0$, $f(\boldsymbol{x}_{n_k}) + \boldsymbol{c}_{n_k} \leqslant_C \boldsymbol{y} + \epsilon\boldsymbol{e}$. 于是, $f(\boldsymbol{x}_{n_k}) \leqslant_C \boldsymbol{y} + \epsilon\boldsymbol{e}$. 由 f 的下半连续性有, $f(\boldsymbol{x}) \leqslant_C \boldsymbol{y} + \epsilon\boldsymbol{e}$, 即, $f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y} - \epsilon\boldsymbol{e} \in -C$. 令 $\epsilon \to 0$, 可得 $f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y} \in -C$. 因此, $\boldsymbol{y} \in f(\boldsymbol{x}) + C \subset f(E \cap f^{\boldsymbol{\alpha}}) + C$. 故 $f(E \cap f^{\boldsymbol{\alpha}}) + C$ 是闭的.

引理 2.4 假设 $E \subset X$ 是非空闭凸的, $f: E \to Y$ 在 E 上是拟 C- 凸的, 对任意的 $\boldsymbol{\lambda} \in C^*$, $\boldsymbol{\lambda}(f)$ 在 E 上是下半连续的. 对任意的 $\boldsymbol{\beta} \in R^p$, 当 $E \cap f^{\boldsymbol{\beta}} \neq \varnothing$, 有 $0^+(E \cap f^{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{0}$. 则对任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in R^p$, $f(E \cap f^{\boldsymbol{\alpha}}) + C$ 是非空闭的且 $\operatorname{ext}_{-C}[f(E \cap f^{\boldsymbol{\alpha}}) + C] = \operatorname{ext}_{-C} f(E \cap f^{\boldsymbol{\alpha}})$.

证明 运用与前面同样的方法可得 $\operatorname{ext}_{-C}[f(E \cap f^{\boldsymbol{\alpha}}) + C] = \operatorname{ext}_{-C} f(E \cap f^{\boldsymbol{\alpha}})$. 下证 $f(E \cap f^{\boldsymbol{\alpha}}) + C$ 是非空闭的.

设对任意的 $f(\boldsymbol{x}_n) + \boldsymbol{c}_n \in f(E \cap f^{\boldsymbol{\alpha}}) + C$, $\boldsymbol{x}_n \in E \cap f^{\boldsymbol{\alpha}}$, $\boldsymbol{c}_n \in C$ 使得

$$f(\boldsymbol{x}_n) + \boldsymbol{c}_n \to \boldsymbol{y}. \tag{3}$$

类似引理 2.3 的方法, 可以得到 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 是有界的, 则存在子列 $\{\boldsymbol{x}_{n_k}\}$ 和 $\boldsymbol{x} \in E \cap f^{\boldsymbol{\alpha}}$ 使得 $\boldsymbol{x}_{n_k} \to \boldsymbol{x}$. 结合式(3), 有 $f(\boldsymbol{x}_{n_k}) + \boldsymbol{c}_{n_k} \to \boldsymbol{y}$. 因此, $\boldsymbol{\lambda}(f(\boldsymbol{x}_{n_k})) + \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{c}_{n_k}) \to \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{y})$, $\forall \boldsymbol{\lambda} \in C^*$. 又由 $\boldsymbol{\lambda}(f)$ 的下半连续性得

$$\boldsymbol{\lambda}(f(\boldsymbol{x})) \leqslant \liminf_{k\to\infty} \boldsymbol{\lambda}(f(\boldsymbol{x}_{n_k})) \leqslant \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{y}), \qquad \forall \boldsymbol{\lambda} \in C^*.$$

于是, $f(\boldsymbol{x}) \leqslant_C \boldsymbol{y}$, 即 $\boldsymbol{y} \in f(\boldsymbol{x}) + C \subset f(E \cap f^{\boldsymbol{\alpha}}) + C$. 结论得证.

定理 2.1 假设 $\operatorname{int} C \neq \varnothing$, 存在 $\boldsymbol{l} \in Y^*$ 和 $\epsilon > 0$, 有 $-C \subset \{\boldsymbol{y} \in Y: \boldsymbol{l}(\boldsymbol{y}) + \epsilon\|\boldsymbol{y}\| \leqslant 0\}$. (E_n, f_n), (E, f) 的定义见定义 1.5, $\forall n \in \mathbf{N}$, E_n 是 X 中非空闭凸子集, f_n 在 E_n 上关于 C 是下半连续的, $E \subset X$ 是非空闭凸的, f 在 E 上关于 C 是下半连续的. 且满足下面的条件:

(i) $\inf_{n\in\mathbf{N}} \inf_{\boldsymbol{x}\in E_n} \boldsymbol{l}(f_n(\boldsymbol{x})) > -\infty$;

(ii) $(E_n, f_n) \xrightarrow{\text{PK}} (E, f)$;

(iii) 对任意的 $\boldsymbol{\beta} \in R^p$, 当 $E \cap f^{\boldsymbol{\beta}} \neq \varnothing$ 时, 有 $0^+(E \cap f^{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{0}$. f_n 在 E_n 上是拟 C- 凸的, f 在 E 上是拟 C- 凸的;

(iv) 对任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in R^p$, $\rho > 0$, 存在 Y 中的紧子集 K_ρ 使得 $\operatorname{ext}_{-C} f_n(E_n \cap f_n^{\boldsymbol{\alpha}}) \cap \rho B \subset K_\rho$, 其中 B 为 Y 中的一个单位球.

则 $\operatorname{ext}_{-C} f(E \cap f^{\boldsymbol{\alpha}})$ 非空且 $\operatorname{ext}_{-C} f(E \cap f^{\boldsymbol{\alpha}}) \subset \liminf_{n\to\infty} \operatorname{ext}_{-C} f_n(E_n \cap f_n^{\boldsymbol{\alpha}})$.

证明 用 $-C$ 代替 C, $D_n = f_n(E_n \cap f_n^{\boldsymbol{\alpha}}) + C$, $D = f(E \cap f^{\boldsymbol{\alpha}}) + C$. 由引理 2.2 和引理 2.3 知, D_n, D 是非空闭的且 $D_n \xrightarrow{\text{PK}} D$. 又 $\inf_{n\in\mathbf{N}} \inf_{\boldsymbol{y}\in D_n} \boldsymbol{l}(\boldsymbol{y}) \geqslant \inf_{n\in\mathbf{N}} \inf_{\boldsymbol{x}\in E_n\cap f_n^{\boldsymbol{\alpha}}} \boldsymbol{l}(f_n(\boldsymbol{x})) > -\infty$. 由条

件(iv)知，对任意的$\rho > 0$，$(\mathrm{ext}_{-C} D_n) \cap \rho B = \mathrm{ext}_{-C} f_n(E_n \cap f_n^{\boldsymbol{\alpha}}) \cap \rho B \subset K_\rho$. 于是，文献[6]中定理3.3的所有条件都满足. 因此,$\mathrm{ext}_{-C} f(E \cap f^{\boldsymbol{\alpha}}) = \mathrm{ext}_{-C} D \neq \varnothing$ 且 $\mathrm{ext}_{-C} f(E \cap f^{\boldsymbol{\alpha}}) = \mathrm{ext}_{-C} D \subset \liminf_{n\to\infty} \mathrm{ext}_{-C} D_n = \liminf_{n\to\infty} \mathrm{ext}_{-C} f_n(E_n \cap f_n^{\boldsymbol{\alpha}})$. 结论得证.

注1　在文献[6]中的定理3.3，Attouch 等讨论了多目标优化问题在可行集扰动下的有效点集的稳定性. 本文在定理2.1中建立了目标函数和可行集均扰动情形下,有效点集稳定性的结果.

注2　在文献[8]中的定理3.1，Huang 在紧性假设下得到了有效点集的 Painlevé-Kuratowski 内收敛性. 本文在不需要紧性条件下得到了相应的结果. 所得结果改进和推广了文献[8]中的相应结果. 下面举例说明此情形.

例1　令 $X = R^2$，$\|(x,y)\| = |x| + |y|$，取 $\boldsymbol{l}(x,y) = 2y$，$\epsilon = 1$ 时，则 $-C = \{(x,y) \in R^2 : \boldsymbol{l}(x,y) + \epsilon\|(x,y)\| \leqslant 0\} = \{(x,y) \in R^2 : y + |x| \leqslant 0\}$ 是一个尖闭凸锥. 定义

$$E_n = \{(x,y) \in R^2 : 3 \leqslant y \leqslant 10\},\ E = \{(x,y) \in R^2 : 3 \leqslant y \leqslant 10\},$$

$$f_n(x,y) = \left(\frac{1}{y}, 1 - \frac{1}{n}\right),\ f(x,y) = \left(\frac{1}{y}, 1\right).$$

则不难得到定理2.1中的条件(i),(ii),(iv)均满足. 显然对任意的$\boldsymbol{\beta} \in R^2$，当$E \cap f^{\boldsymbol{\beta}} \neq \varnothing$时，有$0^+(E \cap f^{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{0}$. f_n 在 E_n上是拟 C-凸的，f在 E 上是拟 C-凸的，即定理2.1中的条件均满足. 于是由定理2.1可得，对任意的

$$\boldsymbol{\alpha} \in R^2,\ \mathrm{ext}_{-C} f(E \cap f^{\boldsymbol{\alpha}}) \subset \liminf_{n\to\infty} \mathrm{ext}_{-C} f_n(E_n \cap f_n^{\boldsymbol{\alpha}}).$$

显然，我们发现文献[8]中定理3.1的条件(c)不满足. 事实上，对任意的紧集 $K \subset R^2$，都有 $E_n \not\subset K$. 因此文献[8]中的相应结果此时不可用.

下面在不需要 $\mathrm{int}\, C \neq \varnothing$ 的条件下得到另一个稳定性结果.

定理2.2　假设存在$\boldsymbol{l} \in Y^*$ 和$\epsilon > 0$，有 $-C \subset \{\boldsymbol{y} \in Y : \boldsymbol{l}(\boldsymbol{y}) + \epsilon\|\boldsymbol{y}\| \leqslant 0\}$. (E_n, f_n)，(E, f) 的定义见定义1.5，$\forall n \in \mathbf{N}$，E_n 是 X 中非空闭凸子集，$E \subset X$ 是非空闭凸的. 对任意的 $\boldsymbol{\lambda} \in C^*$，$\boldsymbol{\lambda}(f_n)$ 在 E_n 上是下半连续的，$\boldsymbol{\lambda}(f)$ 在 E 上是下半连续的. 且满足下面的条件：

(i) $\inf_{n\in\mathbf{N}} \inf_{\boldsymbol{x}\in E_n} \boldsymbol{l}(f_n(\boldsymbol{x})) > -\infty$；

(ii) $(E_n, f_n) \xrightarrow{\mathrm{PK}} (E, f)$；

(iii) 对任意的$\boldsymbol{\beta} \in R^p$，当$E \cap f^{\boldsymbol{\beta}} \neq \varnothing$时，有$0^+(E \cap f^{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{0}$. f_n 在 E_n 上是拟 C-凸的，f 在 E 上是拟 C-凸的；

(iv) 对任意的$\boldsymbol{\alpha} \in R^p$，$\rho > 0$，存在 Y 中的紧子集 K_ρ 使得 $\mathrm{ext}_{-C} f_n(E_n \cap f_n^{\boldsymbol{\alpha}}) \cap \rho B \subset K_\rho$，其中 B 为 Y 中的一个单位球.

则 $\mathrm{ext}_{-C} f(E \cap f^{\boldsymbol{\alpha}})$ 非空且 $\mathrm{ext}_{-C} f(E \cap f^{\boldsymbol{\alpha}}) \subset \liminf_{n\to\infty} \mathrm{ext}_{-C} f_n(E_n \cap f_n^{\boldsymbol{\alpha}})$.

证明　利用引理2.1,2.2,2.4及定理2.1的思路可直接得到证明.

参考文献(References)：

[1]　Sawaragi Y, Nakayama H, Tanino T. *Theory of Multiobjective Optimization*[M]. Mathematics in Science and Engineering. 176. London: Academic Press, 1985.

[2]　Luc D T. *Theory of Vector Optimization*[M]. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. 319. Berlin: Springer, 1989.

[3] Naccache P H. Stability in multicriteria optimization[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1979, **68**(2): 441-453.

[4] Tanino T. Stability and sensitivity analysis in convex vector optimization[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1988, **26**(3): 521-536.

[5] Tanino T. Stability and sensitivity analysis in multiobjective nonlinear programming[J]. *Annals of Operations Research*, 1990, **27**(1): 97-114.

[6] Attouch H, Riahi H. Stability results for Ekeland's ϵ- variational principle and cone extremal solution[J]. *Mathematics of Operations Research*, 1993, **18**(1): 173-201.

[7] Chen G Y, Huang X X. Stability results for Ekeland's ϵ- variational principle for vector valued functions[J]. *Mathematical Methods of Operations Research*, 1998, **48**(1): 97-103.

[8] Huang X X. Stability in vector-valued and set-valued optimization[J]. *Mathematical Methods of Operations Research*, 2000, **52**(2): 185-193.

[9] Lucchetti R E, Miglierina E. Stability for convex vector optimization problems[J]. *Optimization*, 2004, **53**(5/6): 517-528.

[10] Oppezzi P, Rossi A M. A convergence for vector valued functions[J]. *Optimization*, 2008, **57**(3): 435-448.

[11] Oppezzi P, Rossi A M. A convergence for infinite dimensional vector valued functions[J]. *Journal of Global Optimization*, 2008, **42**(4): 577-586.

[12] Crespi G P, Papalia M, Rocca M. Extended well-posedness of quasiconvex vector optimization problems[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2009, **141**(2): 285-297.

[13] Crespi G P, Guerraggio A, Rocca M. Well-posedness in vector optimization problems and vector variational inequalities[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2007, **132**(1): 213-226.

[14] Lalitha C S, Chatterjee P. Well-posedness and stability in vector optimization problems using Henig proper efficiency[J]. *Optimization*, 2013, **62**(1): 155-165.

[15] Zeng J, Li S J, Zhang W Y, Xue X W. Stability results for convex vector-valued optimization problems[J]. *Positivity*, 2011, **15**(3): 441-453.

[16] Peng Z Y, Yang X M. Semicontinuity of the solution mappings to weak generalized parametric Ky Fan inequality problems with trifunctions[J]. *Optimization*, 2012, doi: 10.1080/02331934.2012.660693.

[17] Lalitha C S, Chatterjee P. Stability for properly quasiconvex vector optimization problem[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2012, **155**(2): 492-506.

[18] Lalitha C S, Chatterjee P. Stability and scalarization of weak efficient, efficient and Henig proper efficient sets using generalized quasiconvexities[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2012, **155**(3): 941-961.

Stability of the Sets of Efficient Points of Vector-Valued Optimization Problems

ZHAO Yong[1], PENG Zai-yun[2], ZHANG Shi-sheng[3]

(1. *Department of Mathematics*, *Chongqing Normal University*, *Chongqing* 400047, *P. R. China*;

2. *Department of Mathematics*, *Chongqing Jiaotong University*, *Chongqing* 400074, *P. R. China*;

3. *Department of Statistics and Mathematics*, *Yunnan University of Finance and Economics*, *Kunmin* 650224, *P. R. China*)

Abstract: By using quasi C-convex function and recession cone property, the stability of efficient points sets to vector optimization problems without the assumption of compactness was established. The lower part of the Painlevé-Kuratowski convergence of the sets for efficient points of perturbed problems to the corresponding efficient sets for the vector optimization problems was obtained, where the perturbation was performed on both the objective function and the feasible set. These results extend and improve the corresponding ones in the literature (Attouch H, Riahi H. Stability results for Ekeland's ϵ- variational principle and cone extremal solution; Huang X X. Stability in vector-valued and set-valued optimization), then examples are given to illustrate our main results.

Key words: vector optimization problem; Painlevé-Kuratowski convergence; stability