

# 一类受媒体影响的传染病模型的研究\*

刘玉英, 肖燕妮

(西安交通大学 数学与统计学院,西安 710049)

(唐三一推荐)

**摘要:** 媒体报道对传染病的感染率有着重要的影响,为探究这种影响建立了一个受媒体影响且具有分段感染率的传染病模型.首先,计算出模型的所有平衡态,并根据基本再生数的大小分析了各平衡态的局部稳定性.其次,通过排除极限环的存在性证明了平衡态的全局渐近稳定性.最后,对媒体影响传染病模型的动力学性态进行了讨论.

**关键词:** 媒体影响; 传染病模型; 分段光滑; 全局渐近稳定性

**中图分类号:** O175.13      **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.04.008

## 引 言

2009年爆发于墨西哥的H1N1流感病毒是一种非常危险并能导致肺炎的病毒,并于爆发后迅速传遍全球.一些染病者甚至出现呼吸衰竭、多重器官伤害从而导致死亡.H1N1流感已经导致1.6万人死亡,130万人感染.在中国,感染H1N1的人数约为10.3万,约占总人口的0.00792%.自从H1N1流感爆发后,公共媒体每天都会对感染者数量、死亡病例数量、感染疾病的症状和预防措施等进行大量的报道.如此一来,人们会选择戴口罩、频繁洗手等来预防感染,这些措施都能大大减少染病者数量.相反,如果没有媒体的报道,很多易感者会因为不注意、不知情而感染;而染病者会因为低估病情不去医院治疗从而将疾病传染给其它易感者.综上,媒体报道的作用会极大的减小感染率.

通过建立数学模型来讨论媒体作用对传染病感染率的影响是一个有效的方法,很多研究者都引入了媒体影响因子函数 $f(I)$ 来刻画媒体报道对感染率<sup>[1-3]</sup>的影响.参考文献[4]讨论了一个受媒体影响的EIH模型,其中的媒体影响因子函数为 $f(E, I, H) = e^{-a_1 E - a_2 I - a_3 H}$ , $E, I, H$ 分别代表易感者、感染者、住院者.参考文献[5]用一个非线性函数 $f(I) = k/(1 + aI^2)$ 来表示媒体影响因子函数,得出疾病的消除与否只取决于基本再生数 $R_0$ .参考文献[6]用 $f(I) = k/(S + aI)$ 来表示当感染者与易感者比值变大时人们行为的变化.他们得出结论如下:当基本再生数 $R_0 < 1$ 时,疾病消除平衡态全局渐近稳定;当 $R_0 > 1$ 时,地方病平衡态全局渐近稳定.参考文

\* 收稿日期: 2013-03-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11171268)

作者简介: 刘玉英(1989—),女,山东人,硕士(E-mail: liuyuyinghere111@126.com);

肖燕妮(1973—),女,教授,博士生导师(通讯作者. Tel: +86-29-82663156; E-mail: yxiao@mail.xjtu.edu.cn).

献[7]用非线性函数  $\beta_i(I_i) = a_i - b_i f_i(I_i)$  来表示媒体影响下传染病的有效接触率;其中,  $a_i$  是在第  $i$  组内易感人群与感染者群体的最大有效接触率,  $b_i$  是媒体影响可达到的对有效接触率的最大抵消作用. 他们的主要结论为媒体影响并不是决定疾病爆发与否的最重要因素, 但媒体对疾病的传播规模有很大作用.

事实上, 在传染病爆发初期, 媒体报道对传染病感染率的削弱作用尤为明显. 随着疫情的扩散, 这种在感染率上的削减作用会越来越弱, 随着疫情继续蔓延, 易感者人群已不能形成新的习惯来避免感染. 这意味着感染者数目有一个临界值, 当达到这个临界值时, 易感者人群的行为变化达到最大, 也即媒体报道的削减作用达到最大; 随着染病者人数的继续增加, 易感者人群仍然需要参加必要的社会活动与别人进行接触, 媒体影响因子函数达到饱和. 在本篇文章中, 构造了一个能刻画媒体影响饱和性的函数. 令非光滑函数  $f(I)$  来描述媒体影响因子的这种饱和性

$$f(I) = \begin{cases} e^{-mI}, & 0 < I \leq I_c, \\ e^{-mI_c}, & I > I_c, \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $m$  是影响因子,  $m > 0$ , 用来反映媒体报道对有效接触率的影响<sup>[8-9]</sup>. 这个函数也可以解释为当染病者数低于临界值时, 影响因子函数随着染病者的增加成指数递减的趋势. 然而, 一旦染病者数量达到或超过这个临界水平时, 影响因子会保持在一个固定值上. 本文的目的是在理论上对具有分段光滑感染率的传染病模型进行动力学分析, 并由此来研究媒体报道对传染病传播的影响.

## 1 模型的建立

在本文中, 将人群划分为易感者 ( $S$ ), 感染者 ( $I$ ) 以及恢复者 ( $R$ ). 在  $t$  时刻的总人口数目用  $N(t)$  表示, 则有  $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$ . 用关于  $I$  的函数  $f(I)$  来表示媒体影响对传染病感染率的削减作用. 我们用方程(1)作为媒体影响因子函数嵌入传染病模型的感染率中, 得到新的传染病动力学模型如下:

$$\begin{cases} S' = \Lambda - dS - f(I)\beta SI, \\ I' = f(I)\beta SI - (d + \gamma + \varepsilon)I, \\ R' = \gamma I - dR, \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $\Lambda$  是人口的内禀增长率,  $d$  是自然死亡率,  $\gamma$  是疾病的自然恢复率,  $\varepsilon$  是疾病的死亡率,  $\beta$  是疾病的传染率. 显然, 集合  $R_+^3 = \{(S, I, R) : S \geq 0, I \geq 0, R \geq 0\}$  是正不变集, 即模型(2)的初值若是非负的, 那么它的解应是非负的且是有界的. 由于  $R$  在模型(2)的前两式中没有出现, 我们可以只考虑包含  $S$  和  $I$  的前两个方程. 令  $H(\mathbf{Z}) = I - I_c$ , 其中  $\mathbf{Z} = (S, I)^T$ , 且

$$\begin{aligned} F_{G_1}(\mathbf{Z}) &= (\Lambda - e^{-mI}\beta SI - dS, e^{-mI}\beta SI - \gamma I - dI - \varepsilon I)^T, \\ F_{G_2}(\mathbf{Z}) &= (\Lambda - e^{-mI_c}\beta SI - dS, e^{-mI_c}\beta SI - \gamma I - dI - \varepsilon I)^T. \end{aligned}$$

那么模型(2)可以写成如下的非光滑系统<sup>[10]</sup>:

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = \begin{cases} F_{G_1}(\mathbf{Z}), & \mathbf{Z} \in G_1, \\ F_{G_2}(\mathbf{Z}), & \mathbf{Z} \in G_2, \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$G_1 = \{\mathbf{Z} \in R_+^2 : H(\mathbf{Z}) \leq 0\}, G_2 = \{\mathbf{Z} \in R_+^2 : H(\mathbf{Z}) > 0\},$$

且  $R_+^2 = \{\mathbf{Z} = (S, I) : S \geq 0, I \geq 0\}$ . 此外, 分开两个区域  $G_1$  与  $G_2$  的切换面为

$$\Sigma = \{Z \in R^2 : H(Z) = 0\}.$$

由此,我们称非光滑系统(3)在区域  $G_1$  上的部分为系统  $S_{G_1}$ ,在区域  $G_2$  上的部分系统为系统  $S_{G_2}$ .采用方程(1)作为影响因子函数的模型(2)实际上是一个分段光滑系统<sup>[11-12]</sup>.系统(3)是 Filippov 系统<sup>[13]</sup>的一种特殊形式,为了讨论的方便,有必要对分段光滑系统(3)的各平衡点做出如下定义:

**定义 1** 若点  $Z^*$  满足  $F_{S_{G_1}}(Z^*) = 0, H(Z^*) \leq 0$  或  $F_{S_{G_2}}(Z^*) = 0, H(Z^*) > 0$ ,那么称之为系统(3)的真平衡态.如果满足  $F_{S_{G_1}}(Z^*) = 0, H(Z^*) > 0$  或者  $F_{S_{G_2}}(Z^*) = 0, H(Z^*) \leq 0$ ,那么称之为系统(3)的假平衡态.

## 2 模型分析

为更好地展现平衡点的性质,我们引入 Lambert  $W$  函数的定义和一些简单性质<sup>[14-15]</sup>.

**定义 2** Lambert  $W$  函数是函数  $f(z) = ze^z$  的反函数,且满足:

$$\text{Lambert } W(z) \exp(\text{Lambert } W(z)) = z. \quad (4)$$

注意函数  $f(z) = z \exp(z)$  在  $z > -1$  时有正导数  $f'(z) = (z+1) \exp(z)$ .在区间  $[-1, \infty)$  上定义  $f(z) = z \exp(z)$  的反函数为 Lambert  $W(0, z) = \text{Lambert } W(z)$ .为了简便我们使用  $W(z)$  来表示 Lambert  $W(z)$ .易得当  $z > 0$  时有  $W(z) > 0$ ,且当  $z > -1$  时  $W(z)$  为增函数.类似的,我们可以在区间  $(-\infty, -1]$  上定义  $z \exp(z)$  的反函数为 Lambert  $W(-1, z)$ .

不考虑已恢复者  $R$  的方程,模型(2)变为

$$\begin{cases} S' = \Lambda - dS - f(I)\beta SI, \\ I' = f(I)\beta SI - (d + \gamma + \varepsilon)I. \end{cases} \quad (5)$$

首先,我们计算系统(5)所有可能的平衡点.根据感染者数目  $I$  与临界值  $I_c$  的关系,我们分如下两种情况讨论:

(i) 当  $0 < I \leq I_c$  时,系统  $S_{G_1}$  (即定义在区域  $G_1$  上的系统(5))有两个平衡点,疾病消除平衡态  $E_0(\Lambda/d, 0)$  和地方病平衡态

$$E_1(S_1, I_1) = \left( \frac{d + \gamma + \varepsilon}{dm} W\left(\frac{md}{\beta} e^{m\Lambda/(d+\gamma+\varepsilon)}\right), \frac{\Lambda}{d + \gamma + \varepsilon} - \frac{1}{m} W\left(\frac{md}{\beta} e^{m\Lambda/(d+\gamma+\varepsilon)}\right) \right).$$

显然,由于  $W((md/\beta) e^{m\Lambda/(d+\gamma+\varepsilon)}) > 0$ ,所以  $S_1 > 0$ .故地方病平衡点  $E_1$  存在的充分必要条件为

$$\frac{\Lambda}{d + \gamma + \varepsilon} - \frac{1}{m} W\left(\frac{md}{\beta} e^{m\Lambda/(d+\gamma+\varepsilon)}\right) > 0. \quad (6)$$

根据函数  $W(z)$  的性质,式(6)等价于

$$\frac{md}{\beta} e^{m\Lambda/(d+\gamma+\varepsilon)} < \frac{m\Lambda}{d + \gamma + \varepsilon} e^{m\Lambda/(d+\gamma+\varepsilon)}.$$

即当  $R_0 > 1$  平衡点  $E_1$  存在,其中  $R_0 = \beta\Lambda/(d(d + \gamma + \varepsilon))$  为基本再生数.基本再生数是指在易感者人群中,只有一个染病者时,该染病者在其传染周期内所感染的平均人数.显然平衡点  $E_0$  也位于区域  $G_1$  中,因此  $E_0$  是真平衡态.当  $I_1 \leq I_c$  时,若地方病平衡态  $E_1$  是真平衡态,应有

$$\frac{\Lambda}{d + \gamma + \varepsilon} - \frac{1}{m} W\left(\frac{md}{\beta} e^{m\Lambda/(d+\gamma+\varepsilon)}\right) \leq I_c.$$

考虑到 Lambert  $W$  函数的单调性,上式即为

$$\left(\frac{m\Lambda}{d+\gamma+\varepsilon} - mI_c\right) e^{-mI_c+m\Lambda/(d+\gamma+\varepsilon)} \leq \frac{md}{\beta} e^{m\Lambda/(d+\gamma+\varepsilon)}. \quad (7)$$

通过简单计算易知式(7)等价于  $\beta\Lambda/(d(d+\gamma+\varepsilon)) \leq e^{mI_c} + \beta I_c/d$ . 因此, 如果满足条件  $R_0 \leq e^{mI_c} + \beta I_c/d$ , 地方病平衡态  $E_1$  位于区域  $G_1$  内, 为真平衡态, 否则为假平衡态.

(ii) 当  $I > I_c$  时, 系统  $S_{C_2}$  有两个平衡点: 疾病消除平衡态  $E'_0(\Lambda/d, 0)$  和地方病平衡态

$$E_2(S_2, I_2) = \left(\frac{d+\gamma+\varepsilon}{\beta} e^{mI_c}, \frac{\Lambda}{d+\gamma+\varepsilon} - \frac{d}{\beta} e^{mI_c}\right).$$

当且仅当  $R_c > 1$  时  $E_2$  有意义, 其中  $R_c = \beta\Lambda e^{-mI_c}/(d(d+\gamma+\varepsilon))$ . 注意  $E'_0$  在区域  $G_1$  中, 因此是假平衡态. 若  $I_2 > I_c$  时, 地方病平衡态  $E_2$  是真平衡态. 即当  $R_0 > e^{mI_c} + \beta I_c/d$  时, 地方病平衡态  $E_2$  是真平衡态, 否则是假平衡态.

下面讨论各平衡态  $E_0, E'_0, E_1$  和  $E_2$  的局部稳定性.

**定理 1** 对子系统  $S_{C_1}$ , 当  $R_0 < 1$  时疾病消除平衡态  $E_0$  是局部渐近稳定的. 当  $R_0 > 1$  时,  $E_1$  是局部渐近稳定的. 对于子系统  $S_{C_2}$  来说, 当  $R_c < 1$  时,  $E'_0$  是局部渐近稳定的; 当  $R_c > 1$  时,  $E_2$  是局部渐近稳定的.

**证明** 首先考虑当  $I \leq I_c$  的情形, 通过直接计算我们能得到平衡态  $E_0$  的特征方程是

$$(\lambda + d)\left(\lambda - \frac{\beta\Lambda}{d} + d + \gamma + \varepsilon\right) = 0.$$

故当  $R_0 < 1$  时, 该特征方程有两个负特征值. 这表明当  $R_0 < 1$  时, 疾病消除平衡态  $E_0$  是局部渐近稳定的.

下面考虑  $E_1$  的稳定性. 通过计算可知, 平衡态  $E_1$  的特征方程为  $\lambda^2 + B\lambda + C = 0$ , 其中

$$\begin{aligned} B &= d + e^{-mI_1}\beta I_1 - e^{-mI_1}\beta S_1 + e^{-mI_1}\beta S_1 I_1 m + d + \gamma + \varepsilon, \\ C &= (d + e^{-mI_1}\beta I_1)(-e^{-mI_1}\beta S_1 + e^{-mI_1}\beta S_1 I_1 m + d + \gamma + \varepsilon) + \\ &\quad e^{-mI_1}\beta I_1(e^{-mI_1}\beta S_1 - e^{-mI_1}\beta S_1 I_1 m). \end{aligned}$$

当  $R_0 > 1$  时, 由定义 2 可以证明  $B > 0, C > 0$  (详见附录 1). 因此如果地方病平衡态  $E_1$  存在, 那么它是局部渐近稳定的. 类似地我们也通过证明子系统  $S_{C_2}$  的各平衡态的特征多项式根的正负来判断  $E'_0$  和  $E_2$  的局部渐近稳定性. 结论为当  $R_c < 1$  时,  $E'_0$  是局部渐近稳定的, 当  $R_c > 1$  时,  $E_2$  是局部渐近稳定的 (详见附录 2). 证毕.

为了得到各个平衡点的全局稳定性, 我们引入参考文献 [11] 的一个引理. 为了方便表示, 将系统(5)右侧的两式分别用  $f_1, f_2$  来表示.

**引理 1** 如果  $\text{int } R_+^2$  中的连续函数  $D$  满足在  $I \neq I_c$  时是连续可微的, 且有

$$\frac{\partial(Df_1)}{\partial S} + \frac{\partial(Df_2)}{\partial I} < 0 (> 0), \quad \text{当 } I \neq I_c \text{ 时,}$$

那么系统(5)没有极限环.

据此我们可以得到如下定理:

**定理 2** 系统(5)不存在极限环.

**证明** 对系统(5), 由定义有  $f_1 = \Lambda - dS - f(I)\beta SI, f_2 = f(I)\beta SI - (d + \gamma + \varepsilon)I$ . 考虑如下连续的 Dulac 函数:  $D(S, I) = 1/(SI)$ , 易得

$$\text{当 } 0 < I \leq I_c \text{ 时, } \frac{\partial(Df_1)}{\partial S} + \frac{\partial(Df_2)}{\partial I} = -\frac{\Lambda}{S^2 I} - m\beta e^{-mI} < 0;$$

$$\text{当 } I > I_c \text{ 时, } \frac{\partial(Df_1)}{\partial S} + \frac{\partial(Df_2)}{\partial I} = -\frac{\Lambda}{S^2 I} < 0,$$

故由引理 1 可知系统(5)不存在极限环. 证毕.

**定理 3** 当  $R_0 < 1$  时疾病消除平衡态  $E_0(E'_0)$  是全局渐近稳定的.

**证明** 由  $R_0 < 1$ , 通过计算可知地方病平衡态  $E_1$  不存在,  $E_0$  是真平衡态且其在  $G_1$  中是局部稳定的. 而  $E'_0$  是系统  $S_{G_2}$  的假平衡态, 且对于系统  $S_{G_2}$  来说也是局部稳定的. 又因

$$R_c = \frac{\beta \Lambda e^{-mI_c}}{d(d + \gamma + \varepsilon)} < \frac{\beta \Lambda}{d(d + \gamma + \varepsilon)} < 1$$

成立, 所以平衡点  $E_2$  不存在. 由定理 2 知, 系统(5)不存在极限环, 故所有起点在  $G_2$  中的曲线将会趋于  $G_1$  中的平衡点  $E'_0$ . 由此, 所有起点在  $G_2$  中的曲线最终将会进入  $G_1$ . 而所有起点在  $G_1$  中的曲线将会最终趋于  $E_0$ . 因此我们得出结论, 系统(5)中所有的解都将趋于疾病消除平衡态  $E_0$ . 注意到  $E_0$  和  $E'_0$  是重合的, 因此疾病消除平衡态  $E_0$  (或  $E'_0$ ) 是全局渐近稳定的. 证毕.

**定理 4** 当  $1 < R_0 < e^{mI_c} + \beta I_c/d$  时, 地方病平衡态  $E_1$  是全局渐近稳定的. 当  $R_0 > e^{mI_c} + \beta I_c/d$  时, 地方病平衡态  $E_2$  是全局渐近稳定的.

**证明** 当  $R_0 > 1$  时, 我们能够得到  $E_1$  存在且是局部渐近稳定的. 由  $R_0 < e^{mI_c} + \beta I_c/d$  可得地方病平衡态  $E_1$  在  $G_1$  中, 因此  $E_1$  是真平衡态. 下面分两种情况来讨论平衡态的全局稳定性.

(i) 当  $1 < R_0 \leq e^{mI_c}$  时, 我们容易得到  $R_c \leq 1$ . 则地方病平衡态  $E_2$  不存在. 系统  $S_{G_2}$  的假平衡态  $E'_0$  存在、局部渐近稳定且在  $G_1$  中. 因此所有起点在  $G_2$  中的曲线最终都会趋于位于  $G_1$  中的点  $E'_0$ , 由此所有起点在  $G_2$  中的曲线最终将会进入  $G_1$ . 而  $E_1$  是  $G_1$  中的局部渐近稳定点, 故所有  $G_1$  中的曲线都会趋于  $E_1$ . 又因系统(5)不存在极限环, 因此无论曲线的起点是在  $G_1$  还是  $G_2$ , 它们都将趋于地方病平衡态  $E_1$ .

(ii) 当  $e^{mI_c} < R_0 < e^{mI_c} + \beta I_c/d$  时, 易得  $R_c > 1$ . 因此系统  $S_{G_2}$  的平衡点  $E_2$  存在且是局部渐近稳定的. 由  $R_0 < e^{mI_c} + \beta I_c/d$  可得地方病平衡态  $E_2$  在区域  $G_1$  中, 故为假平衡态. 故所有从  $G_2$  开始的曲线将会趋于  $E_2$ , 由于  $E_2$  在  $G_1$  中, 故所有从  $G_2$  开始的曲线都将进入  $G_1$ . 又因  $R_0 > 1$ , 所有  $G_1$  中的曲线都将趋于  $E_1$ . 总之, 在此条件下所有从  $G_1$  和  $G_2$  出发的曲线都将趋于地方病平衡态  $E_1$ .

当  $R_0 > e^{mI_c} + \beta I_c/d$  时, 易得  $R_c > 1$ . 此时  $E_0$  和  $E'_0$  不稳定, 而  $E_1$  和  $E_2$  存在且局部渐近稳定,  $E_1$  和  $E_2$  都在区域  $G_2$  上. 所以  $E_1$  是假平衡态. 故所有从  $G_1$  出发的曲线都会进入区域  $G_2$  中. 同时, 由于真平衡态  $E_2$  在区域  $G_2$  中是局部渐近稳定的, 所有  $G_2$  中的曲线都将趋于  $E_2$ . 综上所述, 此时从  $G_1$  或  $G_2$  出发的任意曲线都将趋于  $E_2$ , 也即真平衡态  $E_2$  在  $R_0 > e^{mI_c} + \beta I_c/d$  时是全局渐近稳定的. 证毕.

为比较具有饱和性的媒体影响函数与不具饱和性的媒体影响函数对传染病动力学性质的影响, 我们考虑指数递减的媒体影响因子函数的模型, 则系统(5)变为如下的一个光滑模型:

$$\begin{cases} S' = \Lambda - dS - e^{-mI} \beta SI, \\ I' = e^{-mI} \beta SI - (d + \gamma + \varepsilon)I. \end{cases} \quad (8)$$

通过计算可得, 模型(8)有疾病消除平衡态  $E_3(\Lambda/d, 0)$  和地方病平衡态

$$E_4\left(\frac{d + \gamma + \varepsilon}{md} W\left(\frac{md}{\beta} e^{m\Lambda/(d+\gamma+\varepsilon)}\right), \frac{\Lambda}{d + \gamma + \varepsilon} - \frac{1}{m} W\left(\frac{md}{\beta} e^{m\Lambda/(d+\gamma+\varepsilon)}\right)\right).$$

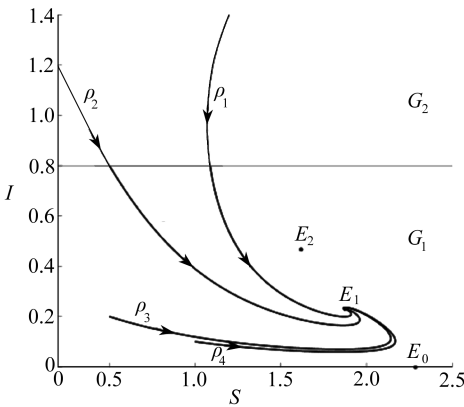


很容易可得当  $R_0 < 1$  时, 疾病消除平衡态  $E_3$  全局渐近稳定, 当  $R_0 > 1$ , 地方病平衡态  $E_4$  全局渐近稳定. 通过计算显示系统(5)的地方病平衡态中感染者数目要比采用光滑感染因子的模型(8)的感染者数目多. 这意味着如果忽视媒体影响的饱和效应, 媒体对传染病感染率的影响将会被高估.

### 3 结 论

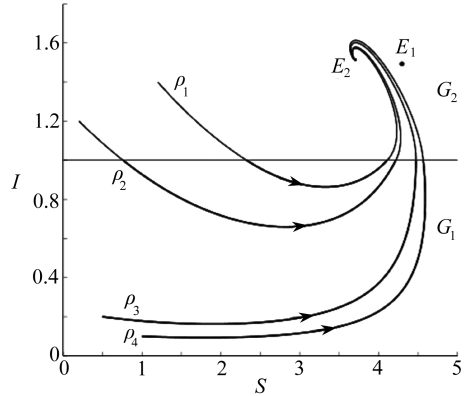
为了描述媒体影响的作用, 很多研究者用媒体影响因子函数来反映媒体报道对感染率的影响. 媒体影响因子函数通常选为指数递减的形式如  $f(I) = e^{-mI}$  或者其它非线性函数的形式如  $f(I) = c - \beta I$  或者  $f(I) = kSI/(H + I)$ . 本文中取了如方程(1)的具有饱和性的媒体影响因子函数, 这种函数能够更合理地描述媒体对传染病感染率的影响.

由于该模型的平衡态并不能用简单函数表示, 因此我们引入了 Lambert  $W$  函数来明确给出平衡态表达式. 我们利用了 Lambert  $W$  函数在区间上的单调性来分析了平衡点局部渐近稳定性的过程, 并通过排除极限环的存在性来证明系统(5)平衡态的全局渐近稳定性. 当  $R_0 < 1$  时, 疾病消除平衡态  $E_0$  是全局渐近稳定的. 由于媒体影响函数最终会随着疾病的蔓延而保持在一个常数水平上, 我们引入一个阈值参数  $R_c$  来帮助解决  $E_1$  和  $E_2$  的全局稳定性问题. 当  $R_0 > 1$  且  $1 < R_c < 1 + \beta I_c e^{mI_c}/d$  时,  $E_1$  是真平衡态且是全局渐近稳定的, 当  $R_c > 1 + \beta I_c e^{mI_c}/d$  时,  $E_2$  是真平衡态且是全局渐近稳定的. 图 1 分别显示了不同参数下地方病平衡态  $E_1$  和  $E_2$  的全局稳定性.



(a)  $G_1$  中  $E_1$  的全局稳定性

(a) Global stability of  $E_1$  which lies in the region  $G_1$



(b)  $G_2$  中  $E_2$  的全局稳定性

(b) Global stability of  $E_2$  which lies in the region  $G_2$

图 1 SIR 模型的  $S$ - $I$  相平面, 显示了各地方病平衡态的全局稳定性

( $S$  为易感者人数,  $I$  为感染者人数)

Fig. 1 Phase plane  $S$ - $I$  for SIR model, showing the global stability of the endemic state

( $S$  denote the number of susceptibles,  $I$  denote the infectives)

注 图 1(a) 中参数为  $\Lambda = 1, \beta = 0.6, \gamma = 0.3, \varepsilon = 0.4, d = 0.4, I_c = 0.8, m = 0.1$ , 故有  $R_0 \approx 1.3636$ ,  $e^{mI_c} + \beta I_c/d \approx 2.28$ , 也即  $1 < R_0 < e^{mI_c} + \beta I_c/d$ .

图 1(b) 中参数为  $\Lambda = 3, \beta = 0.6, \gamma = 0.4, \varepsilon = 0.2, d = 0.4, I_c = 1, m = 0.8$ , 由此可得  $R_0 \approx 4.5$ ,  $e^{mI_c} + \beta I_c/d \approx 3.7255$ , 也即  $R_0 > e^{mI_c} + \beta I_c/d$ .

## 附录 1

定理 1 中  $B > 0, C > 0$  的证明.

为了简便,我们令  $l = (md/\beta)e^{m\Lambda/(d+\gamma+\varepsilon)}$ , 此时我们有

$$S_1 = \frac{d + \gamma + \varepsilon}{md} W\left(\frac{md}{\beta} e^{m\Lambda/(d+\gamma+\varepsilon)}\right) = \frac{d + \gamma + \varepsilon}{md} W(l),$$

$$I_1 = \frac{\Lambda}{d + \gamma + \varepsilon} - \frac{1}{m} W\left(\frac{md}{\beta} e^{m\Lambda/(d+\gamma+\varepsilon)}\right) = \frac{\Lambda}{d + \gamma + \varepsilon} - \frac{1}{m} W(l).$$

由 Lambert  $W$  函数的定义, 可得

$$W(l)e^{W(l)} = l = \frac{md}{\beta} e^{m\Lambda/(d+\lambda+\varepsilon)}, \quad W(l) = \frac{md}{\beta} e^{m\Lambda/(d+\lambda+\varepsilon)} e^{-W(l)}.$$

而

$$B = d + e^{-mI_1}\beta I_1 - e^{-mI_1}\beta S_1 + e^{-mI_1}\beta S_1 I_1 m + d + \gamma + \varepsilon,$$

对其化简可得

$$\begin{aligned} B &= 2d + \gamma + \varepsilon + e^{-mI_1}\beta I_1 - e^{-mI_1}\beta S_1 + e^{-mI_1}\beta S_1 I_1 m = \\ &= e^{-mI_1} \left[ (2d + \gamma + \varepsilon) e^{mI_1} - \beta S_1 + (1 + mS_1)\beta I_1 \right] = \\ &= e^{-mI_1} \left[ (2d + \gamma + \varepsilon) e^{m\Lambda/(d+\gamma+\varepsilon) - W(l)/m} - \beta \frac{d + \gamma + \varepsilon}{md} W(l) + (1 + mS_1)\beta I_1 \right] = \\ &= e^{-mI_1} \left[ (2d + \gamma + \varepsilon) e^{m\Lambda/(d+\gamma+\varepsilon)} e^{-W(l)} - \beta \frac{d + \gamma + \varepsilon}{md} W(l) + (1 + mS_1)\beta I_1 \right] = \\ &= e^{-mI_1} \left[ (2d + \gamma + \varepsilon) \frac{\beta}{md} W(l) - \beta \frac{d + \gamma + \varepsilon}{md} W(l) + (1 + mS_1)\beta I_1 \right] = \\ &= e^{-mI_1} \left[ \frac{\beta d W(l)}{md} + (1 + mS_1)\beta I_1 \right] > 0. \end{aligned}$$

下面考虑  $C$ , 首先易得

$$e^{mI_1} = e^{m\Lambda/(d+\lambda+\varepsilon)} e^{-W(l)} = e^{m\Lambda/(d+\lambda+\varepsilon)} W(l) \frac{\beta}{md} e^{-m\Lambda/(d+\lambda+\varepsilon)} = \frac{\beta}{md} W(l).$$

利用  $e^{mI_1} = \beta W(l)/(md)$ , 我们有

$$\begin{aligned} C &= d\beta S_1 I_1 m e^{-mI_1} + (d + \gamma + \varepsilon)\beta I_1 e^{-mI_1} + d(d + \gamma + \varepsilon) - d\beta S_1 e^{-mI_1} = \\ &= e^{-mI_1}\beta(d + \gamma + \varepsilon) \left( \frac{dS_1 I_1 m}{d + \gamma + \varepsilon} + I_1 + e^{mI_1} \frac{d}{\beta} - \frac{dS_1}{d + \gamma + \varepsilon} \right) = \\ &= e^{-mI_1}\beta(d + \gamma + \varepsilon) \left[ \frac{dS_1 I_1 m}{d + \gamma + \varepsilon} + I_1 + \frac{W(l)}{m} - \frac{W(l)}{m} \right] = \\ &= e^{-mI_1}\beta(d + \gamma + \varepsilon) \left( \frac{dS_1 I_1 m}{d + \gamma + \varepsilon} + I_1 \right) > 0. \end{aligned}$$

## 附录 2

现在证明平衡点  $E'_0$  和  $E_2$  的局部渐近稳定性.

平衡点  $E'_0$  处的特征方程为

$$(\lambda + d) \left( \lambda - e^{-mI'_c} \frac{\beta\Lambda}{d} + d + \gamma + \varepsilon \right) = 0.$$

则其对应的特征值分别为

$$\lambda_1 = -d, \quad \lambda_2 = e^{-mI'_c} \frac{\beta\Lambda}{d} - (d + \gamma + \varepsilon).$$

因此,平衡点  $E_0'$  在  $\lambda_2 < 0$  时是局部渐近稳定的.此条件等价于

$$R_c = \frac{\beta A e^{-m_1 c}}{d(d + \gamma + \varepsilon)} < 1.$$

对平衡点  $E_2$ , 其对应的特征方程是

$$(\lambda + d + e^{-m_1 c} \beta I_2)(\lambda - e^{-m_1 c} \beta S_2 + d + \gamma + \varepsilon) + e^{-2m_1 c} \beta^2 I_2 S_2 = 0.$$

令  $f(\lambda)$  为上述等式的左边部分,即

$$f(\lambda) = (\lambda + d + e^{-m_1 c} \beta I_2)(\lambda - e^{-m_1 c} \beta S_2 + d + \gamma + \varepsilon) + e^{-2m_1 c} \beta^2 I_2 S_2.$$

$f(\lambda) = 0$  的对称轴为

$$\lambda = -\frac{\beta A e^{-m_1 c}}{2(d + \gamma + \varepsilon)} < 0.$$

另外当  $R_c > 1$  时,我们有

$$f(0) = \beta A e^{-m_1 c} - d(d + \gamma + \varepsilon) > 0.$$

这表明  $f(\lambda) = 0$  或者有两个负实根或者有两个实部为负的复数根.因此,当  $R_c > 1$  时  $E_2$  是局部渐近稳定的.

## 参考文献(References):

- [1] Czene K, Reilly M, Hall P, Hartman M. A constant risk for familial breast cancer? a population-based family study[J]. *Breast Cancer Res*, 2009, **11**(3): R30.
- [2] Meyer-Rienecker H, Buddenhagen F. Incidence of multiple sclerosis: a periodic or stable phenomenon[J]. *J Neurol*, 1988, **235**(4): 241-244.
- [3] Neaigus A, Jenness S M, Hagan H, Murrill C S, Torian L V, Wendel T, Gelpi-Acosta C. Estimating HIV incidence and the correlates of recent infection in venue-sampled men who have sex with men in New York city[J]. *AIDS Behav*, 2012, **16**(3): 516-524.
- [4] Liu R, Wu J, Zhu H. Media/psychological impact on multiple outbreaks of emerging infectious diseases[J]. *Comput Math Methods Med*, 2007, **8**(3): 153-164.
- [5] Xiao D, Ruan S. Global analysis of an epidemic model with nonmonotone incidence rate[J]. *Math Biosci*, 2007, **208**(2): 419-429.
- [6] Li B, Yuan S, Zhang W. Analysis on an epidemic model with a ratio-dependent nonlinear incidence rate[J]. *Int J Biomath*, 2011, **4**(2): 227-239.
- [7] Sun C, Yang W, Arino J, Khan K. Effect of media-induced social distancing on disease transmission in a two patch setting[J]. *Math Biosci*, 2011, **230**(2): 87-95.
- [8] Cui J, Sun Y, Zhu H. The impact of media on the control of infectious diseases[J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2008, **20**(1): 31-53.
- [9] Tchuente J M, Bauch C T. Dynamics of an infectious disease where media coverage influences transmission[J]. *ISRN Biomathematics*, 2012, **2012**: Article ID 581274, 10 Pages. doi: 10.5402/2012/581274.
- [10] Zou W, Xie J. An SI epidemic model with nonlinear infection rate and stage structure[J]. *Int J Biomath*, 2009, **2**(1): 19-27.
- [11] Wang W. Backward bifurcation of an epidemic model with treatment[J]. *Math Biosci*, 2006, **201**(1/2): 58-71.
- [12] di Bernardo M, Budd C, Champneys A R, Kowalczyk P, Nordmark A B, Olivar G, Piroinen P T. Bifurcations in non-smooth dynamical systems[J]. *SIAM Review*, 2008, **50**(4): 629-701.



- [13] Filippov A F. *Differential Equations With Discontinuous Right-Hand Sides*[M]. The Netherlands: Kluwer Academic, 1988.
- [14] Tang S, Xiao Y. One-compartment model with Michaelis-Menten elimination kinetics and therapeutic window: an analytical approach[J]. *J Pharmacokinet Pharmacodyn*, 2007, **34**(6): 807-827.
- [15] Corless R M, Gonnet G H, Hare D E G, Jeffrey D J, Knuth D E. On the Lambert W function [J]. *Adv Comput Math*, 1996, **5**(1): 329-359.

## An Epidemic Model With Saturated Media/Psychological Impact

LIU Yu-ying, XIAO Yan-ni

(Department of Applied Mathematics, Xi'an Jiaotong University,  
Xi'an 710049, P. R. China)

**Abstract:** Media has important influence on incidence rate of infectious disease. An epidemic model with segmented incidence rate was formulated and analyzed to describe the saturated media/psychology impact. Firstly all possible regular/virtual equilibria of the system was found out, and the local stability of the equilibria was analyzed in terms of the basic reproduction number. The global asymptotic stability of the positive equilibriums could then be obtained by excluding the existence of limit cycle for the system. The effect of saturated media/psychology impact on dynamics was discussed.

**Key words:** media coverage; epidemic model; piecewise smooth; global stability