

任意多连通截面扭转应力函数的有限元解法^{*}

王家林, 何琳, 张德立

(重庆交通大学 土木建筑学院, 重庆 400074)

摘要: 杆件扭转问题的求解,主要有基于扭转理论翘曲函数的边界元法和有限元法、基于薄壁杆件理论的数值解法和基于扭转理论应力函数的有限元法。根据任意多连通截面直杆扭转问题的应力函数理论,讨论并改进了与微分方程及定解条件等效的泛函,在此基础上推导了求解多连通截面扭转应力函数的有限元列式,将扭转问题的翘曲位移单值条件转化为边界节点上的集中荷载。采用主从节点法满足孔洞边界上应力函数的同值条件,实现了任意多连通复杂截面扭转应力函数的有限元直接求解,通过应力函数积分获得截面的扭转常数。算例验证了方法的可行性和有效性。

关键词: 多连通截面; 扭转; 应力函数; 有限元

中图分类号: O242.21;O343 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.05.007

引言

杆件是工程结构的重要组成构件,其扭转变形、应力分布和抗扭属性是杆系结构截面设计和整体分析的重要内容。杆件扭转的分析方法主要有基于扭转理论翘曲函数的边界元法^[1-4]和有限元法^[5],基于扭转理论应力函数的有限元法^[6-10]和基于薄壁杆件理论的各种数值解法^[11-15]。

弹性扭转理论的 Prandtl 应力函数解法^[16-19]将扭转问题转化为 Poisson 方程进行求解。对于简单形状的截面,由 Poisson 方程可以得到解析解。对于多连通任意复杂截面,文献^[16]基于最小余能原理提出了与扭转问题微分方程和定解条件等价的泛函,但是没有进一步提供相应的有限元列式。崔振山等^[8]利用 Galerkin 法建立了单连通截面的等效泛函,并采用虚单元法和同值节点法解决复杂多连通域的扭转应力函数计算问题。李永奇等^[9]根据温度场控制微分方程与扭转应力函数控制方程的共性提出了一种化复为单的温度场模拟求解方法,何琳等^[10]直接针对任意多连通复杂截面,提出了一种扭转应力函数温度场比拟解法避免了文献^[9]的数值不稳定性。

本文从扭转应力函数出发,将扭转问题的翘曲位移单值条件转化为边界上的集中荷载,采用主从节点法实现孔洞边界上应力函数为常数的同值条件,直接分析多连通区域,实现了任意多连通复杂截面扭转应力函数的有限元直接求解。

* 收稿日期: 2012-12-28; 修订日期: 2013-03-22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(钢箱-砼组合拱结构性能与分析方法研究)(51078373)

作者简介: 王家林(1968—),男,重庆万州人,教授,博士(通讯作者。E-mail: jialinwang@163.com)

1 扭转问题的控制微分方程及定解条件^[16-19]

关于扭转问题的应力函数理论在文献[16-19]等中有详细的推导,下面作简要介绍.

1.1 域内的控制微分方程

以 $\phi(x, y)$ 表示多连通截面的 Prandtl 扭转应力函数,在截面内有

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2. \quad (1)$$

1.2 边界条件

以 Γ_0 表示截面的外边界, $\Gamma_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 表示各孔洞对应的内边界,在各边界 $\Gamma_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ 上

$$\phi = \phi_i. \quad (2)$$

由于剪应力通过应力函数的偏导数计算,因此应力函数加减常量对计算结果无影响.通常在外边界上取 $\phi = 0$ 来形成单连通截面的定解条件.

1.3 翘曲位移的单值条件

对于单连通截面,在外边界上预先设定应力函数的值,其翘曲位移的单值条件自动得到满足.对于多连通截面,由于存在多条边界,在外边界上取 $\phi = 0$ 不能形成扭转问题的完备定解条件,需要补充关于各孔洞边界的翘曲位移单值条件进行求解.

以 $\Gamma_i^+ (i = 1, 2, \dots, n)$ 表示沿各孔洞正向(逆时针)的边界,翘曲位移的单值条件通过应力函数表现为

$$\oint_{\Gamma_i^+} \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = -2A_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

式中, $\partial \phi / \partial n$ 表示应力函数沿边界环线外法线方向的方向导数, A_i 表示环线所围的区域的面积.

1.4 扭转常数计算

对于多连通复杂截面,扭转常数的计算公式为

$$D = \frac{M}{G\alpha} = 2 \int_A \phi dA - 2\phi_0 A_0 + 2 \sum_{i=1}^n \phi_i A_i. \quad (4)$$

如果在外边界 Γ_0 上取 $\phi_0 = 0$, 则扭转常数为

$$D = 2 \int_A \phi dA + 2 \sum_{i=1}^n \phi_i A_i. \quad (5)$$

2 多连通截面扭转问题的等效泛函

对于单连通截面,当应力函数在外边界取值为 0 时,与扭转问题等价的泛函^[8]为(注:本文应力函数与文献[8]相差 1 个系数)

$$J = \int_{\Omega_0} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dA - \int_{\Omega_0} 2\phi dA. \quad (6)$$

上述泛函的积分区域 Ω_0 为对孔洞补上虚单元后的单连通截面.可以证明,泛函的极值条件 $\delta J = 0$ 与单连通截面扭转问题的定解条件等价.

下面以泛函式(6)为基础,导出可用于多连通截面的等效泛函.

对于具有 n 个孔洞的多连通截面,将包含孔洞的全截面 Ω_0 划分为实心截面区域 A 和各孔洞截面区域 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 则泛函式(6)成为

$$J = \int_A \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dA - \int_A 2\phi dA + \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dA - \sum_{i=1}^n \int_{A_i} 2\phi dA. \quad (7)$$

在各孔洞 A_i 内应力函数的同值性表现为在各孔洞区域内有

$$\phi = \phi_i. \quad (8)$$

于是,对于各孔洞 $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 有

$$\int_{A_i} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dA = 0, \quad (9)$$

$$\int_{A_i} 2\phi dA = 2\phi_i A_i, \quad (10)$$

则有

$$J = \int_A \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dA - \int_A 2\phi dA - \sum_{i=1}^n 2\phi_i A_i. \quad (11)$$

上式与泛函式(6)相比,积分区域已经转化为多连通问题的实际截面,此泛函与文献[16]¹⁹⁴的泛函只差一个比例系数,表明了式(11)泛函的正确性.利用该泛函,可以不必对孔洞区域补上虚单元.

对于外边界上应力函数不为0的情况,可以证明,与扭转问题等效的泛函为

$$J = \int_A \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dA - \int_A 2\phi dA + 2\phi_0 A_0 - \sum_{i=1}^n 2\phi_i A_i, \quad (12)$$

式中, ϕ_0 为外边界上的应力函数, A_0 为全截面 Ω_0 的面积.

3 基于扭转泛函的有限元列式

设截面用平面单元离散,某平面单元的各节点应力函数为 $\phi_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 对应的插值形函数为 N_i , 则单元内任一点处的应力函数可插值为

$$\phi = \sum_{i=1}^n N_i \phi_i = \{N_1 \quad \dots \quad N_n\} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \boldsymbol{\Phi}^e, \quad (13)$$

式中, $\mathbf{N} = \{N_1 \quad \dots \quad N_n\}$ 为形函数向量, $\boldsymbol{\Phi}^e = \{\phi_1 \quad \dots \quad \phi_n\}^T$ 为单元应力函数向量.

根据单元内的应力函数插值模式,应力函数对坐标的偏导数为

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} \phi_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \phi_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \boldsymbol{\Phi}^e, \quad (14)$$

其中

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} \end{bmatrix}$$

为形函数对坐标的偏导数矩阵.

在单元上,有

$$\begin{aligned}
 J^e &= \int_A \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dA - \int_A 2\phi dA = \\
 &\int_A \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{Bmatrix} dA - \int_A 2\mathbf{N}\Phi^e dA = \\
 &\int_A \frac{1}{2} \Phi^{eT} \mathbf{B}^T \mathbf{B} \Phi^e dA - \int_A 2\mathbf{N}\Phi^e dA = \\
 &\frac{1}{2} \Phi^{eT} \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{B} dA \Phi^e - \Phi^{eT} \int_A 2\mathbf{N}^T dA = \\
 &\frac{1}{2} \Phi^{eT} \mathbf{K}^e \Phi^e - \Phi^{eT} \mathbf{R}^e, \tag{15}
 \end{aligned}$$

式中, \mathbf{K}^e 和 \mathbf{R}^e 分别为单元刚度矩阵和单元等效节点荷载向量:

$$\mathbf{K}^e = \int_{A_0} \mathbf{B}^T \mathbf{B} dA, \tag{16}$$

$$\mathbf{R}^e = \int_{A_0} 2\mathbf{N}^T dA. \tag{17}$$

单元上泛函的变分为

$$\delta J^e = \delta \Phi^{eT} (\mathbf{K}^e \Phi^e - \mathbf{R}^e). \tag{18}$$

对于任意的 $\delta \Phi^e$, 要求 $\delta J = 0$, 可得单元平衡方程为

$$\mathbf{K}^e \Phi^e = \mathbf{R}^e. \tag{19}$$

组装各单元的单元刚度矩阵可得到整个问题的总体刚度矩阵 \mathbf{K}^s , 组装各单元的单元等效节点荷载向量可得到与截面实心区域对应的节点荷载向量 \mathbf{F}^s .

对于泛函式(11)中的 $\sum_{i=1}^n 2\phi_i A_i$, 由

$$\delta \left(\sum_{i=1}^n 2\phi_i A_i \right) = \sum_{i=1}^n (\delta \phi_i \times 2A_i)$$

可知: $2A_i$ 成为与孔洞边界上应力函数 ϕ_i 对应的集中荷载. 类似地, 如果外边界上应力函数不取 0, 泛函式(12)中的 $2\phi_0 A_0$ 也将转化为一个作用于外边界上的值为 $-2A_0$ 的集中荷载.

4 算例验证

根据前述方法, 我们编制了一个计算任意截面扭转应力函数的有限元程序, 主要技术手段为

- 1) 采用主从节点法实现孔洞边界上应力函数相等的同值条件;
- 2) 将 2 倍空洞面积作为集中荷载施加在主节点上, 实现多连通截面的直接求解.

下面通过几个算例来验证前述方法和所编程序的正确性.

4.1 圆环截面

扭杆截面为典型的圆环, 外径 $R_1 = 2 \text{ m}$, 内径 $R_2 = 1 \text{ m}$, 如图 1 所示. 其扭转应力函数的理论值 $\phi = (4 - R^2)/2$ (参见文献[19]). 有限元网格划分采用间距值 0.1 m 进行, 如图 2 所示. 应力函数结果如表 1. 结果表明: 从内到外每隔 0.1 m 间距的结点处, 理论值和直接计算结果数据完全一致. 圆环形截面的扭转常数理论解为 23.5619 m^4 , 根据所得的应力函数, 由式(4)

求得的扭转常数为 23.5618 m^4 , 误差 0.00042% 。本例表明, 本文的应力函数直接求解结果具有非常高的精确度, 验证了公式及所编程序的正确性。

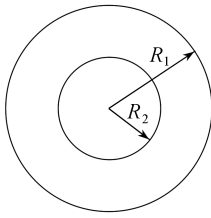


图1 圆环截面的几何形状

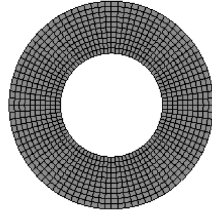


图2 圆环截面的有限元网格

Fig.1 Cross-section of the ring bar Fig.2 Mesh of the ring section

表1 应力函数计算结果

Table 1 The result of stress function

radius R/m	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
analytical solution ϕ/m^2	1.500	1.395	1.280	1.155	1.020	0.875	0.720	0.555	0.380	0.195	0.0
our solution ψ/m^2	1.500	1.395	1.280	1.155	1.020	0.875	0.720	0.555	0.380	0.195	0.0

4.2 双孔矩形截面

如图3所示, 矩形截面长 2 m , 宽 1 m , 内含一个边长 0.6 m 的正方形孔洞和一个半径 0.3 m 的圆形孔洞。划分的有限元网格如图4, 计算得正方形孔洞边界上各节点的应力函数为 0.1200 m^2 , 圆形孔洞边界上各节点的应力函数为 0.1500 m^2 , 应力函数的边界同值条件得以吻合。根据计算得到的应力函数, 由式(4)求得的扭转常数为 0.3797 m^4 , 与 Ansys 软件计算结果 0.3811 m^4 误差 0.37% , 验证了理论公式及所编程序的正确性。

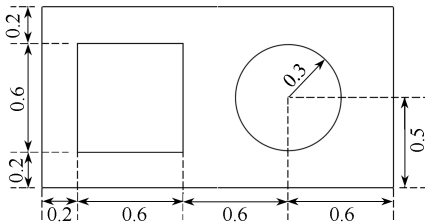


图3 双孔矩形截面(m)

Fig.3 Cross-section of the rectangular bar with two holes(m)

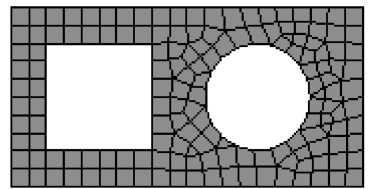


图4 有限元网格

Fig.4 Mesh of the rectangular bar with two holes

4.3 多室分离的薄壁多箱截面

图5(a)是一个简化的3室分离薄壁箱横断面, 此种截面常在桥梁主梁中采用。如预制U形截面的主梁, 箱形主梁间通过上翼缘板或刚性桥道板横向连接成整体时, 就属于此种截面类型。

图5(a)中截面全长 11 m , 有限元网格划分如图5(b), 由对称性取出的半截面尺寸如图5(c)。按本文方法计算, 应力函数在左右两孔的内边界上为 0.2501 m^2 , 在中间孔的内边界上为 0.2345 m^2 , 应力函数的边界同值条件得以满足。根据节点的应力函数计算结果, 由式(4)求得的扭转常数为 3.8474 m^4 , 与 Ansys 软件计算结果 3.8520 m^4 相差 0.12% , 再次检验了理论公式及所编程序的正确性及有效性。

4.4 箱形截面的对比验算

图6为箱形薄壁截面整体尺寸示意图。采用 0.01 m 网格划分, 按本文方法计算得到的应力

函数在内边界上各点的值为 0.88351 m^2 , 在外边界上各点的值为 0 , 应力函数的边界同值条件得以验证. 根据节点的应力函数计算结果, 由式(4)求得的扭转常数为 42.4685 m^4 , 与 Ansys 软件计算结果 42.476 m^4 相差 0.018% , 再次检验了理论公式及所编程序的正确性及有效性. 文献[20]也曾对图 6 截面扭转常数进行了计算, 其计算结果为 42.4695 m^4 . 3 种方法的计算结果非常接近.

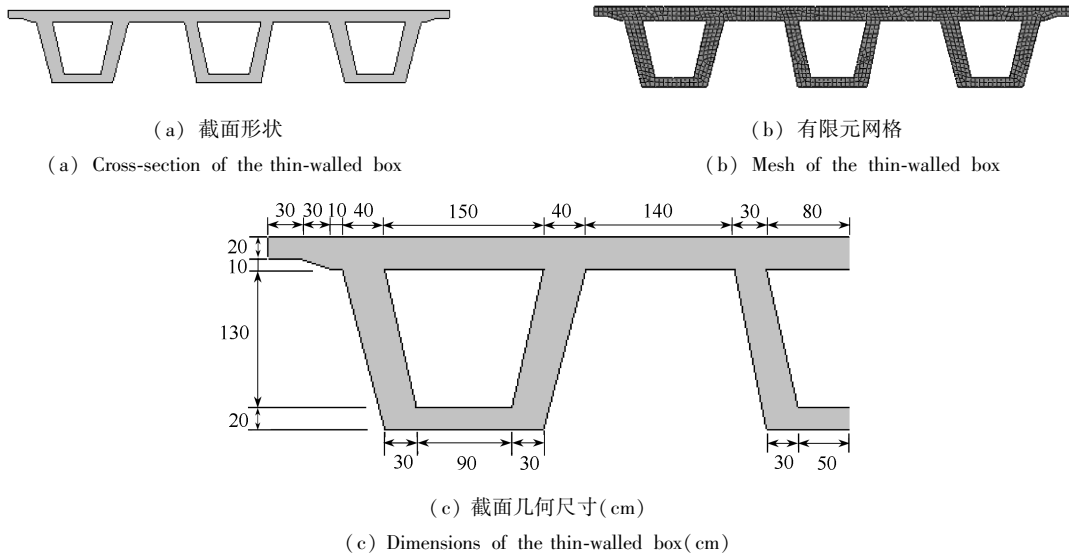


图 5 三室分离薄壁箱

Fig.5 Thin-walled box with three holes separated

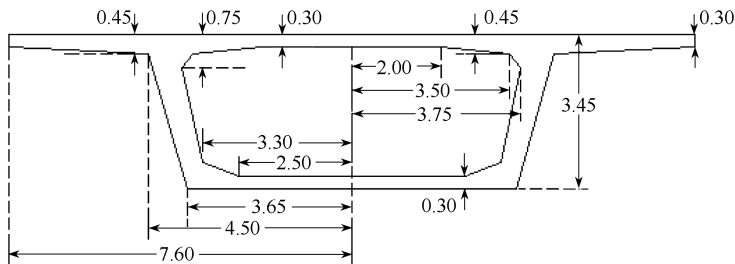


图 6 箱形薄壁截面(m)

Fig.6 Box shaped cross section with measurements (m)

5 结 论

本文基于扭转问题 Prandtl 应力函数理论, 讨论并改进了与微分方程和定解条件等价的泛函, 利用任意多连通复杂截面扭转问题的等价泛函, 推导了相应的有限元列式. 采用主从节点法实现边界上应力函数为常数的同值条件; 对于多连通截面的翘曲位移单值条件, 将空洞面积的 2 倍作为集中荷载加在主节点进行模拟, 算例验证了该方法能准确地计算任意多连通复杂截面的扭转应力函数, 并通过积分获得高精度的截面扭转常数. 该方法对薄壁截面同样适用, 且无需使用切应力沿薄壁均匀分布的假定.

参考文献(References):

- [1] Wilson H B, Farrior D S. Computation of geometrical and inertial properties for general areas and volumes of revolution[J]. *Computer Aided Design*, 1976, **8**(4):257-263.
- [2] Miles R G, Touh J G. A method for the computation of inertial properties for general areas [J]. *Computer Aided Design*, 1983, **15**(4):196-200.
- [3] Eberh A R, Allen C, Williard G H. Calculating precise cross-sectional properties for complex geometries[J]. *Computers in Mechanical Engineering*, 1987, **6**(2):32-37.
- [4] Friedman Z, Kosmatka J B. Torsion and flexure of a prismatic isotropic beam using the boundary element method[J]. *Computers and Structures*, 2000, **74**(4):479-494.
- [5] 周凌远, 李乔, 张士中. 采用有限单元法计算梁任意形状截面特性[J]. 计算力学学报, 2008, **25**(5):634-639. (ZHOU Ling-yuan, LI Qiao, QIANG Shi-zhong. Evaluation of arbitrary cross sectional properties with finite element method[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2008, **25**(5):634-639. (in Chinese))
- [6] 刘悦藏, 范慕辉. 凸多边形截面扭转杆问题的数值解法[J]. 河北工业大学学报, 1999, **28**(6):73-75. (LIU Yue-cang, FAN Mu-hui. The numerical method for solving the torsional shafts with convex polygon cross sections[J]. *Journal of Hebei University of Technology*, 1999, **28**(6):73-75. (in Chinese))
- [7] 周宗宪, 李宁军. 任意多边形截面直杆扭转的加权残值解[J]. 西安公路交通大学学报, 2000, **20**(2):115-118. (ZHOU Zong-xian, LI Ning-jun. Solution of torsion problems of the prismatic bar with arbitrary section applying weighted residual method[J]. *Journal of Xi'an Highway University*, 2000, **20**(2):115-118. (in Chinese))
- [8] 崔振山, 刘国燕, 刘才. 多连通任意截面杆件扭转问题的有限元法[J]. 燕山大学学报, 2001, **25**(4):297-300. (CUI Zhen-shan, LIU Guo-yan, LIU Cai. Finite element method for torsional bar with arbitrary shaped and multiple-connected cross-sections[J]. *Journal of Yanshan University*, 2001, **25**(4):297-300. (in Chinese))
- [9] 李永奇, 张卫红. 模拟求解任意截面杆扭转的化复为单有限元法[J]. 兰州理工大学学报, 2006, **32**(2):158-161. (LI Yong-qi, ZHANG Wei-hong. A special simulation for torsional bars with arbitrary cross-section using finite element method[J]. *Journal of Lanzhou University Technology*, 2006, **32**(2):158-161. (in Chinese))
- [10] 何琳, 王家林, 张德立. 任意多连通截面扭转应力函数的温度场比拟解法[J]. 重庆交通大学学报(自然科学版), 2012, **31**(5):927-929(934). (HE Lin, WANG Jia-lin, ZHANG De-li. The temperature field analogical solution for torsion stress function with arbitrary multi-connected section[J]. *Journal of Chongqing Jiaotong University(Natural Science)*, 2012, **31**(5):927-929(934). (in Chinese))
- [11] Gurujee C S, Shah K R. A computer program for thin walled frame analysis[J]. *Adv Eng Softerwear*, 1989, **11**(2):58-70.
- [12] Yoo Chai Hong, Acra V S. Cross-sectional properties of thin-walled multi-cellular section[J]. *Computers and Structures*, 1986, **22**(1):53-61.
- [13] Aleksandar P. Computer program for determination of geometrical properties of thin-walled beams with opened-closed section[J]. *Computers and Structures*, 2000, **74**(6):705-715.
- [14] Lubarda V A. On the torsion constant of multicell profiles and its maximization with respect to spar position[J]. *Thin-Walled Structures*, 2009, **47**(6/7):798-806.
- [15] 杜柏松, 葛耀君, 周峥. 复杂薄壁断面的自由扭转惯性矩的数值分析[J]. 同济大学学报(自然

- 科学版), 2006, **34**(9):1170-1174. (DU Bai-song, GE Yao-jun, ZHOU Zheng. Numerical analysis of free torsion constant for complicated thin-walled cross section[J]. *Journal of Tongji University(Natural Science)*, 2006, **34**(9):1170-1174. (in Chinese))
- [16] 钱伟长, 林鸿荪, 胡海昌, 叶开沅. 弹性柱体的扭转理论[M]. 北京: 科学出版社, 1956: 187-206. (CHIEN Wei-zang, LIN Hong-sun, HU Hai-chang, YE Kai-yuan. *Torsion Theory of Elastic Cylinder*[M]. Beijing: Science Press, 1956: 187-206. (in Chinese))
- [17] 王敏中, 王炜, 武际可. 弹性力学教程(修订版)[M]. 北京: 北京大学出版社, 2011: 127-174. (WANG Min-zhong, WANG Wei, WU Ji-ke. *Course of Elastic Mechanics (Revised Edition)* [M]. Beijing: Beijing University Press, 2011: 127-174. (in Chinese))
- [18] 钱伟长, 叶开沅. 弹性力学[M]. 北京: 科学出版社, 1980: 182-183. (CHIEN Wei-zang, YE Kai-yuan. *Elastic Mechanics*[M]. Beijing: Science Press, 1980: 182-183. (in Chinese))
- [19] 吴家龙. 弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001: 215-244. (WU Jia-long. *Elasticity*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2001: 215-244. (in Chinese))
- [20] 杜柏松. 考虑非线性影响的分体双箱梁悬索桥动力特性研究[D]. 博士论文. 上海: 同济大学, 2006. (DU Bai-song. Study on dynamic characteristics of suspension bridges with twin-box stiffening girders considering geometric nonlinearity[D]. Ph D Dissertations. Shanghai: Tongji University, 2006. (in Chinese))

Finite Element Solution for Torsion Stress Function With Arbitrary Multi-Connected Section

WANG Jia-lin, HE Lin, ZHANG De-li

(School of Civil Engineering and Architecture, Chongqing Jiaotong University,
Chongqing 400074, P. R. China)

Abstract: The major three methods can be used to solve the torsion bars' torsion problem. One is the boundary element method and the finite element method that is based on the warping function of torsion theory, the others are numerical solution based on the thin-wall theory and the finite element method based on the torsion stress function of torsion theory. According to stress function theory of torsion bars with arbitrary cross section, a functional equivalent to the torsion's differential equation and definite condition was discussed and improved, finite element formulas were deduced to solve the torsion stress function for multi-connected section, the boundary condition of single warping-displacement value was changed to concentrated force loaded on boundary nodes. The condition that the stress function might be constant value on each hole boundary was satisfied by using master-slave node method, so the torsion stress function with arbitrary multi-connected complex section could be obtained directly by finite element method, and the torsion constant was solved by integrating from the torsion stress function. Examples verified the feasibility and validity of this method.

Key words: multi-connected section; torsion; stress function; finite element