

参数振动受迫响应的三角级数解*

黄迪山

(上海大学 机电工程与自动化学院,上海 200072)

摘要: 基于调制反馈方法,对参数周期与激励力周期不相同情况下,研究其参数系统受迫振动响应三角级数解.采用谐波的线性组合形式从数学上表达受迫振动响应解,然后通过运用谐波平衡,将参数振动方程转化成无限阶线性代数方程组,解出其谐波的系数.上述方法的特点在于:1)用三角级数来表达振动受迫响应,十分便于参数振动的频域分析,剖析受迫响应性质;2)从解的表达可直接推出组合谐波共振条件;3)采用标准的 Runge-Kutta 算法得到的相图证实上述方法结果的精确性.研究表明:该方法适用于参数振动完整受迫响应解的数学表达与分析.

关键词: 参数振动; 受迫响应; 三角级数

中图分类号: O242.1; O321 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.03.009

引言

参数振动问题源于物理和机械的许多领域,对参数系统的稳定性研究和受迫响应估计是两个最重要的问题.在以往的研究中已经有许多种方法用于研究参数系统的稳定性.这些方法包括 Hill 方法^[1]、摄动法^[2]、平均法、Floquet 理论^[3]、Sinha Chebyshev 多项式方法^[4]等.用近似解析摄动方法研究了简支边界下轴向变速运动黏弹性 Rayleigh 梁的横向非线性参数振动的稳态响应问题等^[5].

另外一些计算方法用来研究受迫响应,包括 David 的传递矩阵法^[6]、Floquet 特征向量的线性组合^[7]、改进的直接谱分析法^[8]、IHB (incremental harmonical balance) 法进行非线性振动求解^[9]、多尺度法求振动响应^[5]等计算方法来得到受迫响应.这些计算方法很有效地应用于多自由度参数系统的受迫响应估计.但是在科学和工程应用中,用 Fourier 级数表示受迫响应在故障识别与诊断中十分便捷.尤其是在对裂纹转子故障诊断等相同的情况在机械中是十分重要且不可替代的^[10].在分析直齿轮副参数振动中,采用矩阵谱分解中的 Sylvester 理论和 Fourier 级数给出参数振动系统的频响函数及响应稳定^[11].

本文中,基于调制反馈概念^[12-13]研究参数周期与激励力周期不相同情况下受迫参数振动的三角级数响应解.通过极限运算、谐波平衡和代数运算,可以得到稳定状态受迫响应解的完整表达式.提出的级数解形式虽然是从调制反馈系统物理模型借鉴的,且反映了参数振动受迫响应中频率裂解的本质.

* 收稿日期: 2012-12-24

作者简介: 黄迪山(1957—),男,浙江诸暨人,副教授,博士(E-mail:hdishan@shu.edu.cn)

1 调制反馈系统

在参数周期与激励力周期不相同情况下,考虑参数振动方程(1):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_n^2(1 + \beta \cos \omega_0 t)x = A \cos \omega_p t, \quad (1)$$

式中, ω_0 为参数变化频率, ω_p 外力激励频率, A 外力幅度, ζ 阻尼率, β 调制指数.

将式(1)改写成式(2):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_n^2 x = A \cos \omega_p t - x \omega_n^2 \beta \cos \omega_0 t. \quad (2)$$

根据式(2),将受迫参数振动响应问题可以转化为图1所示的系统.该系统是一个二阶线性系统和一个幅值调制环节组成的特殊反馈系统.系统输出 $x(t)$ 是所关注的受迫参数振动响应.

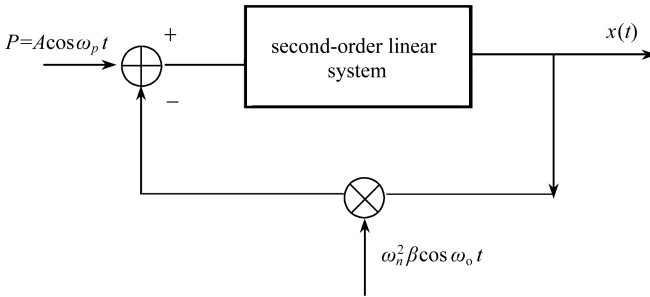


图1 调制反馈系统

Fig. 1 Modulation feedback system

由于幅值调制的存在,系统将产生频率裂解现象,此过程可以概括为,在第1个 Δt 的时间内,谐波成分 ω_p 通过调制分解成有谐波成分 $\omega_p - \omega_0$ 和 $\omega_p + \omega_0$. 然后,调制结果作为新的谐波成分直接反馈到二阶线性单元内.在第2个 Δt 时间内, ω_p , $\omega_p - \omega_0$ 和 $\omega_p + \omega_0$ 这3个部分成为系统的输出,并且再次进入裂解过程,这样 $\omega_p - 2\omega_0$, $\omega_p - \omega_0$, ω_p , $\omega_p + \omega_0$, $\omega_p + 2\omega_0$ 这5个谐波分量的组合进入输入端,系统由此进行裂变循环……. 整个频率裂解过程为图2所示.

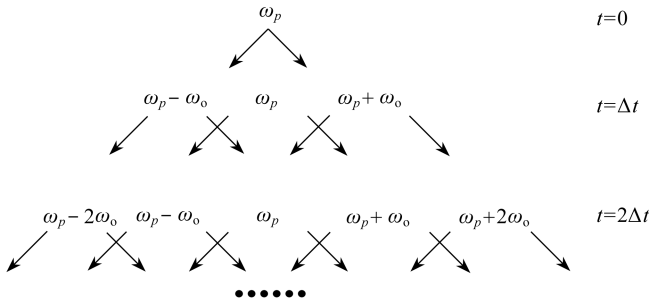


图2 系统频率裂解过程 ($t \geq 0, \Delta t \rightarrow 0$)

Fig. 2 Frequency splitting process ($t \geq 0, \Delta t \rightarrow 0$)

假设频率裂解过程不断继续,频率裂解过程最终将达到动态稳态.因此,存在许多由 ω_p 和 ω_0 线性组合的谐波成分作为频率裂解动态平衡的结果,在数学上表达为

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k \cos(\omega_p + k\omega_0)t. \quad (3)$$

由于谐波成分的能量集中于 ω_n 附近的一个窄带中,所以当 $k \rightarrow \infty$ 时系数 $B_k \rightarrow 0$. 因此,参

$$\begin{bmatrix} \varpi_0 & \gamma & & & & & \\ \gamma & \varpi_1 & \gamma & & & & \\ & \gamma & \varpi_2 & \gamma & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \gamma & \varpi_{m-1} & \gamma & \\ & & & & \gamma & \varpi_m & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - \gamma B_{-1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -\gamma B_{m+1} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

设频率因子

$$\alpha_0 = \varpi_0, \alpha_1 = \varpi_1 - \frac{\gamma^2}{\alpha_0}, \dots, \alpha_m = \varpi_m - \frac{\gamma^2}{\alpha_{(m-1)}}, \quad (12)$$

代入式(11), 简化方程得

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 & \gamma & & & & & \\ & \alpha_1 & \gamma & & & & \\ & & \alpha_2 & \gamma & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \alpha_{m-1} & \gamma & \\ & & & & & \alpha_m & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - \gamma B_{-1} \\ -\frac{\gamma(A - \gamma B_{-1})}{\alpha_0} \\ \frac{\gamma^2(A - \gamma B_{-1})}{\alpha_0 \alpha_1} \\ \vdots \\ (-1)^m \frac{\gamma^m (A - \gamma B_{-1})}{\prod_{i=1}^m \alpha_{i-1}} - \gamma B_{m+1} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

从而解得

$$B_0 = (A - \gamma B_{-1}) \left(\frac{1}{\alpha_0} + \frac{\gamma^2}{\alpha_0^2 \alpha_1} + \frac{\gamma^4}{\alpha_0^2 \alpha_1^2 \alpha_2} + \frac{\gamma^6}{\alpha_0^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3} + \dots + \frac{(-1)^m \gamma^{m+1}}{\prod_{i=1}^{m+1} \alpha_{i-1}} B_{m+1} \right). \quad (14)$$

因为当 $m \rightarrow \infty$ 时系数 $B_m \rightarrow 0$, 所以系数 B_0 可以展开如下:

$$B_0 = (A - \gamma B_{-1}) S_0, \quad (15)$$

其中

$$S_0 = \frac{1}{\alpha_0} + \frac{\gamma^2}{\alpha_0^2 \alpha_1} + \frac{\gamma^4}{\alpha_0^2 \alpha_1^2 \alpha_2} + \frac{\gamma^6}{\alpha_0^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3} + \dots + \frac{\gamma^{2n-2}}{\alpha_{n-1} \prod_{i=0}^{n-2} \alpha_i^2} + \dots. \quad (16)$$

同理可得

$$\begin{cases} B_1 = (A - \gamma B_{-1}) S_1, \\ B_2 = (A - \gamma B_{-1}) S_2, \\ B_3 = (A - \gamma B_{-1}) S_3, \\ \dots \\ B_k = (A - \gamma B_{-1}) S_k, \end{cases} \quad (17)$$

其中

$$S_k = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma^{2n+k-2}}{\left(\prod_{j=0}^{k-1} \alpha_j \right) \left(\prod_{i=k}^{n+k-2} \alpha_i^2 \right) \alpha_{(n+k-1)}}. \quad (18)$$

(b) 将方程(9)的上半部分改写成

$$\begin{bmatrix} \varpi_0 & \gamma & & & & & \\ \gamma & \varpi_{-1} & \gamma & & & & \\ & \gamma & \varpi_{-2} & \gamma & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \gamma & \varpi_{-m+1} & \gamma & \\ & & & & \gamma & \varpi_{-m} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_{-1} \\ B_{-2} \\ \vdots \\ B_{-m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - \gamma B_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -\gamma B_{-m-1} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

得

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 & \gamma & & & & & \\ & \alpha_{-1} & \gamma & & & & \\ & & \alpha_{-2} & \gamma & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \alpha_{-m+1} & \gamma & \\ & & & & & \alpha_{-m} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_{-1} \\ B_{-2} \\ \vdots \\ B_{-m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - \gamma B_1 \\ -\frac{\gamma(A - \gamma B_1)}{\alpha_0} \\ \frac{\gamma^2(A - \gamma B_1)}{\alpha_0 \alpha_{-1}} \\ \vdots \\ (-1)^m \frac{\gamma^m(A - \gamma B_1)}{\prod_{i=1}^m \alpha_{-i+1}} - \gamma B_{-m-1} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

其中频率因子

$$\alpha_0 = \varpi_0, \alpha_{-1} = \varpi_{-1} - \frac{\gamma^2}{\alpha_0}, \dots, \alpha_{-m} = \varpi_{-m} - \frac{\gamma^2}{\alpha_{-(m-1)}}, \quad (21)$$

得

$$\begin{cases} B_0 = (A - \gamma B_1)R_0, \\ B_{-1} = (A - \gamma B_1)R_1, \\ B_{-2} = (A - \gamma B_1)R_2, \\ \dots\dots \\ B_{-k} = (A - \gamma B_1)R_k, \end{cases} \quad (22)$$

其中

$$R_k = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma^{2n+k-2}}{\left(\prod_{j=0}^{k-1} \alpha_{-j}\right) \left(\prod_{i=k}^{n+k-2} \alpha_{-i}^2\right) \alpha_{-(n+k-1)}}. \quad (23)$$

从式(17)中的 $B_1 = (A - \gamma B_{-1})S_1$ 和式(22) 中的 $B_{-1} = (A - \gamma B_1)R_1$ 解出 B_1 和 B_{-1} , 最终得到三角级数的系数:

$$B_{-k} = \frac{1 - \gamma S_1}{1 - \gamma^2 R_1 S_1} A R_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (24)$$

$$B_k = \frac{1 - \gamma R_1}{1 - \gamma^2 R_1 S_1} A S_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (25)$$

4 共振分析

(a) 主共振

在式(16)中,当频率因子 $\alpha_0 = \varpi_0 = 0$ 时 $|B_0| \rightarrow \infty$. 当 $\omega_p \approx \omega_n$ 时受压参数振动响应发生主共振.

(b) 组合谐波共振

在式(12)和(22)中,当频率因子 $\alpha_k = 0$ 时 $|B_k| \rightarrow \infty$. 有如下关系:

$$\alpha_k = \omega_n^2 - (\omega_p + k\omega_0)^2 - \gamma^2/\alpha_{(k-1)} = 0. \quad (26)$$

因此,组合谐波共振发生在 $\omega_p + k\omega_0 \approx \omega_n$ 处. 由于式(27)中的 $\gamma^2/\alpha_{(k-1)}$ 项存在,所以谐波共振频率发生左移.

5 谱分析

为了证实得到响应数学表达方法的有效性,下列谱例子说明三角级数响应解从时域转化为频域表达.

例 1 设公式(1)中固有频率为 $\omega_n = 25$, 激励频率 $\omega_p = 10$, 周期参数频率 $\omega_0 = 5$, 激励的幅值为 $A = 1$, 参数调制指数 $\beta = 0.3$.

在式(3)中解 $x(t)$ 可以简化为

$$\begin{aligned} x(t) = & B_{-2} + (B_{-3} + B_{-1}) \cos 5t + (B_{-4} + B_0) \cos 10t + (B_{-5} + B_1) \cos 15t + \\ & (B_{-6} + B_2) \cos 20t + (B_{-7} + B_3) \cos 25t + \\ & (B_{-8} + B_4) \cos 30t + (B_{-9} + B_5) \cos 35t + \dots \end{aligned} \quad (27)$$

根据公式(24)和(25)计算出系数 B_k 及相应的频率成分 $\omega_p + k\omega_0$, 它们列于表 1. 从表 1 结果画出受迫参数振动响应频谱图(图 3).

表 1 系数 B_k 的计算结果

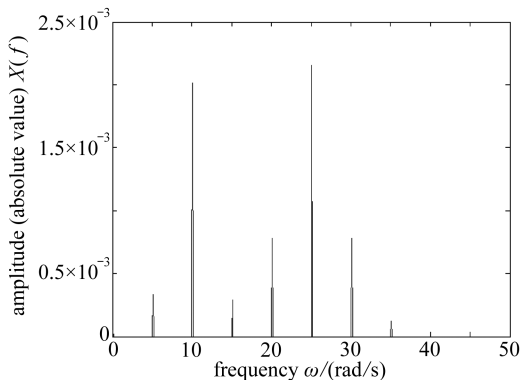
Table 1 Calculation results of the value B_k
($\omega_n = 25, \omega_p = 10, \omega_0 = 5, \beta = 0.3$)

k	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2
combination frequency $\omega_p + k\omega_0$	$-1.4\omega_n$	$-0.2\omega_n$	$-\omega_n$	$-0.8\omega_n$	$-0.6\omega_n$	$-0.4\omega_n$	$-0.2\omega_n$	0
B_k	9E-8	6E-7	1.6E-6	-5.6E-7	-2.4E-7	1.5E-6	-7.9E-6	4.9E-5
k	-1	0	1	2	3	4	5	
combination frequency $\omega_p + k\omega_0$	$0.2\omega_n$	$0.4\omega_n$	$0.6\omega_n$	$0.8\omega_n$	ω_n	$1.2\omega_n$	$1.4\omega_n$	
B_k	-3.2E-4	0.002	-2.9E-4	-7.7E-4	2.2E-3	7.75E-4	1.23E-4	

表 2 系数 B_k 的计算结果

Table 2 Calculation results of the value B_k
($\omega_n = 25, \omega_p = 10, \omega_0 = 4.951\ 577\ 581\ 82, A = 1, \beta = 0.3$)

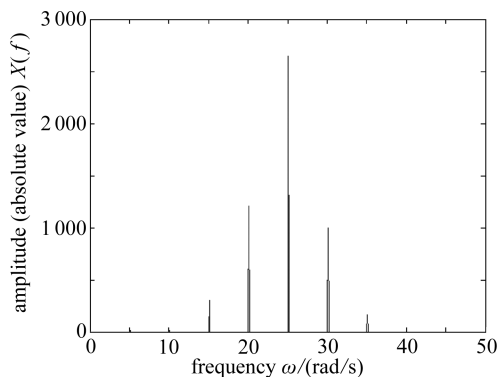
k	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2
combination frequency $\omega_p + k\omega_0 \approx$	$-1.4\omega_n$	$-1.2\omega_n$	$-\omega_n$	$-0.8\omega_n$	$-0.6\omega_n$	$-0.4\omega_n$	$-0.2\omega_n$	0
B_k	-0.002	-0.012	-0.030	0.017	-0.014	0.041	0.006 7	1.381
k	-1	0	1	2	3	4	5	
combination frequency $\omega_p + k\omega_0 \approx$	$0.2\omega_n$	$0.4\omega_n$	$0.6\omega_n$	$0.8\omega_n$	ω_n	$1.2\omega_n$	$1.4\omega_n$	
B_k	-8.988	-9.916	-305.1	1 203	-2 643	-988	-163	



($\omega_n = 25, \omega_p = 10, \omega_o = 5, \beta = 0.3$)

图3 受迫参数振动响应的理论频谱

Fig. 3 Amplitude spectrum of the parametric vibration response solutions



($\omega_n = 25, \omega_p = 10, \omega_o = 4.951\ 577\ 581\ 82, A = 1, \beta = 0.3$)

图4 受迫参数振动响应的理论频谱

Fig. 4 Amplitude spectrum of the parametric vibration response solutions

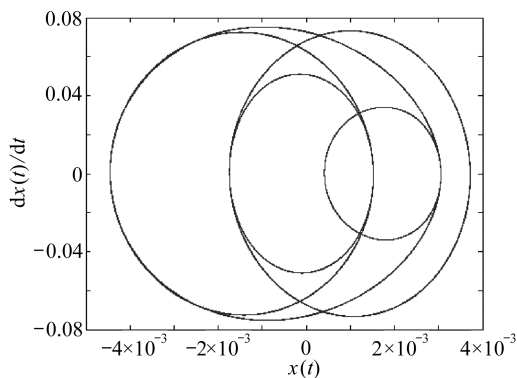
例2 设式(1)中 $\omega_n = 25, \omega_p = 10, \omega_o = 4.951\ 57, A = 1, \beta = 0.3$.

系数 B_k 的计算结果和相应的频率成分 $\omega_p + k\omega_o$ 列于表2. 受迫参数振动响应的理论频谱列于图4. 从图4中可以观察到组合谐波共振发生在 $\omega_p + 3\omega_o$ (24.854 7(rad/s)) 处, 并且可以明显看出谐振频率发生了左移.

6 响应相图

在受迫响应中相图的特征对系统微小的变化是十分敏感的. 根据式(27), 受迫响应表达为特殊的三角级数. 如图5所示. 在相图中可以看到受迫响应的准周期性.

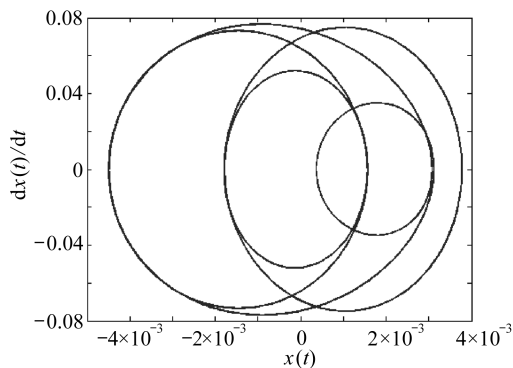
为了考核所述方法的准确性, 用四阶 Runge-Kutta(使用 MATLAB 程序 ode45) 所得到的相图进行比较, 如图6所示, 除了阻尼比以外 ($\zeta = 0.002\ 5$), 其它所有参数如同例1. 由于相图对阻尼比十分敏感, 只有当受迫响应达到稳定, 数值分析数据可以用来绘制相图.



($\omega_n = 25, \omega_p = 10, \omega_o = 5, A = 1, \beta = 0.3$)

图5 调制反馈方法所得响应相图

Fig. 5 Phase diagram obtained by the presented approach



($\omega_n = 25, \zeta = 0.002\ 5, \omega_p = 10, \omega_o = 5, A = 1, \beta = 0.3$)

图6 Runge-Kutta 法所得响应相图

Fig. 6 Phase diagram obtained by the Runge-Kutta method

通过比较图 5 与图 6 中的轨迹, 本文提出的方法所得到结果与 Runge-Kutta 法的结果高度一致。因此, 该方法对于参数振动受迫响应的逼近是十分精确地, 并且可以用来预测响应的频谱。

7 结 论

在调制反馈的预测模型中, 单自由度参数振动的受迫响应可以完整地用三角级数逼近。三角级数的系数由 ω_p , ω_0 和 β 组成的级数来表示, 本文方法在时域以及频域上受迫响应的预测都具有明显的优势, 并且从响应表达中给出组合谐波共振判据。

然而, 计算逼近的精确度取决于谐波项的数量。文中看到 15 个谐波项可以提供满意精度, 并且相图也与 Runge-Kutta 法所得到的结果高度统一。

本文提出的方法将具有周期参数的普通微分方程转化为线性代数方程, 极大地减少了计算方法的复杂程度。因此, 它对于参数激励非线性系统的周期解计算分析是一个十分有效的工具。

致谢 作者致谢美国 Auburn 大学的 Subhash Sinha 教授和 Wayne 州立大学 Tan Chin-An 教授对本研究的指导; 同时, 感谢上海大学校科学研究基金对本研究的资助。

参考文献 (References):

- [1] Yakubovitch V A, Starzhinskii V M. *Linear Differential Equation With Periodic Coefficients* [M]. Vols I and II. New York: Wiley, 1975.
- [2] 胡海岩. 应用非线性动力学[M]. 北京: 航空工业出版社, 2000. (HU Hai-yan. *Application of Nonlinear Dynamic* [M]. Beijing: Aviation Industry Press, 2000. (in Chinese))
- [3] Gaonkar G H, Simha Prasad D S, Sastry S. On computing Floquet transition matrices of rotorcraft[J]. *Journal of the American Helicopter Society*, 1981, **26**(3): 56-61.
- [4] Sinha S C, WU Der-ho, Juneja V, Joseph P. Analysis of dynamic systems with periodically varying parameters via Chebyshev polynomials[J]. *Transaction of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, 1993, **115**(1): 96-102.
- [5] 丁虎, 胡超荣, 陈立群, 江海燕. 轴向变速黏弹性 Rayleigh 梁非线性参数振动稳态响应[J]. 振动与冲击, 2012, **31**(5): 136-138. (DING Hu, HU Chao-rong, CHEN Li-qun, JIANG Hai-yan. Steady state response of nonlinear vibration of an axially accelerating viscoelastic Rayleigh beam[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2012, **31**(5): 136-138. (in Chinese))
- [6] David J W, Mithchell L D. Using transfer matrices for parametric system forced response[J]. *Transaction of the ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 1987, **109**(4): 356-360.
- [7] Wu W T, Wickert J A, Griffin J H. Modal analysis of the steady state response of a driven periodic linear system[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, **183**(2): 297-308.
- [8] Deltombes R, Moraux D, Plessis G, Level P. Forced response of structural dynamic systems with local time-dependent stiffness[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, **237**(5): 761-773.
- [9] 黄建亮, 陈树辉. 外激励力作用下的轴向运动梁非线性振动的联合共振[J]. 振动工程学报, 2011, **24**(5): 455-460. (HUANG Jian-liang, CHEN Shu-hui. Combination resonance of nonlinear forced vibration of an axially moving beam[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2011, **24**(5): 455-460. (in Chinese))

- [10] Dimarogonas A D, Papadopoulos C A. Vibration of cracked shafts in bending[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1983, **91**(4): 583-593.
- [11] 王建军, 韩勤锴, 李其汉. 参数振动系统频响特性研究[J]. 振动与冲击, 2010, **29**(3): 103-108. (WANG Jian-jun, HAN Qing-kai, LI Qi-han. Frequency response characteristics of parametric vibration system[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2010, **29**(3): 103-108. (in Chinese))
- [12] 黄迪山, 程耀东, 童忠钊. 参数振动的调制反馈分析[J]. 浙江大学学报(工学版), 1992(S1): 16-24. (HUANG Di-shan, CHENG Yao-dong, TONG Zhong-fan. Modulating feedback analysis for the parametric vibration[J]. *Journal of Zhejiang University(Eng Version)*, 1992(S1): 16-24.
- [13] 黄迪山. 复杂参数振动的调制反馈分析[J]. 应用力学学报, 1995, **12**(2): 72-77. (HUANG Di-shan. Modulating feedback analysis for complicate parametric vibration[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 1995, **12**(2): 72-77. (in Chinese))

Trigonometric Series Approach for Forced Parametric Vibration Response

HUANG Di-shan

(School of Mechatronic Engineering and Automation, Shanghai University,
Shanghai 200072, P. R. China)

Abstract: Modulation feedback method was used to predict the forced response of a linear system that was governed by an ordinary differential equation with periodic coefficients. The system was excited by both periodic coefficients and external force terms that had different periods. In the method, the forced response is expressed as a special trigonometric series. By applying harmonic balance and limitation operation, all coefficients of the harmonic components in the forced response solution are fully approached. The investigation result shows that the new approach has an advantage in the complete and analytical solution of forced response and in the expression of nonlinear dynamic characteristics, and it is very significant for the theoretical research and engineering application in dealing with the problem of forced parametric vibration.

Key words: parametric vibration; forced response; trigonometric series