

拟合橡胶类材料非等双轴变形 数据的显式超弹性势*

李 浩, 章宇雨, 肖 衡

(上海大学,上海市应用数学和力学研究所,上海 200072)

摘要: 基于样条插值的直接方法,构造精确符合单轴和等双轴拉伸数据以及剪切数据的大变形超弹性势,给出显式表达式,避免了现有各方法寻求待定参数组达到近似拟合的复杂计算过程;推导了一般变形情形下的应力应变关系,对非等双轴拉伸实验进行了预测,并与 Rivlin 和 Saunders 的非等双轴拉伸实验数据进行了对比,预言结果与实验数据一致。

关键词: 橡胶类材料; 超弹性势; 对数应变; 样条插值; 非等双轴变形

中图分类号: TU58⁺1.22; O343.5 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.05.005

引 言

对于橡胶类不可压缩各向同性材料,其大变形弹性行为可用超弹性势表征.过去数十年间,已有大量研究工作致力于获得橡胶类材料的多轴超弹性势.由于强非线性的困难以及无法处理所有变形模式,通常要求所寻求的超弹性势,首先应符合某些给定变形模式的基准测试数据.这些数据涉及单轴拉伸、等双轴拉伸、平面拉伸和简单剪切等变形模式.经典实验数据载于 Treloar 的专著^[1]以及其他相关文献.这些数据构成决定超弹性势的实验基础.

寻找橡胶超弹性势的主要方法有两类,即统计方法和唯象方法.前者通过假设长链高分子的网络结构和分布,基于统计力学和热力学推导出弹性势的近似形式^[2-6],后者则基于连续介质力学,经由应变不变量或主伸长直接表示出超弹性势的特定非线性形式^[7-12].两种方法均须通过与实验数据的近似拟合来确定其中的待定参数组,涉及复杂的计算过程,通常只能在部分变形范围内较好地符合实验数据.

基于统计和唯象方法已获得许多不同形式的橡胶超弹性势,它们各有优缺点^[13].新近提出了基于 Hencky 对数应变和插值步骤构造超弹性势的直接方法^[14-15].该法给出显式结果,可精确匹配前述 4 个变形模式的基准实验数据,避免了现有各方法寻求待定参数组的复杂计算

* 收稿日期: 2013-01-25; 修订日期: 2013-04-10

基金项目: 国家教委 211 工程科研启动基金和上海大学创新基金资助项目(A.15-B002-09-032; A.10-0401-12-001)

作者简介: 李浩(1988—),男,湖南人,硕士生(E-mail: ennui123@qq.com);
章宇雨(1988—),男,福建人,硕士生(E-mail: 276524382@qq.com);
肖衡(1963—),男,湖南人,教授(通讯作者.E-mail: xiaoheng@shu.edu.cn).

过程.

上述最新工作尚未处理更一般意义上的非等双轴变形情形. 本文将发展上述新方法, 进一步构造超弹性势的新的显式表达式, 推导在一般变形情形的应力应变关系, 并与 Rivlin 和 Saunders 的经典实验数据^[16]进行对比和讨论.

1 主要方法和结果

本节简要介绍新近提出的直接方法及其相关步骤, 给出主要结果. 详细阐述和推导过程参见文献[14-15].

1.1 对数应变及其基本不变量

橡胶类超弹性材料的弹性行为由超弹性势函数 $W(\mathbf{F})$ 表征, 其中 $\mathbf{F} = \partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{X}$ 是变形梯度. 从连续介质力学的客观性原理以及各向同性条件, 可推出超弹性势可表为 Cauchy-Green 张量的函数. 一般而言, 超弹性势可表为任一个有限应变度量的函数, 由此可导出相应的应力-应变关系, 参见 Ogden 的文献[12]. 在众多应变度量中, Hencky 对数应变显示出独特优点, 因此引起广泛关注^[17-23].

本文的出发点在于应用基于 Hencky 对数应变 \mathbf{h} 表示的超弹性势 $W = W(\mathbf{h})$. 这里给出 \mathbf{h} 的一般形式如下:

$$\mathbf{h} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{B} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T, \quad (1)$$

其中 $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$ 是左 Cauchy-Green 张量. 进一步的表达式将稍后给出.

基于对数应变表示的超弹性势, 可导出下述超弹性应力-应变关系^[22-23]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{h}} + p \mathbf{I}, \quad (2)$$

其中 p 为静水压力. 上式表明, 基于对数应变的超弹性势是 Cauchy 应力(即真应力)的直接势.

下面引入对数应变的基本不变量. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 分别为 \mathbf{B} 的 3 个特征值的平方根, 即它们是 3 个主伸长, 又设向量 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ 分别为 \mathbf{B} 的 3 个正交归一特征向量, 则对数应变可表为下述谱形式:

$$\mathbf{h} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{B} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \sum_{r=1}^3 (\ln \lambda_r) \mathbf{n}_r \otimes \mathbf{n}_r, \quad (3)$$

对数应变的 3 个基本不变量为

$$i_r = \text{tr } \mathbf{h}^r = (\ln \lambda_1)^r + (\ln \lambda_2)^r + (\ln \lambda_3)^r, \quad r = 1, 2, 3. \quad (4)$$

不可压缩条件意味着 $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$, 这等价于 $i_1 = 0$. 在此情形下对数应变与其偏量重合, 因而后者的 3 个基本不变量 j_1, j_2, j_3 由下式给出:

$$j_1 = 0, \quad j_2 = i_2, \quad j_3 = i_3. \quad (5)$$

上式表明, 在不可压缩情形, 对数应变的第 2 和第 3 基本不变量等于其偏量的第 2 和第 3 基本不变量.

1.2 桥联不变量和匹配不变量

基于 j_2 和 j_3 , 构造两组新不变量^[14]如下:

第 1 组为

$$\psi = \sqrt{\frac{2}{3} j_2}, \quad (6)$$

$$\beta = 2 \sinh\left(\sqrt{\frac{1}{2} j_2}\right); \quad (7)$$

第2组为

$$\gamma = \sqrt{6} \frac{j_3}{\sqrt{j_2^3}}, \quad (8)$$

$$\chi = \gamma^2 = 6 \frac{j_3^2}{j_2^3}. \quad (9)$$

为说明上述两组不变量的性质,考虑单轴拉伸和压缩变形以及剪切变形.设 λ 是单轴变形时的轴向伸长比,而 ω 是剪切变形时的剪切量(剪切角的正切),则两组不变量分别具有如下性质:

$$-1 \leq \gamma \leq 1, \text{ 且 } \gamma = \begin{cases} 1, & \text{单向拉伸,} \\ -1, & \text{单向压缩,} \end{cases} \quad (10)$$

$$0 \leq \chi \leq 1, \text{ 且 } \chi = \begin{cases} 1, & \text{单轴拉压,} \\ 0, & \text{简单剪切,} \end{cases} \quad (11)$$

以及

$$\psi = \begin{cases} \ln \lambda, & \text{单向拉伸,} \\ -\ln \lambda, & \text{单向压缩,} \end{cases} \quad (12)$$

$$\beta = \omega, \quad \text{简单剪切.} \quad (13)$$

这些性质将在后面的多轴弹性势的推导过程中起重要作用.实际上,在后继发展中,不变量 ψ 和 β 分别用于建立单轴拉压、剪切变形与多轴变形之间的直接联系,因而称之为桥联不变量(bridging invariants)^[14];而不变量 γ 和 χ 分别用于匹配单轴拉伸和压缩以及单轴变形和剪切变形,故称之为匹配不变量(matching invariants)^[14].

1.3 多轴弹性势及应力-应变关系

基于所引入的桥联和匹配不变量,可直接构造精确符合单轴拉压数据以及剪切数据的显式弹性势,主要方法和步骤详见文献[14].下面简述相关结果及其发展.

首先基于单向拉压和剪切实验数据分别由三次样条插值得到两个一维应力-应变关系如下:

$$\sigma = f(h), \quad \tau = g(\omega), \quad (14)$$

其中, σ , τ 分别为单轴拉压情形的真轴应力以及剪切情形的剪应力, h 为轴向对数应变即 $h = \ln \lambda$, ω 为剪切量.然后对上述关系分别积分得到两个一维弹性势:

$$w_1(h) = \int_0^h f(h) dh, \quad (15)$$

$$w_2(\omega) = \int_0^\omega g(\omega) d\omega. \quad (16)$$

最后通过桥联不变量和匹配不变量导出统一的多轴超弹性势如下:

$$W = \chi^k \left(\frac{1}{2} (1 + \gamma) w_1(\psi) + \frac{1}{2} (1 - \gamma) w_1(-\psi) \right) + (1 - \chi^k) w_2(\beta). \quad (17)$$

从该结果和直接势关系(2),可得到应力应变关系:

$$\boldsymbol{\sigma} = p\mathbf{I} + ah + bg, \quad (18)$$

其中,系数 a 和 b 以及偏量张量 \mathbf{g} 分别由下列各式给出:

$$3a = \psi^{-1}\chi^k[(1 + \gamma)f(\psi) - (1 - \gamma)f(-\psi)] + \psi^{-1}(1 - \chi^k)(12 + 3\beta^2)^{0.5}g(\beta), \quad (19)$$

$$b = \psi^{-1}\chi^k[w_1(\psi) - w_1(-\psi)] + 2k\psi^{-1}\chi^k\gamma[(1 + \gamma)w_1(\psi) + (1 - \gamma)w_1(-\psi) - 2w_2(\beta)], \quad (20)$$

$$\mathbf{g} = (j_2^2)^{-1}(3j_2\mathbf{h}^2 - 3j_3\mathbf{h} - j_2^2\mathbf{I}). \quad (21)$$

上列各式中的幂指数 $k \geq 0$ 是一非负常数.表达式(17) ~ (21)推广了文献[14-15]的结果,事实上,后者可视为这里取 $k = 1$ 之情形.表达式(17)表明总弹性能 W 由两部分即单轴拉伸(压缩)弹性能 w_1 和剪切弹性能 w_2 的加权平均给出.指数 k 决定两种弹性能 w_1 和 w_2 所占比重: $0 \leq k \leq 1$ 时, k 愈小则 w_1 所占比重愈大,而 w_2 所占比重愈小;反之 $k > 1$ 时, k 愈大则 w_1 所占比重愈小,而 w_2 所占比重愈大.

由于桥联不变量和匹配不变量具有式(10) ~ (13)所表明的性质,由式(17)给出的多轴超弹性势在单轴变形情形和剪切变形情形可自动给出由式(15)和式(16)给出的两个一维弹性势.又因为由式(14)给出的两个一维应力-应变关系分别经由插值步骤精确符合单轴变形和剪切变形实验数据,所以此多轴统一势可自动精确符合这些实验数据.

下面将进一步研究所给出超弹性势在非等双轴变形情形的预言,并与 Rivlin 和 Saunders 的实验数据进行了对比和讨论^[16].

2 Rivlin 和 Saunders 的非等双轴实验

Rivlin 和 Saunders 曾在 1951 的论文^[16]中给出了包括单向拉伸、等双轴拉伸、剪切以及非等双轴拉伸等大量实验数据.本章将基于单向拉伸、等双轴拉伸(即单轴压缩)和剪切的实验数据进行样条插值得到式(17)给出的多轴弹性势,然后将该弹性势的预言与 Rivlin 和 Saunders 的实验数据相对比.

文献[16]的数据涉及称为 A 和 B 两种橡胶.在文献[16]的实验中,单向拉伸、剪切和非等双轴拉伸实验用橡胶 A,而单轴压缩实验则用橡胶 B.因此该文献未提供橡胶 A 的单轴压缩数据,但是该数据可由下述关系从橡胶 A 的单向拉伸和剪切(即平面拉伸)数据推出:

$$\sigma_c(-h_r) = \sigma_s(h_r) - \sqrt{3}\sigma_p\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h_r\right), \quad (22)$$

其中, $\sigma_c, \sigma_s, \sigma_p$ 分别为橡胶 A 的单向压缩轴向真应力、单向拉伸轴向真应力和平面拉伸方向真应力,而 h_r 是单轴拉伸时的轴向对数应变.关系式(22)的准确性已经在文献中证明,事实上,文献[14]还表明,单轴拉压数据可准确给出剪切数据.需指出的是,文献[16]给出的是等双轴拉伸数据和平面拉伸实验数据,而非直接的单轴压缩数据和剪切数据.对于不可压缩橡胶类材料,等双轴变形和剪切变形分别等价于单轴压缩变形和平面拉伸变形,可相互转换^[14].

计算过程如下:首先对平面拉伸实验数据进行 3 次样条插值得到插值函数 $\sigma_p = g_p(h)$, 然后由此函数和单轴拉伸数据从式(22)就可得到单轴压缩数据.需要说明的是,文献[16]给出

的名义应力数据需转换为真应力数据. 关于 3 种变形模式的转换结果见表 1.

表 1 单轴拉压和平面拉伸实验数据

Table 1 The data of uniaxial test and plane-strain extension test

uniaxial tension		plane-strain extension		uniaxial compression	
$h_r (= \ln \lambda_r)$	σ_r / MPa	$h_r (= \ln \lambda_r)$	σ_r / MPa	$h_r (= \ln \lambda_r)$	σ_r / MPa
0.054 5	0.085 7	0.138 0	0.253 1	-0.054 5	-0.061 0
0.112 4	0.169 3	0.182 3	0.337 6	-0.112 4	-0.136 3
0.175 6	0.263 5	0.235 1	0.432 0	-0.175 6	-0.222 1
0.239 0	0.368 9	0.286 7	0.536 2	-0.239 0	-0.291 9
0.310 4	0.492 7	0.342 9	0.653 4	-0.310 4	-0.371 4
0.390 7	0.635 4	0.411 4	0.788 9	-0.390 7	-0.480 5
0.478 1	0.807 9	0.476 9	0.940 0	-0.478 1	-0.568 0
0.570 4	1.005 1	0.548 1	1.115 2	-0.570 4	-0.695 1
0.662 2	1.239 9	0.629 1	1.325 3	-0.662 2	-0.802 1
0.751 9	1.507 6	0.706 1	1.551 4	-0.751 9	-0.894 4
0.835 1	1.797 9	0.779 3	1.798 3	-0.835 1	-0.984 0
0.918 7	2.132 4	0.849 7	2.072 9	-0.918 7	-1.085 8
0.988 1	2.467 6	0.914 7	2.367 3	-0.988 1	-1.166 8
1.055 7	2.837 9	0.973 0	2.661 6	-1.055 7	-1.259 0
1.117 1	3.232 4	1.027 1	2.977 6	-1.117 1	-1.325 8
1.170 9	3.639 1	1.076 0	3.310 0	-1.170 9	-1.377 1
1.218 8	4.064 5	1.121 4	3.632 3	-1.218 8	-1.420 1
1.259 9	4.474 1			-1.259 9	-1.443 6

3 预言与实测的对比

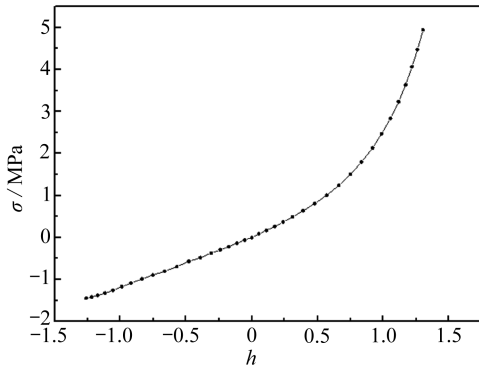
基于单向拉压数据和剪切数据经由三次样条插值可得到如式(14)所示的两个一维函数 $f(h)$ 和 $g(\omega)$. 它们由分段三次多项式给出, 其一般表达式参见文献[14], 这里由图 1 示出结果. 由所得到的两个一维插值函数以及式(17)最终可得到所寻求的显式多轴弹性势.

再由 $f(h)$ 和 $g(\omega)$ 通过式(15)和(16)可得到 w_1 和 w_2 , 最后由式(17)就可以得到统一的多轴超弹性势 W .

下面推导非等双轴变形的两个正应力 σ_1 和 σ_2 . 设 \mathbf{e}_1 和 \mathbf{e}_2 是沿两个加载方向的单位向量, 而单位向量 \mathbf{e}_3 沿无应力自由方向, 这 3 个向量构成一个正交归一基. 又设 λ_1 和 λ_2 是沿两个加载方向的伸长比, 由于不可压缩性, 自由方向的伸长比为 $-\ln(\lambda_1 \lambda_2)$, 得到变形梯度和应力张量有如下形式:

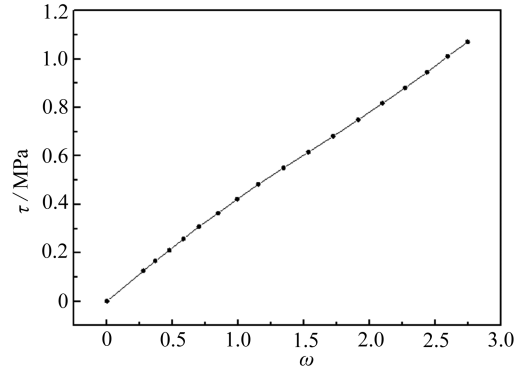
$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \ln \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ln \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\ln \lambda_1 \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad (23)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \quad (24)$$



(a) 单轴拉压数据样条插值结果

(a) Spline interpolation of uniaxial tension and compression test data



(b) 剪切数据样条插值结果

(b) Spline interpolation of shear test data

图 1 实验数据样条插值结果

Fig.1 The result of spline interpolation

表 2 计算结果与实验数据对比(a)

Table 2 The contrast of the computed result and the test data (a)

test parameters		test data		computed result	
λ_1	λ_2	σ_1 /MPa	σ_2 /MPa	σ_1 /MPa	σ_2 /MPa
1.90	1.07	1.362	0.480	1.412	0.524
1.80	1.25	1.254	0.617	1.336	0.684
1.70	1.39	1.176	0.794	1.222	0.841
1.60	1.51	1.068	0.941	1.099	0.987
2.40	1.04	2.117	0.510	2.234	0.707
2.30	1.25	1.980	0.755	2.174	0.789
2.20	1.43	1.882	0.960	2.021	0.937
2.10	1.58	1.754	1.156	1.845	1.087
2.00	1.71	1.637	1.294	1.657	1.226
1.90	1.82	1.529	1.421	1.488	1.369
2.80	1.02	2.852	0.559	3.033	0.942
2.70	1.28	2.715	0.882	3.064	0.909
2.60	1.47	2.577	1.107	2.922	1.059
2.50	1.64	2.440	1.333	2.723	1.227
2.40	1.80	2.254	1.499	2.510	1.424
2.30	1.91	2.107	1.617	2.296	1.582
2.20	2.03	1.980	1.803	2.092	1.777
2.80	1.76	3.087	1.480	3.524	1.403
2.70	1.91	2.930	1.686	3.261	1.591
2.60	2.05	2.773	1.872	2.995	1.802
2.50	2.18	2.617	2.068	2.737	2.030
2.40	2.28	2.450	2.234	2.496	2.230

从式(23)、(24)和式(18)~(21)可导出如下结果:

$$p = a \ln(\lambda_1 \lambda_2) - b g_{33}, \quad (25)$$

$$\sigma_1 = a \ln(\lambda_1^2 \lambda_2) + b(g_{11} - g_{33}), \quad (26)$$

$$\sigma_2 = a \ln(\lambda_1 \lambda_2^2) + b(g_{22} - g_{33}), \quad (27)$$

其中

$$g_{11} = j_2^{-1}(3j_2 \ln^2 \lambda_1 - 3j_3 \ln \lambda_1 - j_2^2), \quad (28)$$

$$g_{22} = j_2^{-1}(3j_2 \ln^2 \lambda_2 - 3j_3 \ln \lambda_2 - j_2^2), \quad (29)$$

$$g_{33} = j_2^{-2}[3j_2 \ln^2(\lambda_1 \lambda_2) - 3j_3 \ln(\lambda_1 \lambda_2) - j_2^2]. \quad (30)$$

表3 计算结果与实验数据对比(b)

Table 3 The contrast of the computed result and the test data (b)

test parameters		test data		computed result	
λ_1	λ_2	σ_1 / MPa	σ_2 / MPa	σ_1 / MPa	σ_2 / MPa
2.40	0.69	1.970	0.055	1.973	0.047
2.30	0.76	1.793	0.183	1.838	0.113
2.20	0.83	1.637	0.222	1.709	0.194
2.10	0.90	1.519	0.291	1.584	0.276
2.00	0.96	1.450	0.340	1.476	0.409
1.90	1.02	1.294	0.414	1.378	0.505
1.80	1.09	1.176	0.443	1.276	0.509
1.70	1.17	1.058	0.470	1.168	0.569
1.60	1.24	0.960	0.588	1.052	0.634
1.50	1.33	0.823	0.676	0.936	0.735
2.80	1.07	2.734	0.598	3.098	0.861
2.70	1.11	2.568	0.637	2.910	0.815
2.60	1.16	2.411	0.686	2.726	0.797
2.50	1.21	2.244	0.725	2.542	0.797
2.40	1.26	2.087	0.774	2.361	0.811
2.30	1.32	1.940	0.843	2.187	0.845
2.20	1.38	1.793	0.882	2.019	0.891
2.10	1.45	1.666	0.951	1.856	0.958
2.00	1.53	1.558	1.019	1.698	1.044
1.90	1.61	1.441	1.098	1.545	1.141
1.80	1.70	1.323	1.186	1.399	1.259
2.80	1.58	2.979	1.215	3.476	1.203
2.70	1.63	2.793	1.264	3.218	1.239
2.60	1.70	2.617	1.333	2.974	1.308
2.50	1.76	2.430	1.392	2.737	1.375
2.40	1.84	2.264	1.470	2.511	1.480
2.30	1.92	2.117	1.568	2.296	1.598
2.20	2.01	1.970	1.666	2.093	1.743
2.80	1.94	3.116	1.764	3.555	1.640
2.70	2.02	2.920	1.842	3.267	1.754
2.60	2.09	2.724	1.921	2.995	1.868
2.50	2.18	2.577	2.038	2.737	2.030
2.40	2.20	2.372	2.146	2.497	2.210

系数 a 和 b 由式(19) ~ (20) 给出, 而不变量 j_2 和 j_3 有如下形式:

$$j_2 = \ln^2 \lambda_1 + \ln^2 \lambda_2 + \ln^2(\lambda_1 \lambda_2), \quad (31)$$

$$j_3 = \ln^3 \lambda_1 + \ln^3 \lambda_2 - \ln^3(\lambda_1 \lambda_2). \quad (32)$$

此外, 桥联和匹配不变量 ψ, β, γ 和 χ 由式(6) ~ (9) 给出.

从上述表达式可计算正应力 σ_1 和 σ_2 . 作为对比, 指数 k 为 0.1 时的计算结果与实验数据列于表 2 和表 3. 指数 k 的值通过非线性最优拟合计算决定, 这里给出的值 $k = 0.1$ 是最佳拟合值, 表明拉伸(压缩)弹性能占优.

直观的对比如图 2 示出.

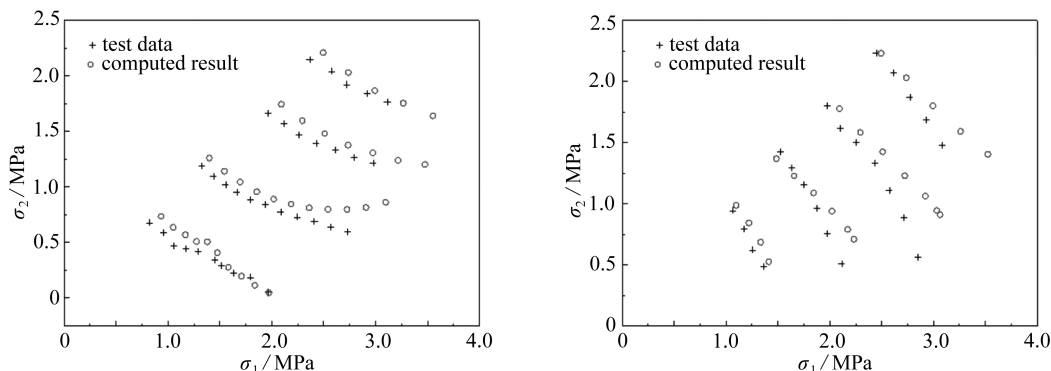


图 2 计算结果与实验数据对比

Fig. 2 The contrast of the computed result and the test data

上述对比表明, 除 $\lambda_2 = 1.04, 1.02, 0.96, 1.07$ 对应的正应力 σ_2 之外, 计算结果很好地符合实测数据. $\lambda_2 \approx 1$ 接近于剪切变形, 文献[16]未提供 σ_2 的实验数据. 在此情形, 从式(22)只能导出 λ_1 方向正应力 σ_1 的数据, 不能导出 λ_2 方向正应力 σ_2 的准确数据. 这可能是在接近剪切变形情形时计算结果与实测数据出现偏差的主要原因, 预计基于剪切变形时关于正应力 σ_2 准确数据的计算结果可消除此偏差.

4 讨 论

本文发展新近提出的构造超弹性势的直接方法^[14], 进一步研究了 Rivlin 和 Saunders 的非等双轴拉伸实验^[16]. 此方法给出超弹性势的显式表达式, 避免了决定待定参数组的复杂计算过程. 结果表明, 所给出弹性势的预言很好地符合了实测数据. 应当指出, 现有各种结果通常只涉及单轴数据和剪切数据的近似拟合, 尚未考虑非等双轴数据, 本文结果首次实现了单轴数据和剪切数据以及非等双轴数据的同时拟合.

不可压缩条件是对现实材料变形行为的理想化处理. 实际上, 橡胶类材料将经历很小的体积变形, 新近提出了处理可压缩变形的直接方法^[15], 应用该方法考虑体积变形的结果将另行给出.

参考文献 (References):

- [1] Treloar L R G. *The Physics of Rubber Elasticity* [M]. Oxford: Oxford University Press,

- 1975.
- [2] Arruda E M, Boyce M C. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behaviour of rubber elastic materials[J]. *J Mech Phys Solids*, 1993, **41**(2):389-412.
 - [3] Boyce M C. Direct comparison of the Gent and the Arruda-Boyce constitutive models of rubber elasticity[J]. *Rubber Chem Techn*, 1996, **69**(5): 781-785.
 - [4] Boyce M C, Arruda E M. Constitutive models of rubber elasticity: a review[J]. *Rubber Chem Techn*, 2000, **73**(3): 504-523.
 - [5] Treloar L R G, Riding G. A non-Gaussian theory for rubber in biaxial strain—I: mechanical properties[J]. *Proc R Soc Lond Ser A*, 1979, **369**(1737): 261-280.
 - [6] Rivlin R S. Large elastic deformation of isotropic materials—I, II: fundamental concepts; some uniqueness theories for pure homogeneous deformations[J]. *Philos Trans Roy Soc Lond, Ser A*, 1948, **240**(822): 459-508.
 - [7] Tschoegl N W. Constitutive equations for elastomers[J]. *J Appl Polymer Sc*, A1, 1971, **9**(7): 1959-1970.
 - [8] James A G, Green A. Strain energy function of rubber—II: the characterization of filled vulcanizates[J]. *J Appl Polymer Sci*, 1975, **19**(8): 2319-2330.
 - [9] Morman Jr K N, Pan T Y. Application of finite-element analysis in the design of automotive elastomeric components[J]. *Rubber Chemistry and Technology*, 1988, **61**(3): 503-533.
 - [10] Gent A N. A new constitutive relation for rubber[J]. *Rubber Chemistry and Technology*, 1996, **69**(1): 59-61.
 - [11] Ogden R W. Large deformation isotropic elasticity-on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike materials[J]. *Proc Roy Soc London A*, 1972, **326**(1567): 565-584.
 - [12] Ogden R W. *Non-Linear Elastic Deformations*[M]. Chichester: Ellis Horwood, 1984.
 - [13] 李晓芳, 杨晓翔. 橡胶材料的超弹性本构模型[J]. 弹性体, 2005, **15**(1): 50-58. (LI Xiaofang, YANG Xiao-xiang. A review of elastic constitutive model for rubber materials[J]. *China Elastomerics*, 2005, **15**(1): 50-58. (in Chinese))
 - [14] Xiao H. An explicit, direct approach to obtaining multi-axial elastic potentials which exactly match data of four benchmark tests for incompressible rubberlike materials—part 1: incompressible deformations[J]. *Acta Mechanica*, 2012, **223**(9): 2039-2063.
 - [15] Xiao H. An explicit, direct approach to obtain multi-axial elastic potentials which accurately match data of four benchmark tests for rubbery materials—part 2: general deformations[J]. *Acta Mechanica*, 2013, **224**(3):479-498.
 - [16] Rivlin R S, Saunders D W. Large elastic deformations of isotropic materials—VII: experiments on the deformation of rubber[J]. *Phil Trans R Soc Lond A*, 1951, **243**(865): 251-288.
 - [17] Xiao H. Hencky strain and Hencky model: extending history and ongoing tradition[J]. *Multidiscipline Modeling in Materials and Structures*, 2005, **1**(1):1-52.
 - [18] Xiao H, Bruhns O T, Meyers A. Logarithmic strain, logarithmic spin and logarithmic rate[J]. *Acta Mechanica*, 1997, **124**(1/4): 89-105.
 - [19] Xiao H, Bruhns O T, Meyers A. Hypo-elasticity model based upon the logarithmic stress rate

- [J]. *J Elasticity*, 1997, **47**(1): 51-68.
- [20] Xiao H, Bruhns O T, Meyers A. The choice of objective rates in finite elastoplasticity: general results on the uniqueness of the logarithmic rate[J]. *Proc Roy Soc London A*, 2000, **456** (2000): 1865-1882.
- [21] Xiao H, Bruhns O T, Meyers A. Basic issues concerning finite strain measures and isotropic stress-deformation relations[J]. *J Elasticity*, 2002, **67**(1): 1-23.
- [22] Xiao H, Bruhns O T, Meyers A. Explicit dual stress-strain and strain-stress relations of incompressible isotropic hyperelastic solids via deviatoric Hencky strain and Cauchy stress[J]. *Acta Mechanica*, 2004, **168**(1/2): 21-33.
- [23] Xiao H, Chen L S. Hencky's logarithmic strain measure and dual stress-strain and strain-stress relations in isotropic finite hyperelasticity[J]. *Int J Solids & Structures*, 2003, **40**(6): 1455-1463.

Explicit Form of Elastic Potentials Matching General Biaxial Test Data for Elastomers

LI Hao, ZHANG Yu-yu, XIAO Heng

(*Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China*)

Abstract: A direct approach was proposed to construct elastic potentials that exactly match uniaxial data and shear data based on spline interpolation. Explicit expressions were presented toward bypassing complicated numerical procedures in identifying unknown parameters. Predictions for the two normal stresses of biaxial test were derived and compared with Rivlin and Saunders' data in 1951. Good agreement was achieved.

Key words: elastomers; elastic potential; logarithmic strain; spline interpolation; general biaxial test