文章编号:1000-0887(2013)04-0420-07


# 一类混合路由博弈的调和率研究*

余孝军

(贵州财经大学 数学与统计学院;贵州省经济系统仿真重点实验室, 贵阳 550004)

**摘要:** 运用算法博弈论探讨了固定需求下由刻板用户和利他用户组成的混合路由博弈的调和率问题. 首先,建立了刻画这类混合路由博弈的变分不等式模型;然后,运用解析推导的方法得到了该类路由博弈调和率的上界,并以现有文献中的结论为特例.

**关 键 词:** 刻板用户; 利他用户; 路由博弈; 变分不等式; 调和率

**中图分类号:** O225 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.04.010

## 引 言

从 20 世纪 50 年代非合作博弈诞生以来,人们对于不同条件下非合作博弈均衡的存在性和稳定性等方面进行了广泛的研究[1-4],同时也发现非合作博弈在均衡处具有无效性,即系统目标函数在 Nash 均衡处的值和系统最优值之间存在着差距. 然而,一直没有一种方法来度量二者之间的差距究竟有多大. 近年来,新兴算法博弈论的一个重要研究方向就是研究非合作博弈在均衡处的无效性,重点探讨了 4 种网络博弈——路由博弈、网络设计和生成博弈、作业排序博弈以及资源分配博弈在均衡处的无效性. 路由博弈通常包括非原子缺损博弈(nonatomic game . 博弈中具有非常多的博弈方,但是每个博弈方控制的流量相对总流量而言是可以忽略的)和原子博弈(atomic game . 博弈方控制的流量相对总流量而言是不可忽略的). 通讯网络和交通网络是两种常见的路由博弈网络,博弈方就是对应网络中的用户,在本文后面部分,博弈方和用户的概念是一致的,二者交替使用. Koutoupias 和 Papaimitriou[5]首次提出了用调和率(coordination ratio)或无政府代价(price of anarchy)来度量非合作博弈在均衡处的无效性,作者定义调和率为系统目标函数在 Nash 均衡处的值和系统目标最优值之比的最大值. Roughgarden 和 Tardos[6]首次运用调和率的概念界定了 Wardrop 路由博弈的调和率上界. 从那以后,学者们对不同情形下的 Wardrop 路由博弈的调和率上界问题进行了讨论[7-9],得到了许多有意义的结果. 以上文献都假设网络中的用户是同质用户,即所有用户都基于同一种出行决策行为选择出行路径. 最近,不同出行决策行为下的混合路由博弈调和率引起了学者们的关注. 刘天亮等[10]研究了 ATIS 作用下混合交通分配均衡的调和率. 在确定性多用户类交通分配网络中,Han 和 Yang[11]考虑了次优收费机制下,用户均衡在不同出行准则下的调和率. Guo 和 Yang[12]

* **收稿日期:** 2012-08-08
**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(71161005);贵州省优秀科技教育人才省长专项资金资助项目(2011067)
**作者简介:** 余孝军(1974—),男,湖南人,教授,博士(E-mail:xjyu-myu@163.com).

考虑了异质用户在系统时间和系统费用最小的双目标 Pareto 最优问题,并探讨了影响系统性能的因素以及偏离系统最优的上界问题. Yu 和 Huang[13] 分别运用放缩法和非线性规划的方法得到了同时存在 UE(用户均衡原则——选择是自己出行成本最小路径出行的出行原则)和 CN 博弈方(属于同一博弈方的出行者之间完全合作,属于不同博弈方的出行者之间完全竞争,CN 博弈方的目的是在和其他博弈方博弈时最小化自身总成本)网络的调和率问题. Chen 和 Kempe[14] 研究了存在利他用户时 Wardrop 路由博弈的调和率上界问题. Karakostas 等[15] 首次提出了含刻板用户 Wardrop 路由博弈. 他们分别在平行网络和一般网络上讨论了仿射路段出行成本函数情形下,含刻板用户 Wardop 路由博弈的 Nash 均衡性质,并界定了系统目标为极小化用户和函数时的调和率上界. 侯海洋[16] 在文献[15]的基础上,以平行网络为背景,针对线性函数下最大费用路段模型和 M/M/1 型函数下用户和函数模型,分别给出了含刻板用户 Wardrop 路由博弈的 Nash 均衡性质及调和率上界. 本文将探讨同时含刻板用户和利他用户的混合 Wardrop 路由博弈的调和率问题,建立混合均衡的等价变分不等式模型,解析推导混合路由博弈的调和率上界,并分析调和率和网络参数之间的关系.

# 1　模　　型

有向图 $G=(V,A)$ 表示一个网络,其中 $V$ 表示节点集合,$A$ 表示有向路段集合. 设 $W$ 为所有起讫点对集合,$R$ 为网络中所有路径的集合,相应地,$R_w$ 表示连接起讫点对(OD 对) $w\in W$ 的所有路径集合. 路段出行成本函数 $t_a(v_a)$ 是严格单调递增的凸函数. 网络中有两类用户,一类是刻板用户总是选择自由流时路径成本最小的路径出行,另一类是利他用户在刻板用户选定路径后根据最小化自己的理解出行成本选择出行路径,其理解出行成本是自私项和利他项的线性组合(详细的定义见定义 1),本文假设所有利他用户的利他系数相同,设为 $\phi$. 设 OD 对 $w$ 间的交通需求量为 $d_w$,$\lambda(\lambda\in[0,1])$ 为交通需求划分系数,$\lambda d_w$ 表示 OD 对 $w$ 间刻板用户交通需求量,$(1-\lambda)d_w$ 表示 OD 对 $w$ 间利他用户交通需求量. 设

$$\bar{\boldsymbol{f}}=\{\bar{f}_{rw},r\in R_w,w\in W\},\ \hat{\boldsymbol{f}}=\{\hat{f}_{rw},r\in R_w,w\in W\}$$

分别为刻板用户、利他用户的路径流量向量,

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\{\bar{v}_a,a\in A\},\ \hat{\boldsymbol{v}}=\{\hat{v}_a,a\in A\}$$

分别表示刻板用户和利他用户的路段流量向量. 则刻板用户的可行域 $\bar{\Omega}$ 和利他用户的可行域 $\hat{\Omega}$ 分别为

$$\bar{\Omega}=\Big\{\bar{\boldsymbol{v}}\mid \bar{v}_a=\sum_{w\in W}\sum_{r\in R_w}\bar{f}_{rw}\delta_{ar},\ a\in A;\ \sum_{r\in R_w}\bar{f}_{rw}=\lambda d_w,\ w\in W;$$
$$\bar{f}_{rw}\geqslant 0,\ r\in R_w,\ w\in W\Big\},$$

$$\hat{\Omega}=\Big\{\hat{\boldsymbol{v}}\mid \hat{v}_a=\sum_{w\in W}\sum_{r\in R_w}\hat{f}_{rw}\delta_{ar},a\in A;\ \sum_{r\in R_w}\hat{f}_{rw}=(1-\lambda)d_w,\ w\in W;$$
$$\hat{f}_{rw}\geqslant 0,\ r\in R_w,\ w\in W\Big\}.$$

刻板用户认为路段出行成本就是路段出行成本函数在自由流时对应的常数,刻板用户在此假设基础上进行路径出行决策. 因此,刻板用户的出行可以表示为如下的变分不等式模型:寻找 $\bar{v}_a^*\in\bar{\Omega}$ 使得对所有的 $\bar{v}_a\in\bar{\Omega}$, 都满足:

$$\sum_{a\in A}\langle t_a(0),\bar{v}_a-\bar{v}_a^*\rangle\geqslant 0,\tag{1}$$

其中，$t_a(0)$ 表示路段 $a$ 在自由流时的出行成本，故每个 OD 中的刻板用户都是选择该 OD 对间自由流成本最小的路径出行（如果有多条路径的自由流出行成本和都是最小，可以认为每条路径事先有一个优先序编号，刻板用户选择优先级最高的路径出行）。

下面我们来考虑利他用户出行模型，首先在 Chen 和 Kempe[14] 的基础上定义一致 $\phi$ 利他出行者如下：

**定义 1** 任意一个 $\phi$ 利他出行者（$\phi \in [-1,1]$）选择路径 $r$ 的目的是最小化出行成本函数：

$$t_r^{(\phi)} = (1-\phi)\sum_{a\in A} t_a(v_a)\delta_{ar} + \phi\sum_{a\in A}(t_a(v_a)v_a)'\delta_{ar} = (1-\phi)\sum_{a\in r} t_a(v_a) + \phi\sum_{a\in r}(t_a(v_a)v_a)',$$

其中，$\sum_{a\in r} t_a(v_a)$ 是成本的自私项，$\sum_{a\in r}(t_a(v_a)v_a)'$ 是利他项。$(t_a(v_a)v_a)'$ 是函数 $t_a(v_a)v_a$ 关于变量 $v_a$ 的微分。我们可以改写为

$$t_r^{(\phi)} = \sum_{a\in r} t_a(v_a) + \phi\sum_{a\in r} v_a t_a'(v_a).$$

如果所有的出行者都是 $\phi$ 利他，我们则称出行者是一致 $\phi$ 利他。这样，在一致 $\phi$ 利他行为下出行者选择路段 $a$ 的理解出行成本为

$$t_r^{(\phi)} = \sum_{a\in r} t_a(v_a) + \phi\sum_{a\in r} v_a t_a'(v_a).$$

注意，如果 $\phi=0$，则是完全自私情形；$\phi=1$ 是完全利他情形；$\phi=-1$ 是出行者完全恶意的情形，本文假设 $\phi\in[0,1]$。因此，利他用户的出行可以表示为如下的变分不等式模型：寻找 $\hat{v}_a^* \in \bar{\Omega}$，使得对所有的 $\hat{v}_a \in \hat{\Omega}$，都满足

$$\sum_{a\in A}\langle t_a(v_a^*) + \phi v_a^* t_a'(v_a^*),\ \hat{v}_a - \hat{v}_a^*\rangle \geqslant 0, \tag{2}$$

其中

$$v_a^* = \bar{v}_a^* + \hat{v}_a^*.$$

同时求解问题（1）和（2）得到的路段流量就是刻板用户和利他用户构成的混合路由博弈的最优解。网络中的系统最优原则（SO）假设用户接受统一的调度，使得系统的总成本最小，可以表示成如下的数学规划模型[17]：

$$\min T(V) = \sum_{a\in A} t_a(v_a)v_a, \tag{3a}$$

可行约束集 $\Omega_v$ 定义为

$$\boldsymbol{\Omega}_v = \{\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Delta f},\ \boldsymbol{\Lambda f} = \boldsymbol{d},\ \boldsymbol{f} \geqslant \boldsymbol{0}\}, \tag{3b}$$

这里，$\boldsymbol{v} = (v_a, a\in A)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{f} = (f_{rw}, r\in R_w, w\in W)^{\mathrm{T}}$ 分别表示路段和路径流向量，$\boldsymbol{d} = (d_w, w\in W)^{\mathrm{T}}$ 表示出行需求向量，$\boldsymbol{\Delta} = [\delta_{ar}]$ 是路段/路径关联矩阵，若路段 $a$ 在路径 $r$ 上，则 $\delta_{ar}$ 为 1，否则为 0。$\boldsymbol{\Lambda} = [\Lambda_{rw}]$ 是 OD 对/路径关联矩阵，若路径 $r\in R_w$ 上，则 $\Lambda_{rw}$ 为 1，否则为 0。由路段出行成本函数的假设，可知数学规划问题（3）是一个凸规划，故系统最优模型（3）有唯一的路段流量解。

## 2 调和率上界分析

设 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{SO}}$ 是 SO 问题（3）中最优解对应的路段流量向量，$\bar{\boldsymbol{v}}^*$，$\hat{\boldsymbol{v}}^*$ 为变分不等式（1）和（2）同时成立时网络中刻板用户、利他用户对应的路段流量向量。假设混合均衡网络的调和率为 $\rho^{\mathrm{mix}} = T^{\mathrm{mix}}/T^{\mathrm{SO}}$，其中

$$T^{SO}=\sum_{a\in A}t_a(v_a^{SO})v_a^{SO};\ T^{mix}=T^O+T^A=\sum_{a\in A}t_a(v_a^*)\bar{v}_a^*+\sum_{a\in A}t_a(v_a^*)\hat{v}_a^*,$$

则 $\rho^{mix}\geqslant 1$ 成立. 下面我们来界定 $\rho^{mix}$ 的上界.

对任意给定的路段成本函数类 $C$, 我们定义如下的参数:

$$\varphi_a(t_a,\bar{v}_a^*,\hat{v}_a^*,\phi,\lambda)=\max_{v_a\geqslant 0}\frac{(1-\lambda)(t_a(v_a^*)-t_a(v_a))v_a+\phi v_a^*t_a'(v_a^*)((1-\lambda)v_a-\hat{v}_a^*)}{t_a(v_a^*)v_a^*},\tag{4}$$

$$\varphi(C,\phi,\lambda)=\max_{t_a\in C,a\in A}\varphi_a(t_a,\bar{v}_a^*,\hat{v}_a^*,\phi,\lambda),\tag{5}$$

则有

**引理 1**

$$T^A=\sum_{a\in A}t_a(v_a^*)\hat{v}_a^*\leqslant(1-\lambda)\varphi(C,\phi,\lambda)T^{mix}+(1-\lambda)T^{SO}.$$

**证**　由出行需求划分可知能将 $\boldsymbol{v}^{SO}$ 分解成 $\bar{\boldsymbol{v}}^{SO}=\lambda\boldsymbol{v}^{SO}$ 和 $\hat{\boldsymbol{v}}^{SO}=(1-\lambda)\boldsymbol{v}^{SO}$,则 $\bar{v}_a^{SO}=\lambda v_a^{SO}$, $\hat{v}_a^{SO}=(1-\lambda)v_a^{SO}$, 代入变分不等式(2)中,可以得到

$$\sum_{a\in A}(t_a(v_a^*)+\phi v_a^*t_a'(v_a^*))((1-\lambda)v_a^{SO}-\hat{v}_a^*)\geqslant 0.$$

上式化简可以得到

$$\begin{aligned}T^A=\sum_{a\in A}t_a(v_a^*)\hat{v}_a^*\leqslant\\ &(1-\lambda)T^{SO}+\sum_{a\in A}\{(1-\lambda)(t_a(v_a^*)-t_a(v_a^{SO}))v_a^{SO}+\\ &\phi v_a^*t_a'(v_a^*)((1-\lambda)v_a^{SO}-\hat{v}_a^*)\}\leqslant\\ &(1-\lambda)\varphi(C,\phi,\lambda)T^{mix}+(1-\lambda)T^{SO}.\end{aligned}$$

下面我们先求路段出行函数为严格单调递增凸函数时 $\varphi(C,\phi,\lambda)$ 的取值. 因为式(4) 右端的分母是固定值,我们可证式(4) 右边分子存在着最大值并且最大值点满足 $v_a\in[0,v_a^*]$. 令

$$\begin{aligned}F(v_a)=&(1-\lambda)(t_a(v_a^*)-t_a(v_a))v_a+\\ &\phi v_a^*t_a'(v_a^*)((1-\lambda)v_a-\hat{v}_a^*),\qquad v_a\in[0,+\infty).\end{aligned}$$

显然,函数 $F(v_a)$ 在定义域内连续,故若 $v_a\geqslant v_a^*$ 时满足 $F'(v_a)\leqslant 0$,则说明式(4) 右边分子有最大值,且最大值点位于区间 $[0,v_a^*]$ 内. 又

$$F'(v_a)=(1-\lambda)[t_a(v_a^*)+\phi v_a^*t_a'(v_a^*)-t_a(v_a)-v_at_a'(v_a)],$$

$$F''(v_a)=-(1-\lambda)[2t_a'(v_a)+v_at_a''(v_a)].$$

由 $v_a\geqslant v_a^*\geqslant 0,\lambda\in[0,1]$ 及 $t_a(v_a)$ 是严格递增的凸函数,可知 $F''(v_a)\leqslant 0$. 这说明函数 $F'(v_a)$ 在区间 $v_a\in[v_a^*,+\infty)$ 内递减. 考虑到 $F'(v_a)=(1-\lambda)[t_a(v_a^*)+\phi v_a^*t_a'(v_a^*)-t_a(v_a)-v_at_a'(v_a)]$,故可得 $F'(v_a^*)\leqslant 0$,所以当 $v_a\geqslant v_a^*$ 时有 $F'(v_a)\leqslant F'(v_a^*)\leqslant 0$. 因此,式(4) 右边分子有最大值,且最大值点 $v_a\in[0,v_a^*]$. 又因为路段出行成本函数 $t_a(v_a)$ 是严格单调递增的凸函数,则 $F(v_a)$ 是关于 $v_a$ 的凹函数. 故式(4) 只有唯一最优解 $v_a^{opt}$.

若路段出行成本函数为多项式函数

$$t_a(v_a)=t_{a0}+\alpha_a(v_a)^p,\tag{6}$$

这里, $t_{a0}\geqslant 0$ 表示为常数的自由流出行成本, $\alpha_a>0$ 是特定的路段非负参数, $p>0$ 是整数. 将式(6) 代入 $\mathrm{d}F(v_a)/\mathrm{d}v_a=0$ 中化简可得 $(v_a^{opt})^p+p(v_a^{opt})^p=(v_a^*)^p+p\phi(v_a^*)^p$, 即有

$$v_a^{\mathrm{opt}} = ((1+p\phi)/(1+p))^{1/p} v_a^*.$$

这样,我们可以得到

$$\begin{aligned}
\varphi(C,\phi,\lambda) &= \max_{t_a \in C, a\in A} \varphi_a(t_a, \bar{v}_a^*, \hat{v}_a^*, \phi, \lambda) = \\
&\max_{t_a \in C, a\in A} \max_{v_a \geqslant 0} \frac{(1-\lambda)(t_a(v_a^*) - t_a(v_a))v_a + \phi v_a^* t_a'(v_a^*)((1-\lambda)v_a - \hat{v}_a^*)}{t_a(v_a^*)v_a^*} = \\
&\max_{t_a \in C, a\in A} \frac{p(1-\lambda)((1+p\phi)/(1+p))^{1+1/p} - p\phi\kappa_a}{t_{a0} + \alpha_a (v_a^*)^p} \alpha_a (v_a^*)^p \leqslant \\
&\max_{a\in A} \left\{ p(1-\lambda)\left(\frac{1+p\phi}{1+p}\right)^{1+1/p} - p\phi\kappa_a \right\},
\end{aligned} \tag{7}$$

其中 $\kappa_a = \hat{v}_a^* / v_a^*$. 值得注意的是,式(7)右端的最大值虽然有解,但却不能给出最大值的一般表达式. 当 $\lambda = 0$ 时, $\kappa_a = 1$, 即网络中没有刻板用户,所有的用户都是利他用户,此时式(7)就是 Yu 和 Huang[18] 中的式(18). 当 $\lambda = \phi = 0$ 时, $\varphi(C,0,0) = 1/4$, 此时即网络为经典的 Wardop 路由博弈,可得到调和率的上界为 4/3,即文献[6]中的结论. 当 $p = 1$, 即出行成本函数为仿射函数 $t_a(v_a) = \alpha_a v_a + \beta_a$ 时, 可得 $\varphi(C,\phi,\lambda) \leqslant (1-\lambda)((1+\phi)/2)^2$. 本文的结论是建立在仿射出行成本函数的基础上, 当路段出行成本函数为仿射函数, Karakostas 等[15] 得到了如下的结论:

**引理 2**

$$T^O = \sum_{a\in A} t_a(v_a^*)\bar{v}_a^* \leqslant \frac{n\lambda D\gamma}{v_{\min}^{\mathrm{SO}}} T^{\mathrm{SO}},$$

其中

$$D = \sum_{w\in W} d_w,\ n = |V|,\ \gamma = \frac{\max_{a\in A} \alpha_a}{\min_{a\in A} \alpha_a},\ v_{\min}^{\mathrm{SO}} = \min_{a\in A} v_a^{\mathrm{SO}}.$$

故有

**定理 1** 设由刻板用户和利他用户构成的混合交通网络中,出行需求划分系数为 $\lambda$,利他用户的利他系数为 $\phi$. 在仿射出行成本函数下,有

$$\rho^{\mathrm{mix}} \leqslant \frac{4(1-\lambda + n\lambda D\gamma / v_{\min}^{\mathrm{SO}})}{4 - (1-\lambda)^2(1+\phi)^2}. \tag{8}$$

**证** 由引理 1 和引理 2,可得

$$\begin{aligned}
T^{\mathrm{mix}} &= T^A + T^O = \sum_{a\in A} t_a(v_a^*)\hat{v}_a^* + \sum_{a\in A} t_a(v_a^*)\bar{v}_a^* \leqslant \\
&(1-\lambda)\varphi(C,\phi,\lambda)T^{\mathrm{mix}} + (1-\lambda)T^{\mathrm{SO}} + \frac{n\lambda D\gamma}{v_{\min}^{\mathrm{SO}}} T^{\mathrm{SO}},
\end{aligned}$$

因此

$$\rho^{\mathrm{mix}} = \frac{T^{\mathrm{mix}}}{T^{\mathrm{SO}}} \leqslant \frac{1-\lambda + n\lambda D\gamma / v_{\min}^{\mathrm{SO}}}{1 - (1-\lambda)\varphi(C,\phi,\lambda)}.$$

在仿射出行成本函数下,有 $\varphi(C,\phi,\lambda) \leqslant (1-\lambda)((1+\phi)/2)^2$, 故

$$\rho^{\mathrm{mix}} \leqslant \frac{4(1-\lambda + n\lambda D\gamma / v_{\min}^{\mathrm{SO}})}{4 - (1-\lambda)^2(1+\phi)^2}.$$

设 $r_w$ 为 OD 对 $w$ 上的刻板用户选择的出行路径,则可得:

**定理 2** 设由刻板用户和利他用户构成的混合交通网络中,出行需求划分系数为 $\lambda$,利他

用户的利他系数为 $\phi$. 在仿射出行成本函数下,有

$$\rho^{\mathrm{mix}} \leqslant \frac{4\left(1-\lambda+\lambda D \sum_{w \in W} \sum_{a \in r_w}\left(\alpha_a D+\beta_a\right) / T^{\mathrm{SO}}\right)}{4-(1-\lambda)^2(1+\phi)^2}. \tag{9}$$

**证**　由于

$$T^O=\sum_{a \in A} t_a\left(v_a^*\right) \bar{v}_a^*=\sum_{a \in A}\left(\alpha_a \bar{v}_a^*+\beta_a\right) \bar{v}_a^*=$$
$$\sum_{w \in W} \sum_{a \in r_w}\left(\alpha_a \bar{v}_a^*+\beta_a\right) \lambda d_w \leqslant \lambda D \sum_{w \in W} \sum_{a \in r_w}\left(\alpha_a D+\beta_a\right).$$

故

$$T^{\mathrm{mix}}=T^A+T^O \leqslant$$
$$(1-\lambda)(1-\lambda)\left(\frac{1+\phi}{2}\right)^2 T^{\mathrm{mix}}+(1-\lambda) T^{\mathrm{SO}}+\lambda D \sum_{w \in W} \sum_{a \in r_w}\left(\alpha_a D+\beta_a\right),$$

即

$$\rho^{\mathrm{mix}} \leqslant \frac{4\left(1-\lambda+\lambda D \sum_{w \in W} \sum_{a \in r_w}\left(\alpha_a D+\beta_a\right) / T^{\mathrm{SO}}\right)}{4-(1-\lambda)^2(1+\phi)^2}.$$

## 3　结束语

本文研究了固定出行需求下由刻板用户和利他用户组成的混合路由博弈的调和率上界问题. 首先,构建了与出行决策行为等价的变分不等式模型,然后推导了这类混合路由博弈的调和率上界,该上界依赖于路段出行成本函数类、出行需求划分系数、利他系数、网络总出行需求、网络路段数目以及网络路段的一致性等方面. 如何界定弹性需求下的上界是我们下一步的研究方向.

## 参考文献(References):


[1]　丁协平. 局部凸 H-空间内的约束多目标对策[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(5): 441-449. (DING Xie-ping. Constrained multiobjective games in locally convex H-spaces[J]. *Applied Mathematics and Mechanics* (*English Edition*), 2003, **24**(5):499-508.)

[2]　丁协平. 局部 FC-一致空间内凝聚映象的极大元和广义对策及应用(I)[J]. 应用数学和力学, 2007, **28**(12):1392-1399. (DING Xie-ping. Maximal elements and generalized games involving condensing mappings in locally FC-uniform spaces and applications(I)[J]. *Applied Mathematics and Mechanics* (*English Edition*), 2007, **28**(12):1561-1568.)

[3]　俞建. 博弈论与非线性分析[M]. 科学出版社, 2008. (YU Jian. *Game Theory and Non-Linear Analysis*[M]. Science Press, 2008. (in Chinese))

[4]　Lin Z. Essential components of the set of weakly Pareto-Nash equilibrium points for multiobjective generalized games in two different topological space[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2005, **124**(2): 387-405.

[5]　Koutoupias E, Papaimitriou C. Worst-case equilibria[C]//*Proceedings of the* 16*th Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*. NCS 1563, 1999: 404-413.

[6]　Roughgarden T, Tardos E. How bad is selfish routing? [J]. *Journal of the ACM*, 2002, **49**(2): 236-259.

[7]　Yang H, Huang H J. *Mathematical and Economic Theory of Road Pricing*[M]. Oxford:

Elsevier, 2005.

[8] Roughgarden T, Tardos E. The price of anarchy is independent of the network topology[J]. *Journal of Computer and System Science*, 2003, **67**(2): 341-364.

[9] Correa J R, Schulz A S, Stier-Moses N S. Selfish routing in capacitated networks[J]. *Mathematics of Operations Research*, 2004, **29** (4): 961-976.

[10] 刘天亮, 欧阳恋群, 黄海军. ATIS作用下的混合交通行为网络与效率损失上界[J]. 系统工程理论与实践, 2007, **27**(4): 154-159. (LIU Tian-liang, OUYANG Lian-qun, HUANG Hai-jun. Mixed travel behavior in networks with ATIS and upper bound of efficiency loss[J]. *Systems Engineering-Theory & Practice*, 2007, **27**(4):154-159. (in Chinese))

[11] Han D R, Yang H. The multiclass, multicriterion traffic equilibrium and the efficiency of congestion pricing[J]. *Transportation Research Part E*, 2008, **44**(5): 753-773.

[12] Guo X L, Yang H. User heterogeneity and bi-criteria system optimum[J]. *Transportation Research Part B*, 2009, **43**(4):379-390.

[13] Yu X J, Huang H J. Efficiency loss of mixed equilibrium behaviors with polynomial cost functions[J]. *Promet Traffic & Transportation*, 2010, **22**(5): 325-331.

[14] Chen P A, Kempe D. Altruism, selfishness, and spite in traffic routing[C]//*Proceedings of the 9th ACM Conference on Electronic Commerce*. Chicago, Illinois, USA, 2008: 140-149.

[15] Karakostas G, Kim T, Viglas A, Xia H. On the degradation of performance for traffic networks with oblivious users[J]. *Transportation Research Part B*, 2011, **45**(2): 364-371.

[16] 侯海洋. 一类包含刻板用户的Wardrop路由博弈[J]. 应用数学学报, 2008, **31**(4): 577-583. (HOU Hai-yang. A class of selfish routing with oblivious agents[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2008,**31**(4):577-583. (in Chinese))

[17] 黄海军. 城市交通网络平衡分析理论与实践[M]. 北京:人民交通出版社,1994. (HUANG Hai-jun. *Urban Transportation Network Equilibrium Analysis Theory and Practice*[M]. Beijing: China Communication Press,1994. (in Chinese))

[18] Yu X J, Huang H J. Inefficiency of the uniform altruism traffic assignment[C]//*Proceeding of the Second International Conference on Intelligent Computation Technology and Automation*. Zhangjiajie, Hu'nan, China, 2009: 629-632.

# On Coordination Ratio of a Mixed Routing Game

YU Xiao-jun

(*School of Mathematics and Statistics*, *Guizhou University of Finance and Economics*; *Guizhou Key Laboratory of Economic System Simulation*, *Guiyang* 550004, *P. R. China*)

**Abstract**: The upper bound of the coordination ratio for a mixed routing game associated with oblivious users and altruistic users with fixed demand was investigated by algorithmic game theory. Firstly, the variational inequality model was established to describe this mixed routing game. Then, the upper bound of coordination ratio was derived by analytic derivation. The results took the results in existence literatures as its special case.

**Key words**: oblivious users; altruistic users; routing game; variational inequality; coordination ratio