应用数学和力学,第 34 卷 第 4 期
2013 年 4 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 34, No. 4, Apr. 15, 2013

文章编号:1000-0887(2013)04-0383-16

不连续激活函数的时滞神经网络的多稳定性*

陈晓丰, 宋乾坤

(重庆交通大学 理学院,重庆 400074)

(我刊编委宋乾坤来稿)

摘要: 研究了不连续激活函数的时滞神经网络的多稳定性问题,在所研究的神经网络中,激活函数并不需要是连续的和单调的. 给出了判断该神经网络多个平衡点存在及局部指数稳定的充分条件. 最后,给出了两个数值仿真例子来验证本文获得结果的有效性和较小的保守性.

关 键 词: 神经网络; 不连续激活函数; 多重稳定; 指数稳定

中图分类号: O175.13 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.04.007

引 言

近年来,由于时滞神经网络在诸如信号处理、模式识别、联想记忆、优化控制等领域的重要应用(参见文献[1]),该神经网络受到了很多学者的关注. 神经网络在诸多方面的应用都与网络的动力学行为特征有着密切的关系,因此,对神经网络动力学行为的理论研究,是神经网络发挥其实际应用价值必不可少的首要环节.

目前,学者们对时滞神经网络平衡点和周期解渐近行为的研究已经比较深入和广泛,也获得了大量丰富的理论成果(见文章[2-4]及其所引用的参考文献). 但是这些文献大都只关注于神经网络的平衡点和周期解的单稳定性问题. 事实上,一个神经网络可能有多个吸引子[5-6]. 近期,越来越多的学者开始关注神经网络的多稳定性和多周期性问题[7-15]. 在文献[9]中,通过一种基于系统几何结构的方法,作者研究了 n 维时滞神经网络,得到了 2^n 个稳定平衡点和 $3^n - 2^n$ 个不稳定平衡点同时存在的充分条件. 在文献[10]中,作者得到了研究了 n 维时滞竞争神经网络,通过几何方法和不等式技巧,得到了 3^n 个平衡点存在以及 2^n 个平衡点指数稳定的充分条件. 在文献[11]中,作者证明了 n 维 Cohen-Grossberg 神经网络存在 2^n 个指数稳定的平衡点. 在文献[12]中,通过构造 Liapunov 函数以及矩阵不等式技巧,作者获得了递归神经网络的时滞相关的多稳定性的判据. 在文献[15]中,作者考虑了自激励与高阶突触连接网络的多稳定性问题.

值得注意的是,以上提到的工作都是在激活函数是连续的前提假设下进行的. 事实上,正如文献[16]所指出的那样,不连续激活函数的神经网络是很重要的并且在实践中也会经常出

* 收稿日期: 2013-03-18
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61273021)
作者简介: 陈晓丰(1980—),男,江苏江阴人,讲师,硕士(E-mail:xxffch@126.com);
宋乾坤(1963—),男,教授,博士(通讯作者. E-mail:qiankunsong@163.com).

现.近些年来,不连续激活函数的神经网络的动力学特性得到了广泛深入地研究(参见文献[17-29]).作为不连续激活函数的特殊情况,多层激活函数的神经网络的多稳定性问题得到了研究(参见文献[30]).Mexican-hat-type 激活函数的神经网络多稳定性判据被提出(参见文献[31]).据我们所知,作为一类比较广泛的不连续的激活函数,逐段连续激活函数的神经网络的多稳定性问题还很少被考虑.

本文将讨论一类比较广泛的不连续的激活函数的神经网络的多稳定性问题,并给出一些用于判断多个平衡点共存以及指数稳定的判据.最后,给出两个数值仿真例子来说明所给判据的有效性和较小的保守性.

记号 在本文中,R^n 表示 n 维 Euclid 空间.$|S|$ 表示有限集 S 中元素的个数.对于集合 $S\subseteq R^2$,定义 $P(S):=\{x_1\in\mathbf{R}\,|\,(x_1,x_2)\in S\}$.对于定义在 $\mathbf{R}$ 上的单值函数 $f(u)$,用记号 $f(\xi+)$ 和 $f(\xi-)$ 分别表示 $f(u)$ 在 $u=\xi$ 处的右极限和左极限.对于向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$,范数 $\|\boldsymbol{x}\|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$.$C([t_0-\tau,t_0],R^n)$ 表示所有从 $[t_0-\tau,t_0]$ 映射到 R^n 的连续函数的构成的空间,其范数 $\|\boldsymbol{\phi}\|_{t_0}=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\max_{t_0-\tau\leqslant s\leqslant t_0}|\phi_i(s)|\}$,其中 $\boldsymbol{\phi}=(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n)\in C([t_0-\tau,t_0],R^n)$.

1 模 型 介 绍

在本文中,我们考虑以下不连续激活函数的时滞神经网络:

$$\dot{x}_i(t)=-\mu_i x_i(t)+\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}g_j(x_j(t))+\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}g_j(x_j(t-\tau_{ij}))+J_i, \tag{1}$$

其中,$i\in\mathbf{N}:=\{1,2,\cdots,n\}$,$x_i(t)$ 表示第 i 个神经元的状态,α_{ij} 和 β_{ij} 表示第 j 个神经元与第 i 个神经元之间的连接权,$g_j(\cdot)$ 表示第 j 个神经元的激活函数,τ_{ij} 表示时滞,满足 $0\leqslant\tau_{ij}\leqslant\tau$,其中 τ 是一个常数.

我们考虑以下一类激活函数:

$$g_i(u)=\begin{cases}f_1^i(u), & u<\xi_1^i,\\ f_k^i(u), & \xi_{k-1}^i\leqslant u<\xi_k^i,\\ f_{m_i}^i(u), & u\geqslant\xi_{m_i-1}^i,\end{cases} \tag{2}$$

其中,m_i 是一个正整数,且对于任意的 $i\in\mathbf{N}$,都有 $-\infty<\xi_1^i<\xi_2^i<\cdots<\xi_{m_i-1}^i<+\infty$,对于任意的 $k\in M_i:=\{1,2,\cdots,m_i\}$,都有 $f_k^i(u)$ 是连续函数.若令 $\xi_0^i:=-\infty$,$\xi_{m_i}^i:=+\infty$,$I_1^i:=(\xi_0^i,\xi_1^i)$,$I_k^i:=[\xi_{k-1}^i,\xi_k^i)$,$k=2,3,\cdots,m_i$,则式(2)可被改写为

$$g_i(u)=f_k^i(u),\qquad u\in I_k^i,\ k\in M_i,$$

其中 $f_k^i(u)\in C(I_k^i,\mathbf{R})$.

备注 1 由式(2)所定义的激活函数 g_i 是逐段连续的.若 g_i 在每个分段点 ξ_k^i 处的左右极限相等,即

$$g_i(\xi_i^k-)=g_i(\xi_i^k+),$$

则 g_i 在 $\mathbf{R}$ 上连续.否则,g_i 不连续.因此,在文献[7-15,30-31]中所研究的激活函数都可以看作是本文所研究激活函数的特殊情况.

对于每个 $i\in\mathbf{N}$,我们定义

$$S_i^b=(-1)^b\left[\sum_{j\neq i}|\alpha_{ij}|g_j^{\#}+\sum_{j=1}^{n}|\beta_{ij}|g_j^{\#}\right]+J_i,\qquad b=1,2, \tag{3}$$

其中 $g_i^{\#}=\sup\limits_{u\in\mathbf{R}}|g_i(u)|$. 令 $N\times M:=\bigcup\limits_{i\in N}\{\{i\}\times M_i\}$. 对于任意的 $(i,k)\in N\times M$, 定义下面的函数:

$$\breve{F}_k^i(u)=-\mu_i u+\alpha_{ij}f_i^i(u)+S_i^1,\qquad \forall u\in I_k^i,$$
$$\widehat{F}_k^i(u)=-\mu_i u+\alpha_{ij}f_i^i(u)+S_i^2,\qquad \forall u\in I_k^i.$$

现在,我们给出关于 $f_k^i(u)$ 在 ξ_{k-1}^i 和 ξ_k^i 处左、右极限的 4 种条件:

$(\mathrm{H}_{f_k^i}^{\mathrm{A}})$ $\alpha_{ii}f_k^i(\xi_{k-1}^i+)>\mu_i\xi_{k-1}^i-S_i^1$ 且 $\alpha_{ii}f_k^i(\xi_k^i-)<\mu_i\xi_k^i-S_i^2$,

$(\mathrm{H}_{f_k^i}^{\mathrm{B}})$ $\alpha_{ii}f_k^i(\xi_{k-1}^i+)<\mu_i\xi_{k-1}^i-S_i^2$ 且 $\alpha_{ii}f_k^i(\xi_k^i-)>\mu_i\xi_k^i-S_i^1$,

$(\mathrm{H}_{f_k^i}^{\mathrm{C}})$ $\alpha_{ii}f_k^i(\xi_{k-1}^i+)>\mu_i\xi_{k-1}^i-S_i^1$ 且 $\alpha_{ii}f_k^i(\xi_k^i-)>\mu_i\xi_k^i-S_i^1$,

$(\mathrm{H}_{f_k^i}^{\mathrm{D}})$ $\alpha_{ii}f_k^i(\xi_{k-1}^i+)<\mu_i\xi_{k-1}^i-S_i^2$ 且 $\alpha_{ii}f_k^i(\xi_k^i-)<\mu_i\xi_k^i-S_i^2$.

令

$$N_1=\{(i,k)\in N\times M\mid \text{条件}(\mathrm{H}_{f_k^i}^{\mathrm{A}})\text{成立}\},$$
$$N_2=\{(i,k)\in N\times M\mid \text{条件}(\mathrm{H}_{f_k^i}^{\mathrm{B}})\text{成立}\},$$
$$N_3=\{(i,k)\in N\times M\mid \text{条件}(\mathrm{H}_{f_k^i}^{\mathrm{C}})\text{或}(\mathrm{H}_{f_k^i}^{\mathrm{D}})\text{成立}\}.$$

定义 1 称 $\bar{N}:=(\tilde{N}_1,\tilde{N}_2,\tilde{N}_3)$ 是 $N\times M$ 的一个划分,如果

(i) $\tilde{N}_p\subseteq N_p$, $p\in\{1,2,3\}$;

(ii) $|\tilde{N}_1|+|\tilde{N}_2|+|\tilde{N}_3|=n$;

(iii) $P(\tilde{N}_1)\cup P(\tilde{N}_2)\cup P(\tilde{N}_3)=N$.

对于 $N\times M$ 的每个划分 $\bar{N}=(\tilde{N}_1,\tilde{N}_2,\tilde{N}_3)$, 我们令

$$\breve{N}=\tilde{N}_1\cup\tilde{N}_2\cup\tilde{N}_3,$$
$$\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{N}}=\{\boldsymbol{x}\in R^n\mid x_i\in I_k^i,\ (i,k)\in\tilde{N}_p,\ p=1,2,3\},$$

并且称 $\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{N}}$ 是相应于 $\bar{N}$ 的 R^n 的一个划分.

在本文中,我们做以下假设:

(H1) 对于任意 $(i,k)\in N\times M$,都存在常数 $\widehat{l}_k^i$, $\breve{l}_k^i$, 使得

$$\breve{l}_k^i\leqslant\frac{f_k^i(u)-f_k^i(v)}{u-v}\leqslant\widehat{l}_k^i,\qquad\forall u,v\in I_k^i;$$

(H2) 对于任意 $i\in P(\tilde{N}_1)$, 都有

$$\delta_i:=\mu_i-\sum_{\substack{j\neq i\\(j,k)\in\breve{N}}}\bar{l}_k^j|\alpha_{ij}|-\sum_{(j,k)\in\breve{N}}\bar{l}_k^j|\beta_{ij}|>0,$$

其中 $\bar{l}_k^j=\max\{|\breve{l}_k^j|,|\widehat{l}_k^j|\}$.

(H3) 对于任意 $(i,k)\in\breve{N}$,都有 $\mu_i\geqslant 0,\alpha_{ii}\neq 0$ 并且 $\widehat{l}_k^i$, $\breve{l}_k^i$ 满足下列条件之一:

(i) $\breve{l}_k^i\leqslant\widehat{l}_k^i<\dfrac{\delta_i}{\alpha_{ii}}\leqslant\dfrac{\mu_i}{\alpha_{ii}}$ 或 $\dfrac{\mu_i}{\alpha_{ii}}\leqslant\dfrac{\delta_i}{\alpha_{ii}}<\breve{l}_k^i\leqslant\widehat{l}_k^i$, $\qquad\forall(i,k)\in\tilde{N}_1$;

(ii) $\breve{l}_k^i\leqslant\widehat{l}_k^i<\dfrac{2\mu_i}{\alpha_{ii}}\leqslant\dfrac{\mu_i}{\alpha_{ii}}$ 或 $\dfrac{\mu_i}{\alpha_{ii}}\leqslant\dfrac{2\mu_i}{\alpha_{ii}}<\breve{l}_k^i\leqslant\widehat{l}_k^i$, $\qquad\forall(i,k)\in\tilde{N}_2$;

(iii) $\breve{l}_k^i\leqslant\widehat{l}_k^i\leqslant\dfrac{\mu_i}{\alpha_{ii}}$ 或 $\dfrac{\mu_i}{\alpha_{ii}}\leqslant\breve{l}_k^i\leqslant\widehat{l}_k^i$, $\qquad\forall(i,k)\in\tilde{N}_3$.

备注 2 注意到由条件(H2)和(H3)可知, $\mu_i \geqslant \delta > 0$ 以及 $2\mu_i \geqslant \mu_i \geqslant 0$. 因此,由 $\breve{l}^i_k \leqslant \hat{l}^i_k < \delta_i/\alpha_{ii} \leqslant \mu_i/\alpha_{ii}$ 可推知 $\alpha_{ii} > 0$;由 $\mu_i/\alpha_{ii} \leqslant \delta_i/\alpha_{ii} < \breve{l}^i_k \leqslant \hat{l}^i_k$ 可推知 $\alpha_{ii} < 0$;由 $\breve{l}^i_k \leqslant \hat{l}^i_k < 2\mu_i/\alpha_{ii} \leqslant \mu_i/\alpha_{ii}$ 可推知 $\alpha_{ii} < 0$;由 $\mu_i/\alpha_{ii} \leqslant 2\mu_i/\alpha_{ii} < \breve{l}^i_k \leqslant \hat{l}^i_k$ 可推知 $\alpha_{ii} > 0$.

2 主要结论

在本节中,我们考察系统(1)多个平衡点的存在性和指数稳定性.

定理 1 设 $\bar{N} = (\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \tilde{N}_3)$ 是 $N \times M$ 的一个划分. 如果条件(H1)、(H2)和(H3)成立,那么

(a) 若 $\tilde{N}_3 \neq \varnothing$,则系统(1) 在 $\Sigma_{\bar{N}}$ 中没有平衡点;

(b) 若 $\tilde{N}_3 = \varnothing$,则系统(1) 在 $\Sigma_{\bar{N}}$ 中有唯一的平衡点.

证明 令 $G^i_k(u) = -\mu_i u + \alpha_{ii} f^i_k(u),\ u \in I^i_k$. 对于给定的 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \Sigma_{\bar{N}}$, 定义

$$Q^i_k(u) = -\mu_i u + \alpha_{ii} f^i_k(u) + \sum_{j \neq i} a_{ij} g_j(y_j) + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} g_j(y_j) + J_i, \qquad u \in I^i_k.$$

注意到 $\breve{F}^i_k(u) \leqslant Q^i_k(u) \leqslant \hat{F}^i_k(u)$,且 $\breve{F}^i_k(u)$, $Q^i_k(u)$, $\hat{F}^i_k(u)$ 可以看成是 G^i_k 的垂直平移之后的结果. 由(H3)可知,

$$\frac{f^i_k(u) - f^i_k(v)}{u - v} < \frac{\mu_i}{\alpha_{ii}}, \qquad \forall u, v \in I^i_k$$

或

$$\frac{f^i_k(u) - f^i_k(v)}{u - v} > \frac{\mu_i}{\alpha_{ii}}, \qquad \forall u, v \in I^i_k.$$

因此

$$\alpha_{ii} f^i_k(u) - \mu_i u > \alpha_{ii} f^i_k(v) - \mu_i v, \qquad \forall u, v \in I^i_k$$

或

$$\alpha_{ii} f^i_k(u) - \mu_i u < \alpha_{ii} f^i_k(v) - \mu_i v, \qquad \forall u, v \in I^i_k,$$

这就说明 G^i_k 是严格单调的,同时 $\breve{F}^i_k(u)$, $Q^i_k(u)$, $\hat{F}^i_k(u)$ 也是严格单调的. 现在我们在以下两种情况下考虑方程 $Q^i_k(\cdot) = 0$ 的根.

情况 1 $(i, k) \in \tilde{N}_1 \cup \tilde{N}_2$. 此时,方程 $Q^i_k(\cdot) = 0$ 在 I^i_k 内有唯一的根 u^*. 事实上,由条件 $(\mathrm{H}^{\mathrm{A}}_{f^i_k})$ 可知 $Q^i_k(\xi^i_{k-1}+) \geqslant \breve{F}^i_k(\xi^i_{k-1}+) > 0$ 且 $Q^i_k(\xi^i_{k-1}-) \leqslant \breve{F}^i_k(\xi^i_{k-1}-) < 0$. 同理,由条件 $(\mathrm{H}^{\mathrm{B}}_{f^i_k})$ 可知 $Q^i_k(\xi^i_{k-1}+) < 0$ 且 $Q^i_k(\xi^i_{k-1}-) > 0$. 于是根据 $Q^i_k(\cdot)$ 在 I^i_k 上的连续性和单调性可得 $Q^i_k(\cdot)$ 在 I^i_k 上有唯一的零点 u^*,且 $u^* \in \mathrm{int}(I^i_k)$.

情况 2 $(i, k) \in \tilde{N}_3$. 此时方程 $Q^i_k(\cdot) = 0$ 在 I^i_k 上没有根. 由条件 $\mathrm{H}^{\mathrm{C}}_{f^i_k}$ 或 $\mathrm{H}^{\mathrm{D}}_{f^i_k}$ 可知

$$Q^i_k(\xi^i_{k-1}+) Q^i_k(\xi^i_{k-1}-) > 0,$$

又因为 $Q^i_k(\cdot)$ 是单调的,故 $Q^i_k(\cdot)$ 没有零点.

下面分别证明定理 1 的结论(a)和结论(b).

(a) 由于 $\tilde{N}_3 \neq \varnothing$, 故取$(i, k) \in \tilde{N}_3$. 假设系统(1) 在 $\Sigma_{\bar{N}}$ 中有平衡点 $\boldsymbol{u}^* = (u^*_1, u^*_2, \cdots, u^*_n)$. 那么 $u^*_i \in I^i_k$ 且

$$-\mu_i u^*_i + \alpha_{ii} f^i_k(u^*_i) + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} g_j(u^*_j) + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} g_j(u^*_j) + J_i = 0.$$

这就说明若给定 $\boldsymbol{y}=(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_n^*)$，则方程 $Q_k^i(\cdot)=0$ 在 I_k^i 中有根 u_i^*，这与情况 2 的讨论相矛盾. 故系统(1) 在 $\Sigma_{\tilde{N}}$ 中没有平衡点.

(b) 由于 $\tilde{N}_3=\varnothing$，所以 $\breve{N}=\tilde{N}_1\cup\tilde{N}_2$. 根据情况 1 的讨论我们可定义 $\Sigma_{\tilde{N}}$ 上的自映射 $G_{\tilde{N}}(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{v}^*$，其中 $\boldsymbol{v}^*=(v_1^*,v_2^*,\cdots,v_n^*)$，且 $\boldsymbol{v}^*$ 是给定 $\boldsymbol{y}$ 后方程 $Q_k^i(\cdot)=0$ 的根. 显然 $G_{\tilde{N}}$ 是连续的，下证 $G_{\tilde{N}}$ 是压缩映射. 现设 $G_{\tilde{N}}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{u}^*$，$G_{\tilde{N}}(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{v}^*$，即，对于任意 $(i,k)\in\breve{N}$，有

$$-\mu_i u_i^*+\alpha_{ii}f_k^i(u_i^*)+\sum_{\substack{j\neq i\\(j,k)\in\breve{N}}}\alpha_{ij}f_k^i(x_j)+\sum_{(j,k)\in\breve{N}}\beta_{ij}f_k^i(x_j)+J_i=0,$$

$$-\mu_i v_i^*+\alpha_{ii}f_k^i(v_i^*)+\sum_{\substack{j\neq i\\(j,k)\in\breve{N}}}\alpha_{ij}f_k^i(y_j)+\sum_{(j,k)\in\breve{N}}\beta_{ij}f_k^i(y_j)+J_i=0.$$

于是

$$-\mu_i(u_i^*-v_i^*)+\alpha_{ii}[f_k^i(u_i^*)-f_k^i(v_i^*)]+\sum_{\substack{j\neq i\\(j,k)\in\breve{N}}}\alpha_{ij}[f_k^i(x_j)-f_k^i(y_j)]+\sum_{(j,k)\in\breve{N}}\beta_{ij}[f_k^i(x_j)-f_k^i(y_j)]=0.$$

从而有

$$\begin{aligned}|u_i^*-v_i^*|=&\left|\sum_{\substack{j\neq i\\(j,k)\in\breve{N}}}\alpha_{ij}[f_k^i(x_j)-f_k^i(y_j)]+\sum_{(j,k)\in\breve{N}}\beta_{ij}[f_k^i(x_j)-f_k^i(y_j)]\right|\times\\&\left|\alpha_{ii}\frac{f_k^i(u_i^*)-f_k^i(v_i^*)}{u_i^*-v_i^*}-\mu_i\right|^{-1}\leqslant\\&\left\{\left[\sum_{\substack{j\neq i\\(j,k)\in\breve{N}}}\left|\alpha_{ij}\frac{f_k^i(x_j)-f_k^i(y_j)}{x_j-y_j}\right|+\sum_{(j,k)\in\breve{N}}\left|\beta_{ij}\frac{f_k^i(x_j)-f_k^i(y_j)}{x_j-y_j}\right|\right]\times\right.\\&\left.\left|\alpha_{ii}\frac{f_k^i(u_i^*)-f_k^i(v_i^*)}{u_i^*-v_i^*}-\mu_i\right|^{-1}\right\}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\leqslant\\&\left\{\left[\sum_{\substack{j\neq i\\(j,k)\in\breve{N}}}\bar{l}_k^j|\alpha_{ij}|+\sum_{(j,k)\in\breve{N}}\bar{l}_k^j|\beta_{ij}|\right]\times\right.\\&\left.\left|\alpha_{ii}\frac{f_k^i(u_i^*)-f_k^i(v_i^*)}{u_i^*-v_i^*}-\mu_i\right|^{-1}\right\}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=\\&\gamma_i\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|,\end{aligned}$$

其中

$$\gamma_i=\left[\sum_{\substack{j\neq i\\(j,k)\in\breve{N}}}\bar{l}_k^j|\alpha_{ij}|+\sum_{(j,k)\in\breve{N}}\bar{l}_k^j|\beta_{ij}|\right]\times\left|\alpha_{ii}\frac{f_k^i(u_i^*)-f_k^i(v_i^*)}{u_i^*-v_i^*}-\mu_i\right|^{-1}.$$

下证 $\gamma_i<1$.

由条件(H3)以及备注 2 的讨论可知存在下面两种情况：

(i) 当 $\alpha_{ii}>0$ 时，

$$\breve{l}_k^i\leqslant\hat{l}_k^i<\frac{\delta_i}{\alpha_{ii}}\ \text{或}\ \frac{2\mu_i}{\alpha_{ii}}<\breve{l}_k^i\leqslant\hat{l}_k^i,$$

(ii) 当 $\alpha_{ii}<0$ 时，

$$\breve{l}_k^i \leqslant \hat{l}_k^i < \frac{2\mu_i}{\alpha_{ii}} \text{ 或 } \frac{\delta_i}{\alpha_{ii}} < \breve{l}_k^i \leqslant \hat{l}_k^i.$$

对于情况(i),若 $\breve{l}_k^i \leqslant \hat{l}_k^i < \delta_i/\alpha_{ii}$, 则有

$$\alpha_{ii}\frac{f_k^i(u_i^*)-f_k^i(v_i^*)}{u_i^*-v_i^*} \leqslant \alpha_{ii}\breve{l}_k^i \leqslant \delta_i = \mu_i - \sum_{\substack{j\neq i\\(j,k)\in\breve{N}}}\bar{l}_k^j|\alpha_{ij}| - \sum_{(j,k)\in\breve{N}}\bar{l}_k^j|\beta_{ij}|,$$

$$\alpha_{ii}\frac{f_k^i(u_i^*)-f_k^i(v_i^*)}{u_i^*-v_i^*} - \mu_i < - \sum_{\substack{j\neq i\\(j,k)\in\breve{N}}}\bar{l}_k^j|\alpha_{ij}| - \sum_{(j,k)\in\breve{N}}\bar{l}_k^j|\beta_{ij}|,$$

因此

$$\left|\alpha_{ii}\frac{f_k^i(u_i^*)-f_k^i(v_i^*)}{u_i^*-v_i^*} - \mu_i\right| > \sum_{\substack{j\neq i\\(j,k)\in\breve{N}}}\bar{l}_k^j|\alpha_{ij}| + \sum_{(j,k)\in\breve{N}}\bar{l}_k^j|\beta_{ij}|,$$

$$\gamma_i = \left[\sum_{\substack{j\neq i\\(j,k)\in\breve{N}}}\bar{l}_k^j|\alpha_{ij}| + \sum_{(j,k)\in\breve{N}}\bar{l}_k^j|\beta_{ij}|\right] \times \left|\alpha_{ii}\frac{f_k^i(u_i^*)-f_k^i(v_i^*)}{u_i^*-v_i^*} - \mu_i\right|^{-1} < 1.$$

若 $2\mu_i/\alpha_{ii} < \breve{l}_k^i \leqslant \hat{l}_k^i$, 则有

$$\alpha_{ii}\frac{f_k^i(u_i^*)-f_k^i(v_i^*)}{u_i^*-v_i^*} \geqslant \alpha_{ii}\breve{l}_k^i \geqslant 2\mu_i > \mu_i + \sum_{\substack{j\neq i\\(j,k)\in\breve{N}}}\bar{l}_k^j|\alpha_{ij}| + \sum_{(j,k)\in\breve{N}}\bar{l}_k^j|\beta_{ij}|,$$

$$\alpha_{ii}\frac{f_k^i(u_i^*)-f_k^i(v_i^*)}{u_i^*-v_i^*} - \mu_i > \sum_{\substack{j\neq i\\(j,k)\in\breve{N}}}\bar{l}_k^j|\alpha_{ij}| + \sum_{(j,k)\in\breve{N}}\bar{l}_k^j|\beta_{ij}|.$$

因此

$$\left|\alpha_{ii}\frac{f_k^i(u_i^*)-f_k^i(v_i^*)}{u_i^*-v_i^*} - \mu_i\right| > \sum_{\substack{j\neq i\\(j,k)\in\breve{N}}}\bar{l}_k^j|\alpha_{ij}| + \sum_{(j,k)\in\breve{N}}\bar{l}_k^j|\beta_{ij}|,$$

$$\gamma_i = \left[\sum_{\substack{j\neq i\\(j,k)\in\breve{N}}}\bar{l}_k^j|\alpha_{ij}| + \sum_{(j,k)\in\breve{N}}\bar{l}_k^j|\beta_{ij}|\right] \times \left|\alpha_{ii}\frac{f_k^i(u_i^*)-f_k^i(v_i^*)}{u_i^*-v_i^*} - \mu_i\right|^{-1} < 1.$$

对于情况(ii),类似于情况(i)的方法,可以证明 $\gamma_i < 1$.

因此, $G_{\bar{N}}$ 是压缩映射且 $G_{\bar{N}}$ 在 $\Sigma_{\bar{N}}$ 中有唯一的一个不动点,该不动点也就是系统(1)唯一的平衡点. 至此定理证毕. □

备注3　如果 $\tilde{N}_2 = \tilde{N}_3 = \varnothing$,且 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 是系统(1) 在 $\Sigma_{\bar{N}}$ 中唯一的平衡点,那么 $\bar{\boldsymbol{u}} \in \mathrm{int}(\Sigma_{\bar{N}})$,这是因为 $\Sigma_{\bar{N}}$ 的边界点不可能满足系统(1)的平衡方程.

定理2　设 $\bar{N} = (\tilde{N}_1, \varnothing, \varnothing)$ 是 $N \times M$ 的一个划分. 如果条件(H1)、(H2)和(H3)成立,那么 $\mathrm{int}(\Sigma_{\bar{N}})$ 是系统(1)的一个不变集.

证明　注意到 $\tilde{N}_2 = \tilde{N}_3 = \varnothing$,故 $\breve{N} = \tilde{N}_1$ 且 $P(\tilde{N}_1) = N$. 设 $\boldsymbol{x}^{\phi}(t) = (x_1^{\phi}(t), x_2^{\phi}(t), \cdots, x_n^{\phi}(t))$ 是系统(1) 对应于初始条件 $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n) \in C([t_0 - \tau, t_0], \mathrm{int}(\Sigma_{\bar{N}}))$ 的解. 对于所有 $(i, k) \in \tilde{N}_1$,都存在一个充分小的整数 $\varepsilon(\varepsilon \ll (\xi_k^i - \xi_{k-1}^i)/2)$ 使得

$$\phi_i(s) \in [\xi_{k-1}^i + \varepsilon, \xi_k^i - \varepsilon], \qquad \forall s \in [t_0 - \tau, t_0].$$

设区域 $D = \prod_{i\in N}[\xi_{k-1}^i + \varepsilon, \xi_k^i - \varepsilon]$. 下面用反正法证明 $\boldsymbol{x}^{\phi}(t)$ 在 D 中. 若 $\boldsymbol{x}^{\phi}(t)$ 不在 D 中,

则下面两种情况之一必然会发生.

情况 1 一定存在某个时刻 $t_1 > t_0$ 以及某个 $(i,k) \in \breve{N}$ 使得 $x_i^{\phi}(t_1) = \xi_{k-1}^i + \varepsilon$, $\dot{x}_i^{\phi}(t_1) \leqslant 0$ 且

$$\begin{cases} \xi_{k-1}^i + \varepsilon \leqslant x_i^{\phi}(t) \leqslant \xi_k^i - \varepsilon, & \tau \leqslant t < t_1, \\ \xi_{k-1}^j + \varepsilon \leqslant x_j^{\phi}(t) \leqslant \xi_k^j - \varepsilon, & \tau \leqslant t < t_1,\ j \neq i,\ j \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

由系统(1)及条件 $(\mathrm{H}_{f_k^i}^{\mathrm{A}})$ 可得

$$\begin{aligned} \dot{x}_i^{\phi}(t_1) = & -\mu_i x_i^{\phi}(t_1) + \alpha_{ii} f_k^i(x_i^{\phi}(t_1)) + \\ & \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} g_j(x_j^{\phi}(t_1)) + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} g_j(x_j^{\phi}(t_1 - \tau_{ij})) + J_i \geqslant \\ & -\mu_i(\xi_{k-1}^i + \varepsilon) + \alpha_{ii} f_k^i(\xi_{k-1}^i + \varepsilon) - \sum_{j \neq i} |\alpha_{ij}| g_j^{\#} - \sum_{j=1}^{n} |\beta_{ij}| g_j^{\#} + J_i = \\ & \breve{F}_k^i(\xi_{k-1}^i + \varepsilon) > 0, \end{aligned}$$

这就与 $\dot{x}_i^{\phi}(t_1) \leqslant 0$ 相矛盾.

情况 2 一定存在某个时刻 $t_1 > t_0$ 以及某个 $(i,k) \in \breve{N}$ 使得 $x_i^{\phi}(t_1) = \xi_k^i - \varepsilon$, $\dot{x}_i^{\phi}(t_1) \geqslant 0$ 且

$$\begin{cases} \xi_{k-1}^i + \varepsilon \leqslant x_i^{\phi}(t) \leqslant \xi_k^i - \varepsilon, & \tau \leqslant t < t_1, \\ \xi_{k-1}^j + \varepsilon \leqslant x_j^{\phi}(t) \leqslant \xi_k^j - \varepsilon, & \tau \leqslant t < t_1,\ j \neq i,\ j \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

由系统(1)及条件 $(\mathrm{H}_{f_k^i}^{\mathrm{A}})$ 可得

$$\begin{aligned} \dot{x}_i^{\phi}(t_1) = & -\mu_i x_i^{\phi}(t_1) + \alpha_{ii} f_k^i(x_i^{\phi}(t_1)) + \\ & \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} g_j(x_j^{\phi}(t_1)) + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} g_j(x_j^{\phi}(t_1 - \tau_{ij})) + J_i \leqslant \\ & -\mu_i(\xi_k^i - \varepsilon) + \alpha_{ii} f_k^i(\xi_k^i - \varepsilon) + \sum_{j \neq i} |\alpha_{ij}| g_j^{\#} + \sum_{j=1}^{n} |\beta_{ij}| g_j^{\#} + J_i = \\ & \widehat{F}_k^i(\xi_k^i - \varepsilon) < 0, \end{aligned}$$

这就与 $\dot{x}_i^{\phi}(t_1) \geqslant 0$ 相矛盾.

由情况 1 与情况 2 的讨论, 可得 $\boldsymbol{x}^{\phi}(t) \in D \in \operatorname{int}(\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{N}})$, 即 $\operatorname{int}(\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{N}})$ 是系统(1)的一个不变集. 至此定理证毕. □

定理 3 设 $\bar{N} = (\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \varnothing)$ 是 $N \times M$ 的一个划分. 如果条件(H1)、(H2)和(H3)成立,那么

(a) 若 $\tilde{N}_2 \neq \varnothing$,则系统(1) 在 $\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{N}}$ 中唯一的平衡点是不稳定的;

(b) 若 $\tilde{N}_2 = \varnothing$,则系统(1) 在 $\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{N}}$ 中唯一的平衡点是局部指数稳定的.

证明 给定初始条件 $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n) \in C([t_0 - \tau, t_0], \operatorname{int}(\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{N}}))$,设 $\boldsymbol{x}^{\phi}(t) = (x_1^{\phi}(t), x_2^{\phi}(t), \cdots, x_n^{\phi}(t))$ 是系统(1) 的解. 根据定理 1 可知系统(1) 在 $\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{N}}$ 中存在唯一的平衡点 $\bar{\boldsymbol{x}}(t) = (\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \cdots, \bar{x}_n(t))$. 设 $\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{x}^{\phi}(t) - \bar{\boldsymbol{x}}$.

首先证明结论(a). 定义 $\mathbb{U}(t) = \max_{i \in \mathbf{N}} \{ \max_{s \in [t_0 - \tau, t]} |z_i(s)| \}$. 对于给定的 $t \geqslant t_0$, 定义

$$\mathcal{J}(t) = \{ i \in P(\tilde{N}_2) \mid |z_i(t)| \geqslant |z_j(t)|,\ \forall j \in P(\tilde{N}_2) \},$$

$$\mathcal{I}(t) = \{ i \in \mathcal{J}(t) \mid \partial_+ |z_i(t)| \geqslant \partial_+ |z_j(t)|,\ \forall j \in \mathcal{J}(t) \},$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \min \mathcal{I}(t),$$

其中 ∂_+ 表示右导数.

现在我们证明一定存在某个时刻 $t_1 > t_0$ 以及某个 $j \in P(\tilde{N}_2)$,使得 $x_j^{\phi}(t_1) < \breve{\zeta}_j$ 或 $x_j^{\phi}(t_1) > \widehat{\zeta}_j$,其中 $\breve{\zeta}_j, \widehat{\zeta}_j \in I_k^j$ 且 $\breve{\zeta}_j \leqslant \widehat{\zeta}_j$. 否则,有

$$\breve{\zeta}_k \leqslant x_k^{\phi}(t) \leqslant \widehat{\zeta}_k, \qquad \forall k \in P(\tilde{N}_2),\ t \geqslant t_0 - \tau. \tag{4}$$

于是,下面两种情况之一必然会发生:

(C1) 对于任意 $i \in P(\tilde{N}_1)$, $t \geqslant t_0$,有 $|z_{\sigma(t)}(t)| \geqslant |z_i(t)|$;

(C2) 对于某个 $\kappa \in P(\tilde{N}_1)$ 以及某个 $t_1 \geqslant t_0$,有 $|z_\kappa(t_1)| \geqslant |z_{\sigma(t_1)}(t_1)|$.

对于情况(C1),我们首先证明

$$\mathbb{U}(t) = \max_{i \in P(\tilde{N}_2),} \{|z_i(t)|\}, \qquad \forall t \geqslant t_0, \tag{5}$$

即,集合 $\{|z_i(t)| \,|\, i \in P(\tilde{N}_2)\}$ 中至少有个元素在 t 时刻达到数值 $\mathbb{U}(t)$. 否则,必然存在某个时刻 $t > t_0$,使得 $\mathbb{U}(t) = |z_\iota(t_2)|$,其中 $\iota \in P(\tilde{N}_2)$, $t_2 \in [t_0, t)$. 令 $(\iota, p) \in \tilde{N}_2$. 由条件(H3)易知,对于任意的 $u, v \in I_p^\iota$,有 $\alpha_{\iota\iota}((f_p^\iota(u) - f_p^\iota(v))/(u - v)) > 2\mu_\iota$. 我们计算得

$$\begin{aligned}
\partial_+ |z_\iota(t_2)| \geqslant & -\mu_\iota |z_\iota(t_2)| + \alpha_{\iota\iota} \frac{f_p^\iota(x_\iota(t_2)) - f_p^\iota(\bar{x}_\iota)}{x_\iota(t_2) - \bar{x}_\iota} |z_\iota(t_2)| - \\
& \sum_{\substack{j \neq \iota \\ (j,k) \in \breve{N}}} \left| \alpha_{\iota j} \frac{f_k^j(x_j(t_2)) - f_k^j(\bar{x}_j)}{x_j(t_2) - \bar{x}_j} \right| |z_j(t_2)| - \\
& \sum_{(j,k) \in \breve{N}} \left| \beta_{\iota j} \frac{f_k^j(x_j(t_2 - \tau_{\iota j})) - f_k^j(\bar{x}_j)}{x_j(t_2 - \tau_{\iota j}) - \bar{x}_j} \right| |z_j(t_2 - \tau_{\iota j})| > \\
& \left[\mu_\iota - \sum_{\substack{j \neq \iota \\ (j,k) \in \breve{N}}} \bar{l}_k^j |\alpha_{\iota j}| + \sum_{(j,k) \in \breve{N}} \bar{l}_k^j |\beta_{\iota j}| \right] \mathbb{U}(t) = \\
& \delta_\iota \mathbb{U}(t) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

这与 $\mathbb{U}(t) = |z_\iota(t_2)|$ 矛盾. 因此式(5)成立. 对于任意 $t \geqslant t_0$, 定义 $\rho(t) = \min\{j \in P(\tilde{N}_2) \,|\, \mathbb{U}(t) = |z_j(t)|\}$, 那么计算得

$$\begin{aligned}
\partial_+ \mathbb{U}(t) = \partial_+ |z_{\rho(t)}(t) |_{\iota j}| > & \\
& \left[\mu_{\rho(t)} - \sum_{\substack{j \neq \rho(t) \\ (j,k) \in \breve{N}}} \bar{l}_k^j |\alpha_{\rho(t)j}| + \sum_{(j,k) \in \breve{N}} \bar{l}_k^j |\beta_{\rho(t)j}| \right] \mathbb{U}(t) = \\
& \min_{i \in \mathbf{N}} \{\delta_i\} \mathbb{U}(t).
\end{aligned}$$

因此 $\mathbb{U}(t)$ 是无界的. 这与式(4)矛盾.

对于情况(C2),必定存在 $s_1 \in (t_0, t_1)$,使得 $|z_{\sigma(s)}(s)| \geqslant |z_i(s)|$, $\forall i \in P(\tilde{N}_1)$, $\forall s \in (t_0, s_1)$,并且必定存在 $\kappa \in P(\tilde{N}_1)$, 使得

$$|z_\kappa(s_1)| = |z_{\sigma(s_1)}(s_1)|,\ \partial_+ |z_\kappa(s_1)| \geqslant \partial_+ |z_{\sigma(s_1)}(s_1)|. \tag{6}$$

类似于式(5)的证明,可以证明 $\mathbb{U}(s) = \max_{i \in P(\tilde{N}_2),} \{|z_i(s)|\}, \forall t \geqslant [t_0, s_1]$. 于是 $\mathbb{U}(s_1) = |z_l(s_1)| = |z_\kappa(s_1)|$,其中 $l = \sigma(s_1)$. 设 $(\kappa, p) \in \tilde{N}_1$ 且 $(l, q) \in \tilde{N}_2$. 注意到,在条件(H3)下有

$$\alpha_{\kappa\kappa} \frac{f_p^\kappa(u) - f_p^\kappa(v)}{u - v} < \delta_\kappa, \qquad \forall u, v \in I_p^\kappa,$$

且

$$\alpha_{ll}\frac{f_p^l(u)-f_p^l(v)}{u-v}>2\mu_l,\qquad \forall u,v\in I_p^l.$$

于是计算可得

$$\begin{aligned}
&\partial_+|z_\kappa(s_1)|-\partial_+|z_l(s_1)|\geqslant\\
&(\mu_l-\mu_\kappa)\mathbb{U}(s_1)+\Big[\alpha_{\kappa\kappa}\frac{f_p^\kappa(x_\iota(s_1))-f_p^\kappa(\bar{x}_\iota)}{x_\kappa(s_1)-\bar{x}_\kappa}-\\
&\alpha_{ll}\frac{f_q^l(x_\iota(s_1))-f_q^l(\bar{x}_\iota)}{x_l(s_1)-\bar{x}_l}\Big]\mathbb{U}(s_1)+\\
&\sum_{\substack{j\neq\kappa\\(j,k)\in\breve{N}}}\left|\alpha_{\kappa j}\frac{f_k^j(x_j(s_1))-f_k^j(\bar{x}_j)}{x_j(s_1)-\bar{x}_j}\right||z_j(s_1)|+\\
&\sum_{\substack{j\neq l\\(j,k)\in\breve{N}}}\left|\alpha_{lj}\frac{f_k^j(x_j(s_1))-f_k^j(\bar{x}_j)}{x_j(s_1)-\bar{x}_j}\right||z_j(s_1)|+\\
&\sum_{(j,k)\in\breve{N}}\left|\beta_{\kappa j}\frac{f_k^j(x_j(s_1-\tau_{\kappa j}))-f_k^j(\bar{x}_j)}{x_j(s_1-\tau_{\kappa j})-\bar{x}_j}\right||z_j(s_1-\tau_{\kappa j})|+\\
&\sum_{(j,k)\in\breve{N}}\left|\beta_{lj}\frac{f_k^j(x_j(s_1-\tau_{lj}))-f_k^j(\bar{x}_j)}{x_j(s_1-\tau_{lj})-\bar{x}_j}\right||z_j(s_1-\tau_{lj})|<\\
&\Big[\mu_l-\sum_{\substack{j\neq l\\(j,k)\in\breve{N}}}\bar{l}_k^j|\alpha_{lj}|+\sum_{(j,k)\in\breve{N}}\bar{l}_k^j|\beta_{lj}|\Big]\mathbb{U}(s_1)=\\
&-\delta_l\mathbb{U}(s_1)\leqslant 0.
\end{aligned}$$

这与式(6)矛盾.

由情况(C1)和(C2)的讨论,我们可知一定存在某个时刻 $t_1>t_0$ 和某个 $j\in P(\tilde{N}_2)$,使得 $x_j^\phi(t)<\breve{\zeta}_j$ 或 $x_j^\phi(t)>\hat{\zeta}_j$. 因此,$\bar{x}$ 是不稳定的.

(b) 注意到 $\bar{N}=(\tilde{N}_1,\varnothing,\varnothing)$,于是 $P(\breve{N})=P(\tilde{N}_1)=N$. 由假设条件(H3)可得,对于任意的 $(i,k)\in\breve{N}=\tilde{N}_1$,都存在一个充分小的数 $\varepsilon_i>0$, 使得

$$\alpha_{ii}\frac{f_k^i(u)-f_k^i(v)}{u-v}\leqslant\delta_i-(L+1)\varepsilon_i,\qquad\forall u,v\in I_k^i,$$

其中 $L=2\tau\sum_{(j,k)\in\breve{N}}\bar{l}_k^j|\beta_{ij}|$. 对于任意的 $i\in\mathbf{N}$, 定义

$$\mathbb{V}_i(t)=\mathrm{e}^{\varepsilon(t-t_0)}|z_i(t)|,$$

其中

$\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n,(\ln 2)/\tau\}$. 令 $\lambda>0$, $K=\max_{i\in\mathbf{N}}\{\max_{s\in[t_0-\tau,t_0]}|z_i(s)|\}>0$. 显然 $\mathbb{V}_i(t)<K\lambda$, $\forall t\in[t_0-\tau,t_0]$, $\forall i\in\mathbf{N}$. 以下,我们证明

$$\mathbb{V}_i(t)<K\lambda,\qquad\forall t>t_0,\ \forall i\in\mathbf{N}.\tag{7}$$

否则,必定存在一个 $l\in\mathbf{N}$ 以及一个 $t_1>t_0$,使得 $\mathbb{V}_i(t)\leqslant K\lambda$, $\forall t\in[t_0-\tau,t_1]$, $\forall i\in\mathbf{N}\setminus\{l\}$, 并且 $\mathbb{V}_l(t)\leqslant K\lambda$, $t\in[t_0-\tau,t_1)$ 以及

$$\mathbb{V}_l(t_1)=K\lambda,\ \partial_+\mathbb{V}_l(t_1)\geqslant 0. \tag{8}$$

设 $(l,p)\in\breve{N}$. 注意到

$$\alpha_{ll}\frac{f_p^l(x_l(t_1))-f_p^l(\bar{x}_l)}{x_l(t_1)-\bar{x}_l}\leqslant\delta_l-(L+1)\varepsilon.$$

计算可得

$$\begin{aligned}\partial_+|z_l(t_1)|\leqslant&-\mu_l|z_l(t_1)|+\alpha_{ll}\frac{f_p^l(x_l(t_1))-f_p^l(\bar{x}_l)}{x_l(t_1)-\bar{x}_l}|z_l(t_1)|+\\&\sum_{\substack{j\neq l\\(j,k)\in\breve{N}}}\left|\alpha_{lj}\frac{f_k^j(x_j(t_1))-f_k^j(\bar{x}_j)}{x_j(t_1)-\bar{x}_j}\right||z_j(t_1)|+\\&\sum_{(j,k)\in\breve{N}}\left|\beta_{lj}\frac{f_k^j(x_j(t_1-\tau_{lj}))-f_k^j(\bar{x}_j)}{x_j(t_1-\tau_{lj})-\bar{x}_j}\right||z_j(t_1-\tau_{lj})|<\\&[-\mu_l+\delta_l-(L+1)\varepsilon]|z_l(t_1)|+\\&\sum_{\substack{j\neq l\\(j,k)\in\breve{N}}}\left|\alpha_{lj}\frac{f_k^j(x_j(t_1))-f_k^j(\bar{x}_j)}{x_j(t_1)-\bar{x}_j}\right||z_j(t_1)|+\\&\sum_{(j,k)\in\breve{N}}\left|\beta_{lj}\frac{f_k^j(x_j(t_1-\tau_{lj}))-f_k^j(\bar{x}_j)}{x_j(t_1-\tau_{lj})-\bar{x}_j}\right||z_j(t_1-\tau_{lj})|,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\partial_+\mathbb{V}_l(t_1)<&(-\mu_l+\delta_l-L\varepsilon)\mathbb{V}_l(t_1)+\\&\sum_{\substack{j\neq l\\(j,k)\in\breve{N}}}\left|\alpha_{lj}\frac{f_k^j(x_j(t_1))-f_k^j(\bar{x}_j)}{x_j(t_1)-\bar{x}_j}\right|\mathbb{V}_j(t_1)+\\&\sum_{(j,k)\in\breve{N}}\left|\beta_{lj}\frac{f_k^j(x_j(t_1-\tau_{lj}))-f_k^j(\bar{x}_j)}{x_j(t_1-\tau_{lj})-\bar{x}_j}\right|\mathbb{V}_j(t_1-\tau_{lj})e^{\varepsilon\tau_{lj}}\leqslant\\&-(1+2\tau\varepsilon-e^{\varepsilon\tau})\sum_{(j,k)\in\breve{N}}\bar{l}_k^j|\beta_{lj}|K\lambda\leqslant 0.\end{aligned}$$

这与式(8)相矛盾. 因此式(7)成立. 于是, $\mathbb{V}_i(t)\leqslant K,\forall t>t_0,\forall i\in\mathbf{N}$. 从而我们可得

$$|x_i^{\phi}(t)-\bar{x}_i|\leqslant Ke^{-\varepsilon(t-t_0)}=\max_{j\in\mathbf{N}}\left\{\max_{s\in[t_0-\tau,t_0]}|x_i^{\phi}(s)-\bar{x}_i|\right\}e^{-\varepsilon(t-t_0)}. \tag{9}$$

因此, $\|\boldsymbol{x}^{\phi}(t)-\bar{\boldsymbol{x}}\|\leqslant\|\boldsymbol{\phi}-\bar{\boldsymbol{x}}\|_{t_0}e^{-\varepsilon(t-t_0)}$,这就意味着 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是指数稳定的. 此定理证毕. □

3 数值仿真

在本节中,我们给出两个数值仿真例子来说明本文所获结果的有效性.

例 1 考虑如下神经网络模型:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\\dot{x}_2(t)\end{pmatrix}=&-\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\\dot{x}_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&0.4\\-0.5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_1(x_1(t))\\g_2(x_2(t))\end{pmatrix}+\\&\begin{pmatrix}-0.3&0.2\\-0.1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g_1(x_1(t-0.2))\\g_2(x_2(t-0.1))\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.1\\0\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{10}$$

其中 $g_1(u)=g_2(u)=\tanh u$.

设分段点 $\xi_1^i = -2, \xi_2^i = -\operatorname{arcosh}\sqrt{6}$, $\xi_3^i = -1$, $\xi_4^i = 1$, $\xi_5^i = \operatorname{arcosh}\sqrt{6}, \xi_6^i = 2, i = 1, 2$. 于是 g_i 可看成如下形式的逐段定义的函数

$$g_i(u) = \begin{cases} \tanh u, & u < \xi_1^i, \\ \tanh u, & \xi_{k-1}^i \leqslant u < \xi_k^i, \ k = 2, 3, \cdots, 6, \\ \tanh u, & u \geqslant \xi_6^i, \end{cases}$$

其中 $i = 1, 2$. 通过直接计算可知:

$$g_1^\# = g_2^\# = 1, \ \breve{l}_1^i = 0, \ \widehat{l}_1^i = \breve{l}_2^i = \frac{1}{\cosh^2 2} \approx 0.0707,$$

$$\widehat{l}_2^i = \breve{l}_3^1 = \frac{1}{6} \approx 0.1667, \ \widehat{l}_3^i = \breve{l}_4^1 = \frac{1}{\cosh^2 1} \approx 0.42,$$

$$\widehat{l}_4^i = 1, \ \widehat{l}_5^i = \frac{1}{\cosh^2 1}, \ \breve{l}_5^i = \widehat{l}_6^i = \frac{1}{6}, \ \breve{l}_6^i = \widehat{l}_7^i = \frac{1}{\cosh^2 2}, \ \breve{l}_7^i = 0,$$

$$N_1 = \{(1,1), (1,7), (2,1), (2,7)\}, \ N_2 = \{(1,4), (2,4)\},$$
$$N_3 = \{(i,2), (i,3), (i,5), (i,6) \mid i = 1, 2\}.$$

因此 $N \times M$ 有 49 个划分 $\bar{N} = (\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \tilde{N}_3)$, 其中具有形如 $(\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \varnothing)$ 的划分有 9 个:

$$\bar{N}_1 = (\{(1,1), (2,1)\}, \varnothing, \varnothing), \ \bar{N}_2 = (\{(1,1), (2,7)\}, \varnothing, \varnothing),$$

$$\bar{N}_3 = (\{(1,1), (2,1)\}, \varnothing, \varnothing), \ \bar{N}_4 = (\{(1,7), (2,7)\}, \varnothing, \varnothing),$$

$$\bar{N}_5 = (\{(1,1)\}, \{(2,4)\}, \varnothing), \ \bar{N}_6 = (\{(1,7)\}, \{(2,4)\}, \varnothing),$$

$$\bar{N}_7 = (\{(2,1)\}, \{(1,4)\}, \varnothing), \ \bar{N}_8 = (\{(2,7)\}, \{(1,4)\}, \varnothing),$$

$$\bar{N}_9 = (\varnothing, \{(1,4), (2,4)\}, \varnothing).$$

由定理 1 可知, 系统(10)在每个划分区域 $D_l := \Sigma_{\bar{N}_l} (l = 1, 2, \cdots, 9)$ 都有一个平衡点, 而在其它 40 个划分区域内没有平衡点. 由定理 3 可知, 在划分区域 D_1, D_2, D_3, D_4 的平衡点是指数稳定的, 而在划分区域 D_5, D_6, D_7, D_8, D_9 的平衡点是不稳定的(如图 1 和图 2 所示).

备注 4 本文中的定理也可用于连续激活函数的时滞神经网络的多稳定性的判断. 因为只要设定恰当的分段点, 连续函数就可以看成形如式(2)的逐段定义的函数.

例 2 考虑如下神经网络模型:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.1 & -0.2 \\ 0.5 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(x_1(t)) \\ g_2(x_2(t)) \end{pmatrix} +$$
$$\begin{pmatrix} -0.2 & 0.1 \\ -0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(x_1(t-0.1)) \\ g_2(x_2(t-0.2)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.52 \\ 0.15 \end{pmatrix},$$

其中

$$g_1(u) = \begin{cases} -0.5, & u < -1, \\ -0.5u - 1, & -1 \leqslant u < 0, \\ 0.98u, & 0 \leqslant u < 1, \\ 1, & u \geqslant 1, \end{cases}$$

$$g_2(u) = \begin{cases} -1, & u < -1, \\ -u, & -1 \leqslant u < 1, \\ 1, & u \geqslant 1. \end{cases}$$

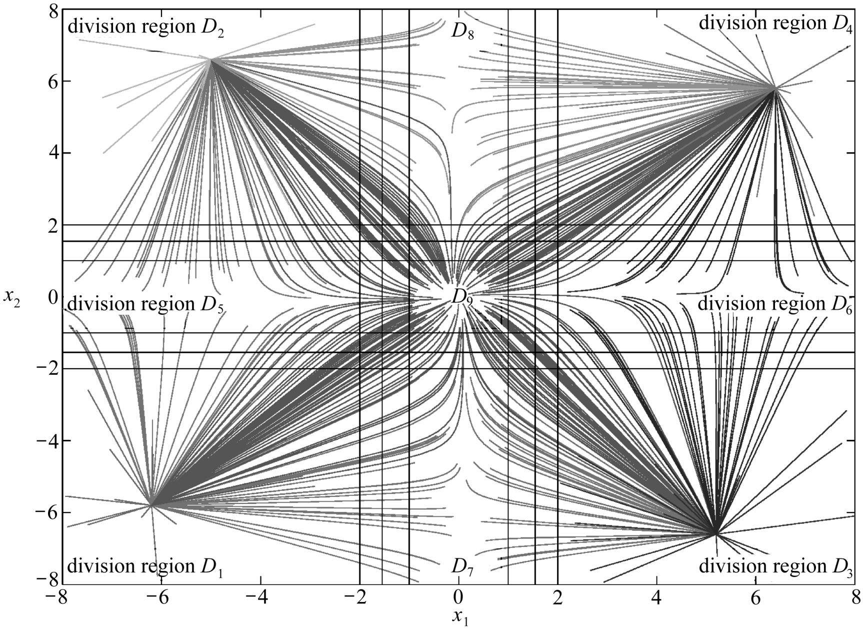

图 1　例 1 中 4 个稳定平衡点和 5 个不稳定平衡点同时存在

Fig. 1　Coexistence of 4 stable equilibria and 5 unstable equilibria in example 1

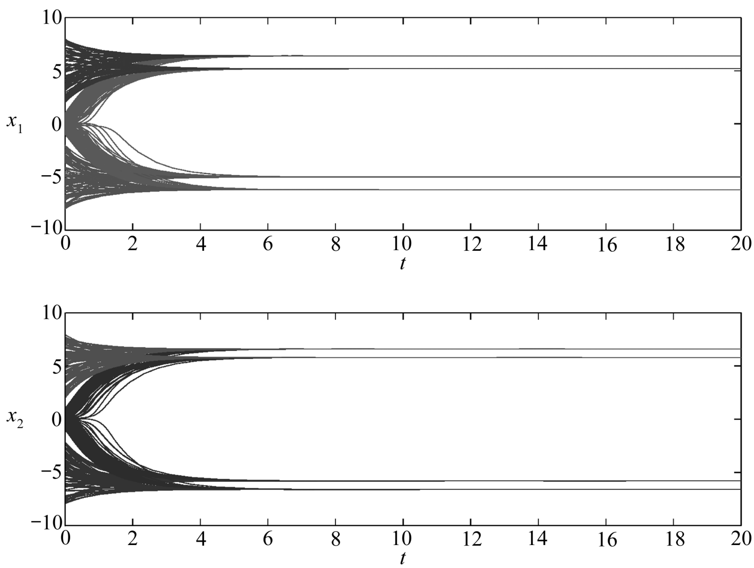

图 2　例 1 中 x_1, x_2 的瞬态特性

Fig. 2　Transient behavior of x_1, x_2 in example 1

通过直接计算可知：

$$\breve{l}_1^1 = \widehat{l}_1^1 = 0,\ \breve{l}_2^1 = \widehat{l}_2^1 = -0.5,\ \breve{l}_3^1 = \widehat{l}_3^1 = 0.98,\ \breve{l}_4^1 = \widehat{l}_4^1 = 0,$$

$$\breve{l}_1^2 = \widehat{l}_1^2 = 0,\ \breve{l}_2^2 = \widehat{l}_2^2 = -1,\ \breve{l}_3^2 = \widehat{l}_3^2 = 0,$$

$$g_1^\# = g_2^\# = 1,\ N_1 = \{(1,1),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3)\},$$

$$N_2 = \{(1,3)\},\ N_3 = \{(1,2)\}.$$

因此 $N \times M$ 有 12 个划分：

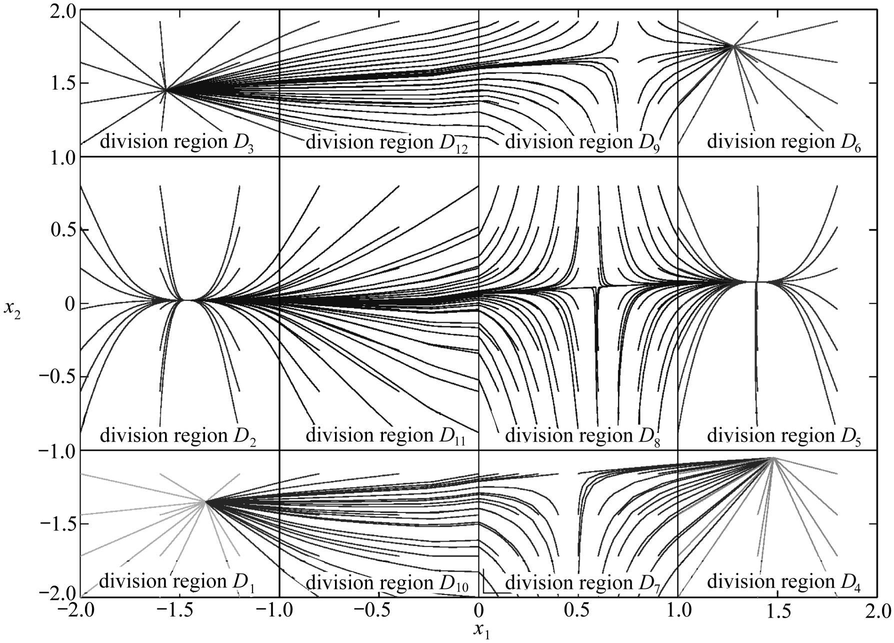

图3 例2中6个稳定平衡点和3个不稳定平衡点同时存在

Fig. 3 Coexistence of 6 stable equilibria and 3 unstable equilibria in example 2

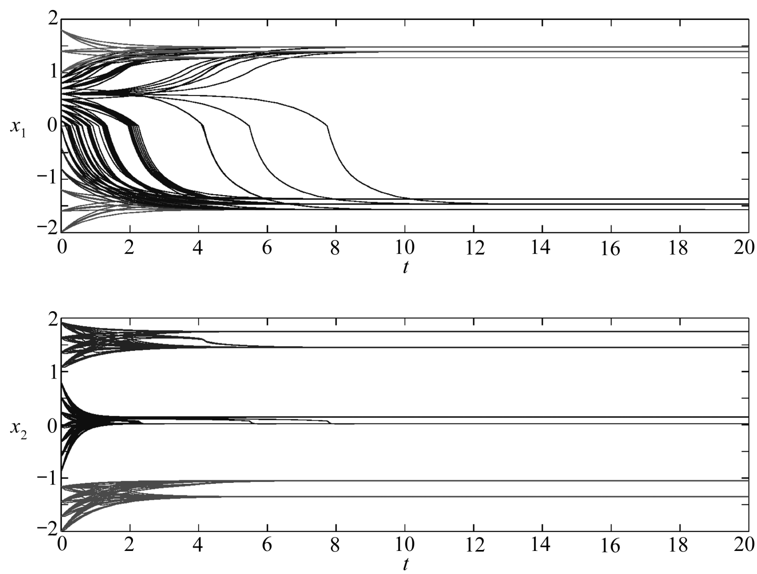

图4 例2中 x_1, x_2 的瞬态特性

Fig. 4 Transient behavior of x_1, x_2 in example 2

$\bar{N}_1=(\{(1,1),(2,1)\},\varnothing,\varnothing)$, $\bar{N}_2=(\{(1,1),(2,2)\},\varnothing,\varnothing)$,

$\bar{N}_3=(\{(1,1),(2,3)\},\varnothing,\varnothing)$, $\bar{N}_4=(\{(1,4),(2,1)\},\varnothing,\varnothing)$,

$\bar{N}_5=(\{(1,4)\},\{(2,2)\},\varnothing)$, $\bar{N}_6=(\{(1,4)\},\{(2,3)\},\varnothing)$,

$\bar{N}_7=(\{(2,1)\},\{(1,3)\},\varnothing)$, $\bar{N}_8=(\{(2,2)\},\{(1,3)\},\varnothing)$,

$\bar{N}_9=(\{(2,3)\},\{(1,3)\},\varnothing)$, $\bar{N}_{10}=(\{(2,1)\},\varnothing,\{(1,2)\})$,

$$\bar{N}_{11} = (\{(2,2)\}, \varnothing, \{(1,2)\}), \bar{N}_{12} = (\{(2,3)\}, \varnothing, \{(1,2)\}).$$

由定理 1 可知,系统(11)在每个划分区域 $D_l := \Sigma_{\bar{N}_l}(l = 1,2,\cdots,9)$ 都有一个平衡点,而在其它 3 个划分区域内没有平衡点. 由定理 3 可知,在划分区域 D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6 的平衡点是指数稳定的,而在划分区域 D_7, D_8, D_9 的平衡点是不稳定的(如图 3 和图 4 所示).

备注 5 在文献[30]中,作者考虑的激活函数是不连续多层函数,即逐段常数函数. 显然本文例 2 中所涉及的激活函数要比多层函数复杂得多. 因此,文献[30]所获的结果并不能用于例 2 中神经网络(11)稳定性的判断.

4 结 论

本文研究了一类连续或不连续激活函数的时滞神经网络的多稳定性. 通过分析办法和对状态空间的划分,我们给出了判断该神经网络多个平衡点存在及局部指数稳定的充分条件. 最后,给出了两个数值仿真例子,说明所给判据的有效性和较小的保守性.

参考文献(References):

[1] Gopalsamy K. Learning dynamics in second order networks[J]. *Nonlinear Anal RWA*, 2007, **8**(2): 688-698.

[2] Chen T. Global exponential stability of delayed Hopfield neural networks[J]. *Neural Netw*, 2001, **14**(8): 977-980.

[3] Song Q, Cao J. Dynamics of bidirectional associative memory networks with distributed delays and reaction-diffusion terms [J]. *Nonlinear Anal RWA*, 2007, **8**(1): 345-361.

[4] Wang Z, Liu Y, Liu X. State estimation for jumping recurrent neural networks with discrete and distributed delays[J]. *Neural Netw*, 2009, **22**(1): 41-48.

[5] Foss J, Longtin A, Mensour B, Milton J. Multistability and delayed recurrent loops[J]. *Phys Rev Lett*, 1996, **76**(4): 708-711.

[6] Hahnloser R. On the piecewise analysis of networks of linear threshold neurons[J]. *Neural Netw*, 1998, **22**(1): 691-697.

[7] Cheng C Y, Lin K H, Shih C W. Multistability and convergence in delayed neural networks [J]. *Physica D*, 2007, **225**(1): 61-74.

[8] Huang G, Cao J. Multistability in bidirectional associative memory neural networks[J]. *Phys Lett A*, 2008, **372**(16): 2842-2854.

[9] Shih C W, Tseng J P. Convergent dynamics for multistable delayed neural networks[J]. *Nonlinearity*, 2008, **21**(10): 2361-2389.

[10] Nie X, Cao J. Multistability of competitive neural networks with time-varying and distributed delays[J]. *Nonlinear Anal RWA*, 2009, **10**(2): 928-942.

[11] Cao J, Feng G, Wang Y. Multistability and multiperiodicity of delayed Cohen-Grossberg neural networks with a general class of activation functions[J]. *Physica D*, 2008, **237**(13): 1734-1749.

[12] Huang G, Cao J. Delay-dependent multistability in recurrent neural networks[J]. *Neural Netw*, 2010, **23**(2): 201-209.

[13] Zhang L, Yi Z, Yu J, Heng P A. Some multistability properties of bidirectional associative memory recurrent neural networks with unsaturating piecewise linear transfer functions[J]. *Neurocomputing*, 2009, **72**(16/18): 3809-3817.

[14] Zhang L, Yi Z, Yu J. Multiperiodicity and attractivity of delayed recurrent neural networks with unsaturating piecewise linear transfer functions[J]. *IEEE Trans Neural Netw*, 2008, **19**(1): 158-167.

[15] Huang Z, Song Q, Feng C. Multistability in networks with self-excitation and high-order synaptic connectivity[J]. *IEEE Trans Circuits Syst I*, 2010, **57**(8): 2144-2155.

[16] Forti M, Nistri P. Global convergence of neural networks with discontinuous neuron activations[J]. *IEEE Trans Circuits Syst I*, 2003, **50**(11): 1421-1435.

[17] Cortes J. Discontinuous dynamical systems[J]. *IEEE Control Syst Mag I*, 2008, **28**(3): 36-73.

[18] Forti M, Nistri P, Papini D. Global exponential stability and global convergence in finite time of delayed neural networks with infinite gain[J]. *IEEE Trans Neural Netw*, 2005, **16**(6): 1449-1463.

[19] Papini D, Taddei V. Global exponential stability of the periodic solution of a delayed neural network with discontinuous activations[J]. *Phys Lett A*, 2005, **343**(1/3): 117-128.

[20] Forti M, Grazzini M, Nistri P, Pancioni L. Generalized lyapunov approach for convergence of neural networks with discontinuous or non-Lipschitz activations[J]. *Physica D*, 2006, **214**(1): 88-99.

[21] Wu H. Global stability analysis of a general class of discontinuous neural networks with linear growth activation functions[J]. *Inf Sci*, 2009, **179**(19): 3432-3441.

[22] Huang L, Guo Z. Global convergence of periodic solution of neural networks with discontinuous activation functions [J]. *Chaos*, *Solitons Fractals*, 2009, **42**(4): 2351-2356.

[23] Wang J, Huang L, Guo Z. Global asymptotic stability of neural networks with discontinuous activations[J]. *Neural Netw*, 2009, **22**(7): 931-937.

[24] Li L, Huang L. Dynamical behaviors of a class of recurrent neural networks with discontinuous neuron activations[J]. *Appl Math Modell*, 2009, **33**(12): 4326-4336.

[25] Liu X, Cao J. On periodic solutions of neural networks via differential inclusions[J]. *Neural Netw*, 2009, **22**(4): 329-334.

[26] Guo Z, Huang L. LMI conditions for global robust stability of delayed neural networks with discontinuous neuron activations[J]. *Appl Math Comput*, 2009, **215**(3): 889-900.

[27] Wang J, Huang L, Guo Z. Dynamical behavior of delayed hopfield neural networks with discontinuous activations[J]. *Appl Math Modell*, 2009, **33**(4): 1793-1802.

[28] Lu W, Chen T. Dynamical behaviors of Cohen-Grossberg neural networks with discontinuous activation functions[J]. *Neural Netw*, 2005, **18**(3): 231-242.

[29] Huang L, Wang J, Zhou X. Existence and global asymptotic stability of periodic solutions for Hopfield neural networks with discontinuous activations[J]. *Nonlinear Anal RWA*, 2009, **10**(3): 1651-1661.

[30] Huang G, Cao J, Zhou X. Multistability of neural networks with discontinuous activation function[J]. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul*, 2008, **13**(10): 2279-2289.

[31] Wang L, Chen T. Multistability of neural networks with Mexican-hat-type activation functions [J]. *IEEE Trans Neural Netw*, 2012, **23**(11): 1816-1826.

Multistability of Delayed Neural Networks With Discontinuous Activations

CHEN Xiao-feng, SONG Qian-kun
(*Department of Mathematics*, *Chongqing Jiaotong University*,
Chongqing 400074, *P. R. China*)

Abstract: The problem on the multistability was investigated for delayed neural networks with discontinuous activations. For the neural networks being studied, the traditional assumptions on the continuity and the monotonicity of the activation functions were not required. Several sufficient conditions for checking the coexistence and local exponential stability of equilibria for the considered neural networks were given. Finally, two numerical examples were given to show the effectiveness and less conservatism of the proposed criteria.

Key words: neural network; discontinuous neuron activation; multistability; exponential stability

学术要闻

虚拟激励法推动我国高速列车自主创新

由大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室赵岩、张亚辉、林家浩(我刊编委)等承担的"十一五"国家科技支撑计划"中国高速列车关键技术研究及装备研制"重大项目的子课题"车体弹性体随机振动响应分析平台-基于随机振动的车体及设备可靠性评估技术"历经 4 年研究开发和对实际车辆模型的仿真分析,最近获得高速列车生产单位南车青岛四方机车车辆股份有限公司等单位的联合验收.

专家评审意见书指出,课题组"基于虚拟激励法建立高效、精确的全三维车体有限元随机振动分析理论和仿真技术.完成了高速列车车体弹性体随机振动响应数值仿真平台 SiPESC-HiPEM";"建立高速列车车体随机振动分析数字化设计规范和流程. 首次实现了具有百万自由度高速列车车体随机振动的仿真计算,为车体产品开发提供了有效的分析工具,有力支撑了我国高速列车车体设计";"形成了标准的分析流程和方法,提高了车体随机振动可靠性评估的准确性";"可有效地缩短研发周期,提高计算精度".意见书最后指出:"该课题的核心关键技术为自主开发,达到了世界先进水平,对高速列车形成完整知识产权具有重要意义."