文章编号:1000-0887(2013)05-0496-10

非线性脉冲状态依赖捕食被捕食模型的定性分析*

王　刚，　唐三一

(陕西师范大学 数学与信息科学学院, 西安 710062)

(我刊编委唐三一来稿)

摘要： 由于资源的有限性以及害虫群体对杀虫剂的抗性发展等因素,使得杀虫剂对害虫的杀死率具有饱和效应.因此,当害虫的数量达到经济阈值时, 杀虫剂对害虫的杀死率与经济阈值有关.为了刻画上述饱和效应,建立了一类非线性脉冲状态依赖捕食被捕食模型.利用 Lambert W 函数和脉冲半动力系统的相关技巧,分析了模型阶 1 正周期解的存在性和稳定性, 得到了相应的充分条件.进而讨论了非线性脉冲与线性脉冲对阶 1 周期解存在性的影响.

关　键　词： 非线性脉冲； 捕食被捕食系统； 阶 1 周期解； 存在性； 稳定性

中图分类号： O241.8；O242　　　**文献标志码：** A

DOI： 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.05.008

引　　言

历史上,Volterra(1931) 通过建立经典的捕食被捕食模型,成功地解释了海港鱼类繁殖增长的生物现象[1-5],后来称之为 Volterra 原理.该原理在害虫综合治理中也具有非常重要的指导意义.如果将害虫的数量以 $x(t)$ 表示, 天敌的总数以 $y(t)$ 表示,Volterra 提出了如下的害虫-天敌生态模型：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = x(t)(a - by(t)), \\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = y(t)(cx(t) - d),\end{cases} \tag{1}$$

其中, a,b,c 和 d 都是正数.

基于模型(1)的基本假设是：(i) 在没有天敌的情况下,害虫以指数的方式无限增长, 其增长率表现在模型(1)中的 $ax(t)$ 项上[1]；(ii) 天敌的存在使得害虫的单位增长率减少,且减少量正比于天敌以及害虫的数量, 即 $-bx(t)y(t)$ 项；(iii) 在没有害虫作为食物来源的情况下,天敌将以指数形式减少, 即模型(1)中的 $-dy(t)$ 项；(iv) 害虫的存在使得天敌的增长率增加了 $cx(t)y(t)$, 即其增加量既与害虫的数量成正比也与天敌的数量成正比.

---

* **收稿日期：** 2013-04-03
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(11171199)
作者简介： 王刚(1985—), 男, 湖北人,硕士(E-mail：wanggang19851213@126.com)；
唐三一(1970—), 男, 教授, 博士(通讯作者. E-mail：sytang@snnu.edn.cn).

综合害虫治理的目标不是根除害虫,而是控制害虫数量使其不超过经济阈值(V_{ET}),即当害虫的数量达到 V_{ET}[2,5] 时,必须采取综合治理策略控制害虫的数量,例如投放天敌,喷洒杀虫剂等.如果假设每次喷洒杀虫剂后瞬间杀死率与当时害虫数量成正比,比例常数为 $p\in[0,1)$,且同时投放常数量的天敌 τ,则得到如下线性脉冲状态依赖脉冲微分方程模型[2]:

$$
\begin{cases}
\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=x(t)(a-by(t)),\\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=y(t)(cx(t)-d),\end{aligned}\right\} & x\neq V_{\mathrm{ET}},\\
\left.\begin{aligned}x(t^+)=(1-p)x(t),\\ y(t^+)=y(t)+\tau,\end{aligned}\right\} & x=V_{\mathrm{ET}},\\
x(0^+)=x_0^+<V_{\mathrm{ET}},\ y(0^+)=y_0^+.
\end{cases}
\tag{2}
$$

为了后面讨论的方便,这里先列出文献[2]中得到的关于模型(2)阶1周期解存在与稳定的相关结论.为此记 $A_0=cpV_{\mathrm{ET}}-d\ln(1/(1-p))$,且当 $p=0$ 时有 $A_0=0$.主要结论有:(i)如果 $\tau=0,0<p<1$ 且 $A_0=0$,则对任意 $0<y_0^+\leqslant a/b$,模型(2)存在初值为$((1-p)V_{\mathrm{ET}},y_0^+)$的阶1正周期解,且该阶1正周期解是稳定的,但不是吸引的;(ii)如果 $\tau=0,0<p<1$ 且 $A_0<0$,则模型(2)不存在阶1正周期解;(iii)如果 $\tau\geqslant a/b$ 且 $p=0$,则模型(2)存在唯一的全局稳定的阶1正周期解;(iv)如果 $\tau>0$,$0<p<1$ 且 $A_0\leqslant 0$,则模型(2)存在唯一的全局稳定的阶1正周期解.但是当 $0<\tau<a/b$ 且 $p=0$ 时,脉冲系统(2)会出现鞭打现象,故这里不予考虑[2].

模型(2)中假设每次喷洒农药后,害虫的杀死率是一个常数 p.然而由于资源的有限性以及害虫对杀虫剂的抗性发展等因素,杀虫剂对害虫的杀死率具有一定的饱和效应.为了刻画杀虫剂对害虫的这种饱和效应,常数杀死率可以看成是一个依赖害虫数量的饱和函数,即

$$p(x(t))=\frac{P_{\max}x(t)}{x(t)+\theta},$$

其中,$P_{\max}\in[0,1)$ 为最大杀死率,且 $\theta>0$ 为半饱和常数,即杀死率为最大杀死率的一半时所对应的害虫的数量.这时可以建立如下非线性脉冲状态依赖脉冲模型

$$
\begin{cases}
\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=x(t)(a-by(t)),\\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=y(t)(cx(t)-d),\end{aligned}\right\} & x\neq V_{\mathrm{ET}},\\
\left.\begin{aligned}x(t^+)=(1-p(x(t)))x(t),\\ y(t^+)=y(t)+\tau,\end{aligned}\right\} & x=V_{\mathrm{ET}},\\
x(0^+)=x_0^+<V_{\mathrm{ET}},\ y(0^+)=y_0^+.
\end{cases}
\tag{3}
$$

本文的主要目的是通过确定非线性状态依赖脉冲模型(3)脉冲点序列的 Poincaré 映射,研究系统阶1正周期解[2,6-7]的存在性与稳定性,给出相应的充分条件.最后,通过比较模型(2)和模型(3)阶1周期解存在的条件,讨论了非线性脉冲对系统阶1周期解存在的影响.

1 预备知识

定义 1.1 Lambert W 函数是函数 $z\mapsto z\mathrm{e}^z$ 的多值反函数并且满足

$$\text{Lambert } W(z)\exp(\text{Lambert } W(z))=z. \tag{4}$$

从式(4)可以得到其导数满足

$$\text{Lambert } W'(z)=\frac{\text{Lambert } W(z)}{z(1+\text{Lambert } W(z))},\tag{5}$$

其中，$z\neq0$ 和 $z\neq-\mathrm{e}^{-1}$．当 $z>-1$ 时，函数 $z\exp(z)$ 具有正导数 $(z+1)\exp(z)$．定义 $z\exp(z)$ 在区间 $[-1,\infty)$ 上的反函数为 Lambert $W(0,z)\overset{\Delta}{=}$ Lambert $W(z)$．类似地，可以定义 $z\exp(z)$ 在区间 $(-\infty,-1]$ 上的反函数为 Lambert $W(-1,z)$．关于该函数的更多知识，参见文献[8]．

定理 1.1[9] 假定 z^* 是差分方程 $z_{n+1}=g(z_n)$ 的平衡态，且 $g(z)$ 连续可微．如果

$$|g'(z^*)|<1,\tag{6}$$

那么 z^* 是局部渐近稳定的．

2 阶 1 周期解的存在性

给定初始条件 (x_0^+,y_0^+)，假设 $(x(t),y(t))$ 是模型(3) 的任一解，那么 $(x(t),y(t))$ 满足下列关系：

$$c[x(t)-x_0^+]-d\ln\left(\frac{x(t)}{x_0^+}\right)=a\ln\left(\frac{y(t)}{y_0^+}\right)-b[y(t)-y_0^+].$$

不失一般性，假定上面的解经历 $k(k\leqslant+\infty)$ 次脉冲，并记对应点的坐标为 $P_i=(V_{\mathrm{ET}},y_i)$，$P_i^+=((1-p(V_{\mathrm{ET}}))V_{\mathrm{ET}},y_i^+)$，$i=0,1,2,\cdots,k$．因为点 P_{i+1} 和点 P_i^+ 位于同一相轨线上，所以由上述关系式可推得

$$-\frac{b}{a}y_{i+1}\exp\left(-\frac{b}{a}y_{i+1}\right)=-\frac{b}{a}y_i^+\exp\left(-\frac{b}{a}y_i^++\frac{A}{a}\right),\qquad i=0,1,\cdots,k,$$

其中

$$A=cp(V_{\mathrm{ET}})V_{\mathrm{ET}}-d\ln\left(\frac{1}{1-p(V_{\mathrm{ET}})}\right)=$$
$$\frac{cP_{\max}V_{\mathrm{ET}}}{V_{\mathrm{ET}}+\theta}V_{\mathrm{ET}}-d\ln\left(\frac{V_{\mathrm{ET}}+\theta}{(1-P_{\max})V_{\mathrm{ET}}+\theta}\right).$$

根据 Lambert W 函数的性质可知

$$y_{i+1}=-\frac{a}{b}\text{Lambert } W\left(-\frac{b}{a}y_i^+\exp\left(-\frac{b}{a}y_i^++\frac{A}{a}\right)\right),\qquad i=0,1,\cdots,k\tag{7}$$

和

$$y_{i+1}^+=-\frac{a}{b}\text{Lambert } W\left(-\frac{b}{a}y_i^+\exp\left(-\frac{b}{a}y_i^++\frac{A}{a}\right)\right)+\tau\overset{\Delta}{=}g(y_i^+).\tag{8}$$

下面先讨论上式的定义域．如果 $A\leqslant0$，容易证明对任意 $y_i^+\geqslant0$，等式(7) 和(8) 是好定义的．如果 $A>0$，根据 Lambert W 函数的定义要求

$$-\frac{b}{a}z\exp\left(-\frac{b}{a}z\right)\exp\left(\frac{A}{a}\right)\geqslant-\mathrm{e}^{-1}.$$

可以得到当 $A>0$ 时，如果

$$z\in(0,z_{\min}]\cup[z_{\max},+\infty)$$

时等式(7)和(8)是好定义的，其中

$$z_{\min}=-\frac{a}{b}\text{Lambert } W\left(-\exp\left(-1-\frac{A}{a}\right)\right),$$

$$z_{\max}=-\frac{a}{b}\text{Lambert } W\left(-1,-\exp\left(-1-\frac{A}{a}\right)\right).$$

因此，根据模型(3)解的特点和上面的讨论，脉冲点序列确定的 Poincaré 映射如下：

$$y_{i+1}^{+}=\begin{cases}g(y_i^{+}),\ \tau<y_i^{+}\leqslant\dfrac{a}{b}+\tau, & A\leqslant 0,\\ g(y_i^{+}),\ y_i^{+}\in((0,z_{\min}]\cup[z_{\max},+\infty))\cap\left(\tau,\dfrac{a}{b}+\tau\right], & A>0.\end{cases}$$

从 Poincaré 映射的定义域可以看出，当 $A>0$ 时的情况非常复杂. 为了使考虑的问题简化，本文只考虑 $A\leqslant 0$ 的情形. 同时根据 Poincaré 映射的性质,其平衡态的存在性和稳定性隐含了模型(3)阶 1 周期解的存在性和稳定性. 此时差分方程(8)若存在平衡态 y^{*}，则有

$$-\frac{a}{b}\,\text{Lambert }W\left(-\frac{b}{a}y^{*}\exp\left(-\frac{b}{a}y^{*}+\frac{A}{a}\right)\right)+\tau=y^{*},$$

即

$$\text{Lambert }W\left(-\frac{b}{a}y^{*}\exp\left(-\frac{b}{a}y^{*}+\frac{A}{a}\right)\right)=-\frac{b}{a}(y^{*}-\tau).\tag{9}$$

从 Lambert W 函数的定义可知

$$-\frac{b}{a}(y^{*}-\tau)\exp\left(-\frac{b}{a}(y^{*}-\tau)\right)=-\frac{b}{a}y^{*}\exp\left(-\frac{b}{a}y^{*}+\frac{A}{a}\right).$$

于是记

$$h(y)=\exp\left(\frac{A-b\tau}{a}\right)-\left(1-\frac{\tau}{y}\right),$$

则平衡态满足 $h(y^{*})=0$.

下面根据投放天敌的数量 τ 和最大杀死率 $P_{\max}$ 的范围来讨论正平衡态(阶 1 正周期解)的存在性. 当害虫数量达到经济阈值 V_{ET} 时，如果只喷洒杀虫剂而不投放天敌,则得到下面的情形.

情形 1　$\tau=0,\ 0<P_{\max}<1$ 且 $A=0$

注意到当 $\tau=0$ 有

$$h(y)=0\Leftrightarrow A=0\Leftrightarrow\frac{cP_{\max}V_{ET}}{V_{ET}+\theta}V_{ET}=d\ln\left(\frac{V_{ET}+\theta}{(1-P_{\max})V_{ET}+\theta}\right).$$

所以,如果 $\tau=0,\ 0<P_{\max}<1$ 且

$$\frac{cP_{\max}V_{ET}}{V_{ET}+\theta}V_{ET}=d\ln\left(\frac{V_{ET}+\theta}{(1-P_{\max})V_{ET}+\theta}\right),$$

则对任意 $0<y_0^{+}\leqslant a/b$,有 $h(y_0^{+})=0$. 因此,在情形 1 下模型(3)存在初值为

$$\left(\frac{(1-P_{\max})V_{ET}+\theta}{V_{ET}+\theta}V_{ET},y_0^{+}\right)$$

的阶 1 正周期解.

情形 2　$\tau=0,\ 0<P_{\max}<1$ 且 $A<0$

显然,情形 2 下 $h(y)>0$ 恒成立. 因此，如果 $\tau=0,0<P_{\max}<1$ 且

$$\frac{cP_{\max}V_{ET}}{V_{ET}+\theta}V_{ET}<d\ln\left(\frac{V_{ET}+\theta}{(1-P_{\max})V_{ET}+\theta}\right),$$

则 $h(y)$ 不存在零点，也即模型(3)不存在阶 1 正周期解.

情形 3　$\tau\geqslant a/b$ 且 $P_{\max}=0$

情形 3 的条件说明，在害虫控制过程中如果不使用化学控制(即 $P_{\max}=0$)，而只采用生物控制，那么为了有效控制害虫的增长,就必须要求天敌投放常数 τ 适当的大. 从模型(3) 的第 1 个方程可知，如果 $\tau\geqslant a/b$ 就能够保证害虫数量递减.

由 $P_{max}=0$ 可知 $A=0$. 此时, $h(\tau)>0$ 且 $h(y)$ 在 $(\tau, a/b+\tau]$ 上严格单调递减. 令 $h(\tau+a/b)\leqslant 0$, 则

$$\ln\left(1+\frac{b\tau}{a}\right)\leqslant\frac{b\tau}{a}.$$

利用对数不等式可知上式成立. 从而可知, 如果 $\tau\geqslant a/b$ 且 $P_{max}=0$, 那么方程(8)存在唯一的正平衡态. 此时, 模型(3)存在唯一的阶1正周期解.

如果采用综合害虫治理策略控制害虫, 即当害虫的数量达到经济阈值 V_{ET} 时, 采用化学控制和生物控制, 我们有下面的情形4.

情形4　$\tau>0$, $0<P_{max}<1$ 且 $A\leqslant 0$

容易知道 $h(\tau)>0$ 且 $h(y)$ 在 $(\tau, a/b+\tau]$ 上严格单调递减. 令 $h(\tau+a/b)\leqslant 0$, 则

$$A\leqslant b\tau-a\ln\left(\frac{b\tau}{a}+1\right).$$

利用对数不等式得到 $b\tau-a\ln(b\tau/a+1)>0$. 由于 $A\leqslant 0$, 从而可以得到如下结论:

如果 $\tau>0$, $0<P_{max}<1$ 且

$$\frac{cP_{max}V_{ET}}{V_{ET}+\theta}V_{ET}\leqslant d\ln\left(\frac{V_{ET}+\theta}{(1-P_{max})V_{ET}+\theta}\right),$$

则差分方程(8)存在唯一的正平衡态. 因此模型(3)存在唯一的阶1正周期解.

3　阶1周期解的局部稳定性

首先, 由 Poincaré 映射的表达式可得

$$g'(y)=-\frac{a}{b}\frac{\text{Lambert }W\left(-\frac{b}{a}y\exp\left(-\frac{b}{a}y+\frac{A}{a}\right)\right)}{1+\text{Lambert }W\left(-\frac{b}{a}y\exp\left(-\frac{b}{a}y+\frac{A}{a}\right)\right)}\left(\frac{1}{y}-\frac{b}{a}\right).$$

对应于定理1.1的条件, 有

$$\left|-\frac{a}{b}\frac{\text{Lambert }W\left(-\frac{b}{a}y^*\exp\left(-\frac{b}{a}y^*+\frac{A}{a}\right)\right)}{1+\text{Lambert }W\left(-\frac{b}{a}y^*\exp\left(-\frac{b}{a}y^*+\frac{A}{a}\right)\right)}\left(\frac{1}{y^*}-\frac{b}{a}\right)\right|<1.$$

上式等价于

$$-\frac{a}{b}\frac{\text{Lambert }W\left(-\frac{b}{a}y^*\exp\left(-\frac{b}{a}y^*+\frac{A}{a}\right)\right)}{1+\text{Lambert }W\left(-\frac{b}{a}y^*\exp\left(-\frac{b}{a}y^*+\frac{A}{a}\right)\right)}\left(\frac{1}{y^*}-\frac{b}{a}\right)<1 \tag{10}$$

且

$$-\frac{a}{b}\frac{\text{Lambert }W\left(-\frac{b}{a}y^*\exp\left(-\frac{b}{a}y^*+\frac{A}{a}\right)\right)}{1+\text{Lambert }W\left(-\frac{b}{a}y^*\exp\left(-\frac{b}{a}y^*+\frac{A}{a}\right)\right)}\left(\frac{1}{y^*}-\frac{b}{a}\right)>-1. \tag{11}$$

从 Lambert W 函数的定义可知

$$1+\text{Lambert }W\left(-\frac{b}{a}y^*\exp\left(-\frac{b}{a}y^*+\frac{A}{a}\right)\right)>0.$$

于是, 式(10)等价于

$$\text{Lambert } W\left(-\frac{b}{a}y^*\exp\left(-\frac{b}{a}y^* + \frac{A}{a}\right)\right) > -\frac{b}{a}y^*.$$

进而,由式(9)可知

$$-\frac{b}{a}(y^* - \tau) > -\frac{b}{a}y^*.$$

易知,上式成立当且仅当 $\tau > 0$.

同时, 式(11)等价于

$$\text{Lambert } W\left(-\frac{b}{a}y^*\exp\left(-\frac{b}{a}y^* + \frac{A}{a}\right)\right)\left(\frac{1}{y^*} - \frac{2b}{a}\right) < \frac{b}{a}.$$

将式(9)代入其中得

$$-\frac{b}{a}(y^* - \tau)\left(\frac{1}{y^*} - \frac{2b}{a}\right) < \frac{b}{a}.$$

上式关于 y^* 解得

$$y_2 < y^* < y_1,$$

其中

$$y_{1,2} = \frac{a + b\tau \pm \sqrt{a^2 + b^2\tau^2}}{2b}.$$

利用基本不等式可证得

$$y_2 < \tau < y_1 < \frac{a}{b} + \tau,$$

从而得到 $\tau < y^* < y_1$.

因此, 如果

$$0 < \tau < y^* < \frac{a + b\tau + \sqrt{a^2 + b^2\tau^2}}{2b},$$

那么 y^* 是局部渐近稳定的. 下面可以根据上面的讨论讨论前面讨论的 3 种情形下阶 1 周期解的局部稳定性,即情形 1、情形 2 和情形 4.

在情形 1 的条件下,由差分方程平衡态稳定性的定义[10]可证:任一正平衡态 $y^* \in (0, a/b)$ 是稳定的,但不是吸引的. 因此,情形 1 的条件下所得到的任意阶 1 正周期解是稳定的,但不吸引.

在情形 3 与情形 4 的条件下, 有 $\tau > 0$. 令 $h((a + b\tau + \sqrt{a^2 + b^2\tau^2})/(2b)) < 0$, 则

$$A < b\tau + a\ln\left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2\tau^2} - b\tau}{a}\right).$$

容易证明 $b\tau + a\ln((\sqrt{a^2 + b^2\tau^2} - b\tau)/a) > 0$. 也就得到, 当 $\tau > 0$ 时, 有

$$\tau < y^* < \frac{a + b\tau + \sqrt{a^2 + b^2\tau^2}}{2b}.$$

由本节前面的结论可知, 情形 3 与情形 4 的条件下所得到的任意阶 1 正周期解是局部渐近稳定的.

4　阶 1 周期解的全局稳定性

明显地, 情形 1 下所得到的任一阶 1 正周期解是不全局稳定的. 对于情形 3 和情形 4 中阶 1 正周期解的全局稳定性的讨论相似,下面仅就情形 4 给出证明.

先考虑 $\tau \geqslant a/b$ 和 $0 < P_{\max} < 1$ 的情况. 容易验证对任意的 $y \in (\tau, \tau + a/b)$ 有 $g'(y) < 0$. 下证 $g'(y) > -1$ 成立对任意的 $y \in (\tau, \tau + a/b)$, 即证明不等式

$$\text{Lambert } W\left(-\frac{b}{a}y\exp\left(-\frac{b}{a}y + \frac{A}{a}\right)\right)\frac{2by - a}{by} > -1.$$

上面的不等式等价于

$$\text{Lambert } W\left(-\frac{b}{a}y\exp\left(-\frac{b}{a}y + \frac{A}{a}\right)\right) > -\frac{by}{2by - a}.$$

由 $y > a/b$ 有 $-by/(2by - a) > -1$. 因此, 根据 Lambert W 函数的性质可得

$$-\frac{b}{a}y\exp\left(-\frac{b}{a}y + \frac{A}{a}\right) > -\frac{by}{2by - a}\exp\left(-\frac{by}{2by - a}\right),$$

化简得

$$\frac{2by - a}{a} < \exp\left(\frac{by}{a} - \frac{by}{2by - a} - \frac{A}{a}\right).$$

令 $u = by/a > 1$, 则上式为

$$2u - 1 < \exp\left(u - \frac{u}{2u - 1} - \frac{A}{a}\right),$$

化简得

$$(2u - 1)\ln(2u - 1) - \left[2u^2 - 2\left(1 + \frac{A}{a}\right)u + \frac{A}{a}\right] < 0. \tag{12}$$

为了证明上式成立,不妨设

$$F(u) = (2u - 1)\ln(2u - 1) - \left[2u^2 - 2\left(1 + \frac{A}{a}\right)u + \frac{A}{a}\right],$$

$$u \in \left(\frac{b\tau}{a}, 1 + \frac{b\tau}{a}\right) \subseteq \left(1, 1 + \frac{b\tau}{a}\right).$$

于是, 可以计算得到

$$F'(u) = 2\left[\ln(2u - 1) - 2(u - 1) + \frac{A}{a}\right]$$

和

$$F''(u) = \frac{8(1 - u)}{2u - 1} < 0.$$

从而, $F'(u) < F'(1) = 2A/a \leqslant 0$. 也就是说, $F(u)$ 在 $(1, 1 + b\tau/a)$ 严格单调递减. 又因为

$$F(1) = \frac{A}{a} \leqslant 0,$$

所以

$$F(u) < 0, \qquad \forall u \in \left(1, 1 + \frac{b\tau}{a}\right).$$

自然可得

$$F(u) < 0, \qquad \forall u \in \left(\frac{b\tau}{a}, 1 + \frac{b\tau}{a}\right),$$

即式(12)成立. 进而证明

$$-1 < g'(y) < 0, \qquad y \in \left(\tau, \tau + \frac{a}{b}\right).$$

在上述结论的基础上, 利用 Lagrange 中值定理和子序列方法很容易证明 y^* 是全局稳定

的. 因此, 如果 $\tau \geqslant a/b$, $0 < P_{\max} < 1$ 且

$$\frac{cP_{\max}V_{ET}}{V_{ET}+\theta}V_{ET} \leqslant d\ln\left(\frac{V_{ET}+\theta}{(1-P_{\max})V_{ET}+\theta}\right),$$

那么阶 1 正周期解是全局稳定的.

如果 $0 < \tau < a/b$ 且 $0 < P_{\max} < 1$, 则 $-1 < g'(y) < 0, \forall y \in (a/b, a/b+\tau)$. 于是,再考察区间 $(\tau, a/b]$. 显然, $g'(y) > 0, \forall y \in (\tau, a/b)$. 此时, 证明 $g'(y) < 1$ 等价于证明

$$-\frac{a}{b}\frac{\text{Lambert } W\left(-\frac{b}{a}y\exp\left(-\frac{b}{a}y+\frac{A}{a}\right)\right)}{1+\text{Lambert } W\left(-\frac{b}{a}y\exp\left(-\frac{b}{a}y+\frac{A}{a}\right)\right)}\left(\frac{1}{y}-\frac{b}{a}\right) < 1. \tag{13}$$

从上式得到

$$-1 < -\frac{by}{a} < \text{Lambert } W\left(-\frac{b}{a}y\exp\left(-\frac{b}{a}y+\frac{A}{a}\right)\right). \tag{14}$$

由 Lambert W 函数的定义可知

$$-\frac{b}{a}y\exp\left(-\frac{b}{a}y\right) < -\frac{b}{a}y\exp\left(-\frac{b}{a}y+\frac{A}{a}\right).$$

易知,上式成立只须 $A < 0$. 另外, 容易知道当 $A < 0$ 时, $g'(a/b) = 0$. 因此当 $A < 0$ 时

$$0 < g'(y) < 1, \qquad \forall y \in \left(\tau, \frac{a}{b}\right)$$

恒成立. 进而可以证明当 $A < 0$ 时, y^* 是全局稳定的.

因此, 如果 $0 < \tau < a/b$, $0 < P_{\max} < 1$ 且

$$\frac{cP_{\max}V_{ET}}{V_{ET}+\theta}V_{ET} < d\ln\left(\frac{V_{ET}+\theta}{(1-P_{\max})V_{ET}+\theta}\right),$$

那么阶 1 正周期解是全局稳定的.

若 $A = 0$, 则容易验证

$$h\left(\frac{a/b+(\tau+a/b)}{2}\right) > 0.$$

从而可知

$$y^* \in \left(\frac{a/b+(\tau+a/b)}{2}, \tau+\frac{a}{b}\right).$$

对任意 $y_1^+ \in [a/b, \tau+a/b]$, 由

$$-1 < g'(y) < 0, \qquad y \in \left(\frac{a}{b}, \tau+\frac{a}{b}\right),$$

利用 Lagrange 定理可证

$$|y_2^+ - y^*| < |y_1^+ - y^*|,$$

从而说明 $y_2^+ \in (a/b, \tau+a/b)$. 类似地

$$y_n^+ \in \left(\frac{a}{b}, \tau+\frac{a}{b}\right), |y_{n+1}^+ - y^*| < |y_n^+ - y^*|, \qquad n = 2, 3, \cdots.$$

于是采用子序列方法可以证明 $\lim_{n\to+\infty} y_n^+ = y^*$.

因为对任意的 $y \in (\tau, a/b)$ 有 $g(y) - y = \tau$, 所以对任意 $y_1^+ \in (\tau, a/b)$, 存在 n_0 使得 $y_{n_0}^+ \geqslant a/b$. 从而可以归结到上面的情形. 因此,正平衡态 y^* 是全局稳定的, 进而阶 1 正周期解全局稳定.

5 讨　　论

本文集中研究了非线性脉冲动力学模型(3)的阶1正周期解的存在性和稳定性，得到了相应的 Poincaré 映射. 然后通过差分方程平衡态的存在、局部稳定和全局稳定的证明方法,完整地研究了 $A \leqslant 0$ 情形下模型的定性行为. 但是对于 $A > 0$ 的情形,由于 Poincaré 映射定义域的复杂性，这对采用差分方程的有关理论知识带来一定的困难，我们将在后期的工作中加以研究.

正如介绍中论述的那样,本文的另一个目的是讨论非线性脉冲对系统阶1周期解存在性的影响,即与线性脉冲进行比较有什么本质区别. 注意到当 $\theta = 0$ 时非线性脉冲系统变为线性脉冲系统,其阶1周期解存在性的条件已经在介绍中给出. 为了比较方便，记 $v = \theta/V_{ET}$，则模型(3)中情形4的存在性结论可以写为

如果 $\tau > 0$, $0 < P_{max} < 1$ 且

$$A_0 \leqslant d\left[(1+v)\ln\left(\frac{1+v}{(1-P_{max})+v}\right) - \ln\left(\frac{1}{1-P_{max}}\right)\right], \tag{15}$$

那么模型(3)存在惟一阶1正周期解.

令

$$G(v) = (1+v)\ln\left(\frac{1+v}{(1-P_{max})+v}\right) - \ln\left(\frac{1}{1-P_{max}}\right),$$

则

$$G'(v) = \ln\left(\frac{1+v}{(1-P_{max})+v}\right) - \frac{P_{max}}{(1-P_{max})+v} = \ln\left(1+\frac{P_{max}}{(1-P_{max})+v}\right) - \frac{P_{max}}{(1-P_{max})+v} < 0.$$

于是 $G(v)$ 在区间$(\tau, \tau + a/b)$ 内严格单调递减. 所以

$$G_{max} = G(0) = 0.$$

对应于模型(2)的条件可以表示为

$$A_0 \leqslant dG_{max} = 0. \tag{16}$$

结合 $G(v)$ 的单调递减性可知，若存在 $\theta_0 > 0$ 使得式(15)成立，则式(16)成立(注意到 $G(\theta_0) < G_{max}$).

因此，当 $\tau > 0$, $0 < P_{max} < 1$ 时，若模型(3)存在阶1正周期解，则模型(2)在对应的条件下必有惟一阶1正周期解. 但反之不然. 这是因为

$$A_0 \leqslant dG(0) \nRightarrow A_0 \leqslant dG(\theta),$$

其中 $\theta > 0$. 即式(16)成立不一定有式(15)成立. 由此可见,模型(3)阶1周期解的存在范围比模型(2)阶1周期解的存在范围大. 相似地可以讨论其它几种情况，这里不再重复.

参考文献(References)：

[1] 马知恩，周义仓. 常微分方程定性与稳定性方法[M]. 北京：科学出版社，2001. (MA Zhi-en, ZHOU Yi-cang. *The Qualitative and Stable Method of Ordinary Differential Equation*[M]. Beijing: Science Press, 2001. (in Chinese))

[2] Tang S Y, Cheke R A. State-dependent impulsive models of integrated pest management (IPM) strategies and their dynamic consequences[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 2005, **50**(3): 257-292.

[3] 丁同仁，李承治．常微分方程教程[M]．北京：高等教育出版社，2004．(DING Tong-ren, LI Cheng-zhi. *The Course of Ordinary Differential Equation*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2004. (in Chinese))

[4] NIE Lin-fei, PENG Ji-gen, TENG Zhi-dong, HU Lin. Existence and stability of periodic solution of a Lotka-Volterra predator-prey model with state-dependent impulsive effects[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2009, **224**(2): 544-555.

[5] Tang S Y, Chen L S. Modelling and analysis of integrated pest management strategy[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, *Ser B*, 2004, **4**(3): 759-768.

[6] ZENG Guang-zhao, CHEN Lan-sun, SUN Li-hua. Existence of periodic solution of order one of planar impulsive autonomous system[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2006, **186**(2): 466-481.

[7] HU Zhao-ping, HAN Mao-an. Periodic solutions and bifurcations of first-order periodic impulsive differential equations[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2009, **19**(8): 2515-2530.

[8] Corless R M, Gonnet G H, Hare D E, Jeffrey D J, Knuth D E. On the Lambert *W* function[J]. *Advances in Computional Mathematics*, 1996, **5**(1): 329-359.

[9] 唐三一，肖燕妮．单种群动力系统[M]．北京：科学出版社，2008．(TANG San-yi, XIAO Yan-ni. *The Dynamical System of the Single Population*[M]. Beijing: Science Press, 2008. (in Chinese))

[10] 肖燕妮，周义仓，唐三一．生物数学原理[M]．西安：西安交通大学出版社，2012．(XIAO Yan-ni, ZHOU Yi-cang, TANG San-yi. *The Principle of Biomathematics*[M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2012. (in Chinese))

Qualitative Analysis of Prey-Predator Model With Nonlinear Impulsive Effects

WANG Gang,　TANG San-yi

(*College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University*, *Xi'an* 710062, *P. R. China*)

Abstract: Due to the limited resources as well as the development of pests' resistance to pesticides, the instant killing rate of pesticide applications with respect to the pest could depend on the density of pest populations. Thus, the instant killing rate is a function of economic threshold (ET) once the density of pest population reaches the ET and integrated control tactics are implemented. In order to depict the saturation effects, a prey-predator model with nonlinear state-dependent impulsive effects was proposed. Using the Lambert *W* function and the analytical techniques of the impulsive semi-dynamical system, the sufficient conditions which guaranteed the existence, local and global stability of order 1 positive periodic solution of the proposed model were obtained. Further, the effects of nonlinear impulse on the existence of order 1 periodic solution was discussed.

Key words: nonlinear pulse; prey-predator model; order 1 periodic solution; existence; stability