文章编号:1000-0887(2013)01-0085-13

交通流流体力学模型与非线性波*

张　鹏[1,2], 王　卓[1,2], 黄仕进[3]

(1. 上海大学 上海市应用数学和力学研究所,上海 200072;
2. 上海市力学在工程中的应用重点实验室,上海 200072;
3. 香港大学 土木工程系,香港)

摘要: 介绍了交通流问题中的流体力学描述方法,分析了交通流在受压力和自驱动力等因素作用下所产生的非线性波动现象.这些描述包括 LWR 运动学模型,考虑动力学效应的高阶模型,考虑超车效应的多车种 LWR(Lighthill-Whitham-Richards)模型,以及考虑流通量间断的模型方程.此外,还介绍了 LWR 网络推广模型在交叉口的 Riemann 问题求解;提出了描述二维行人流问题的 Navier-Stokes-Eikon 方程模型并描述了确定行人流运动期盼方向的基本思想.

关 键 词: 守恒律方程; 激波; 时走时停波; 超车波; 接触间断
中图分类号: O29　　**文献标志码:** A
DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.01.009

引　言

交通流宏观模型具有流体力学方程的基本特征,相关的数学理论与双曲守恒律方程理论有着不可分割的关系,相关的数值方法也是计算流体力学所要研究的重要内容.本文结合作者的研究领域以及近年来所取得的成果,按照问题和模型的分类,重点介绍交通流中的非线性波动现象.事实上,交通流问题所涉及的学科和研究方向十分广泛,本文只是从一个切口将读者引入这一研究领域.期盼本文能引起广大应用数学和力学专家对交通流问题的兴趣,达到抛砖引玉的效果.

1　车辆交通流模型

交通流模型的发展以 LWR(Lighthill-Whitham-Richards)理论[1-2]的提出为标志.由于将车流比拟为连续介质,可以首先建立关于车流密度 $\rho(x,t)$ 和流量 $q(x,t)$ 的质量守恒方程:

$$\rho_t + q_x = 0, \tag{1}$$

上式假定了在研究路段上无流入或流出的匝道.

1.1　LWR 模型

定义车流平均速度:

---

* **收稿日期:** 2012-11-19; **修订日期:** 2012-12-10
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11072141;11272199);国家重点基础研究发展计划资助项目(2012CB725404);上海市重点学科建设资助项目(S30106)
作者简介: 张鹏(1963—),男,云南个旧人,教授(通讯作者. E-mail: pzhang@mail.shu.edu.cn).

$$v(x,t)=q(x,t)/(\rho(x,t)).$$

假定存在速度-密度的函数关系：$v=v_e(\rho)$，其中，$v_e'(\rho)<0$，$v_e(0)=v_f$，$v_e(\rho_{jam})=0$，v_f 为畅行速度，ρ_{jam} 为阻塞密度. 那么式(1)变为

$$\rho_t+(q_e(\rho))_x=0, \tag{2}$$

其中 $q_e(\rho)\equiv\rho v_e(\rho)$.

方程(2)即是著名的 LWR 模型,它为研究守恒律弱解理论和数值计算理论提供了一个难得的应用例子,并因此载入了 Whitham 的名著“Linear and Nonlinear Waves”[3],成为描述非线性双曲波的一个经典方程. 不少计算流体力学和守恒律名家在其著作中也经常引用 LWR 模型,例如在 LeVeque 的名著“Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems”[4]中,就花了不少的篇幅讨论 LWR 模型. 随着守恒律解析理论和计算理论的发展,对 LWR 模型和类似的标量方程已经有了充分的了解和认识. 事实上,可以简单说明 LWR 模型与 Burgers 方程等价[3]. 如果取线性的速度-密度关系：

$$v_e(\rho)=v_f\left(1-\frac{\rho}{\rho_{jam}}\right). \tag{3}$$

并令 $\rho=0.5\rho_{jam}(1-u/v_f)$，则式(2)变为下面的 Burgers 方程：

$$u_t+uu_x=0.$$

LWR 模型主要描述了两种非线性的双曲波. 在 Riemann 问题中,当下游车流密度较大时,形成激波;当下游密度较小时,则形成稀疏波. 向上游传播的激波描述了交通中车流的堵塞排队现象. 例如:红灯禁行时在斑马线前出现车辆排队等候;当车道数或畅行速度减少时,由于车流密度较大在瓶颈的上游出现堵塞. 向上游传播的稀疏波则描述了堵塞之后车流疏散的过程. 例如,绿灯放行时在斑马线上下游车流密度逐渐得到稀释;对应瓶颈上游的堵塞,瓶颈下游的车流密度则保持稀疏. 总之,有堵必有疏,有疏必有堵.

1.2 高阶模型

LWR 模型由于假定了固定的速度-密度关系,只能描述平衡态的交通流,与实际测量所得到的二维区域分布相图不符. 20 世纪 70 年代初,Payne[5]和 Whitham[3]分别给出了交通流加速度方程的描述,用以代替 LWR 模型中固定的速度-密度关系. 这一方程与式(1)联立得到完整的求解方程,被统一称为 PW 高阶模型. Kühne[6]，Kerner 和 Konháuser[7]在 PW 模型的加速度方程中加入扩散效应;Aw 和 Rascle[8-9]根据交通流各向异性的特性,在加速度方程中用速度(压力)梯度代替密度(压力)梯度. 我们将交通流加速度方程写为下面统一的形式：

$$v_t+vv_x=\frac{v_e(\rho)-v}{\tau}-\frac{p'(\rho)}{\rho}\rho_x+\rho P'(\rho)v_x+\gamma(\rho)v_{xx}, \tag{4}$$

其中,右端首项为弛豫项，τ 为弛豫时间,表示驾驶员有趋向于某一平衡态速度的驾驶愿望. 第 2 和第 3 项均为期望项,分别对应密度梯度压力 $p(\rho)$ 和速度梯度压力 $P(\rho)$，其中所谓的“压力”$P(\rho)$ 与速度有相同的量纲. 第 2 项描述当下游密度较大或较小时驾驶员的减速或加速行为;第 3 项则描述当下游车流速度较小或较大时驾驶员的减速或加速行为. 最后一项描述交通流扩散效应,对车流经过激波出现加速度为 $-\infty$ 的情形有较合理的光滑化效应.

不难解出模型方程组(2)和(4)的 2 个特征速度：

$$\lambda_1=v-c_1(\rho),\ \lambda_2=v+c_2(\rho),$$

其中,向后和向前的声速(小扰动速度)分别为

$$c_1(\rho)=0.5(\sqrt{(\rho P'(\rho))^2+4p'(\rho)}+\rho P'(\rho)),$$

$$c_2(\rho)=0.5(\sqrt{(\rho P'(\rho))^2+4p'(\rho)}-\rho P'(\rho)).$$

这说明模型方程是双曲型的. 当压力 $P(\rho)\equiv 0$ 时,声速 $c_1(\rho)=c_2(\rho)>0$,第二特征速度大于车流速度,模型为各向同性. 其中当 $\gamma(\rho)\equiv 0$ 时,得到 PW 模型;若取 $\gamma(\rho)=\nu$ 和 $\gamma(\rho)=\mu/\rho$,其中 ν 和 μ 为常数,则分别得到 Kühne 模型和 KK 模型. 当压力 $p(\rho)\equiv 0$ 时,向前的等效声速 $c_2(\rho)\equiv 0$,模型为各向异性,第一和第二特征速度均不大于车流速度. 这意味着车流只受到来自下游和自身扰动的影响,比较符合交通流的实际情况. 在 AR 模型中,取 $\gamma(\rho)\equiv 0$. 如果只考虑对流效应,交通流高阶模型为标准的守恒方程,有比较成熟的弱解理论. 对于 Riemann 问题,第一特征场对应非线性的激波或稀疏波. 第二特征场当模型为各向同性时也对应激波或稀疏波;当模型为各向异性时,则对应线性退化的接触间断. 然而,加入松弛项后,加速度中压力与自驱动力之间的耦合效应产生更加复杂的波动现象.

可以认为松弛项 $q_e(\rho)-q$ 或 $v_e(\rho)-v$ 在模型方程中起主要作用,并定义 $q_e'(\rho)$ 为运动波速度. 事实上,当 $q=q_e(\rho)$ 时,模型退化为 LWR 模型,而 $q_e'(\rho)$ 正是 LWR 模型的特征速度. 同时,定义两特征值 λ_1 和 λ_2 为高阶波速度. 只有当运动波速度介于两高阶波速度之间时,某一平衡解 $\rho=\rho_0$ 和 $v=v_e(\rho_0)$ 才是线性稳定的,否则这一平衡解是线性不稳定的[3]. 由此可给出线性稳定性条件:

$$\rho_0 v_e'(\rho_0)+c_1(\rho_0)\geqslant 0.$$

通常假定 $q_e(\rho)$ 有1个拐点,且上式取等号时能解出划分稳定和不稳定区域的2个临界密度 ρ_{c_1} 和 ρ_{c_2}. 当 $\rho_0\in(\rho_{c_1},\rho_{c_2})$ 时平衡解是不稳定的,否则是稳定的. 对初始值 $\rho=\rho_0$ 加 1 个小扰动,稳定性意味着解将回到平衡态. 对于不稳定的情形,在周期边界条件下,扰动将使初始分布演化为形状不变的行波[7,10]. 对于包含扩散效应的模型,上述行波解可由 KdV 或 MKdV 行波解近似[11]. 对于无扩散或包含充分小扩散系数的模型,行波解为向下游传播的宽移动阻塞(wide cluster),即时走时停波,阻塞的上游波阵面为激波,下游波阵面为光滑过渡层(transtion layer).

Zhang 及其合作者运用弱解理论,给出了解析求解宽移动阻塞的波高和传播速度等参数的代数方程,并通过数值模拟对比进行了验证[12-14]. 由于存在激波,那么不同的方程守恒形式必将导出不同的行波解. 对交通流问题,这意味着即使只有质量守恒具有实质的物理意义,但对加速度方程或其它方程也必须定义明确的守恒形式或守恒变量. 文献[13]定义了 PW 模型中加速度的两种不同守恒形式(分别以 v 和 ρv 为守恒变量),给出了在这两种守恒形式下求解宽移动阻塞行波解参数的不同代数方程组. 文献[13]还指出,根据其粘性(扩散)项的形式,Kühne 模型的加速度方程必须以 v 为守恒变量,其行波解对小粘性系数 ν 与 PW 模型(以 v 为守恒变量)的解有渐近关系. 类似地,KK 模型的加速度方程必须以 ρv 为守恒变量,其行波解对小粘性系数 μ 与 PW 模型(以 ρv 为守恒变量)的解有渐近关系. 关于行波解的讨论还可参考文献[15-16].

另一方面,在交通流问题中不必遵循动量守恒(和能量守恒). 因此,Aw 和 Rascle[8] 将其各向异性的加速度方程的守恒变量定义为 $\rho(v+P(\rho))$. 记 $V(\rho)=-P(\rho)$ 为某一平衡态速度,则守恒变量可以理解为"动量" ρv 与"平衡态动量" $\rho V(\rho)$ 之差. 此外,如果消除弛豫效应,易知 $v-V(\rho)$ 为过第一特征场激波或在稀疏波内的 Riemann 不变量. Zhang 等[17] 通过变换 $v=V(w)$ 引入"伪密度" w,并将加速度方程定义为如下的"伪质量"守恒方程:

$$w_t + (wV(w))_x = \beta^{-1}(V(w) - v_e(\rho)),$$

其中，$V(\rho)$ 和 $v_e(\rho)$ 均为速度-密度函数关系式。不难验证，如果消除弛豫效应，w/ρ 为过第一特征场激波和在稀疏波内的 Riemann 不变量。如果取 $V(\rho) \equiv v_e(\rho)$，那么随时间 $t \to \infty$，$w/\rho \to 1$，这时上述“伪质量”守恒方程和质量守恒方程(1)均与 LWR 模型(2)等价。否则，模型方程存在不稳定，可以描述非平衡态交通流和时走时停波。由弛豫和对流的耦合效应引起的 w/ρ 变化不仅反映出驾驶员理想车距与实际车距的差异，也反映了实际的交通相与平衡态的偏离程度。文献[17]还较为系统地讨论了上述模型方程稳定或不稳定解演化的物理有界性问题，所提出的方法可以用于判断一般高阶模型解的物理有界性。此外，文献[18]还首先讨论了流通量间断问题的高阶模型及其守恒形式。

由不稳定平衡解演化为时走时停波的物理相变过程，是交通流高阶模型所固有的“自组织、临界”性质。

1.3 多车种 LWR 模型

LWR 模型和高阶模型没有考虑超车因素。由 Wong 等[19]推广的多车种 LWR 模型根据行驶速度能力将车流分为 m 个种类，从而能够描述超车行为。设 ρ_l 为第 l 种车流的密度，$\rho = \sum_{l=1}^{m} \rho_l$ 为车流总密度。假设每一种车流的速度都是总密度的函数：$v_l = v_l(\rho)$，那么可以建立下面封闭的质量守恒模型方程组：

$$(\rho_l)_t + (\rho_l v_l(\rho))_x = 0, \qquad l = 1, 2, \cdots, m. \tag{5}$$

由于模型是任意的 $m \times m$ 方程组，这给理论研究带来较大的困难。Zhang 等[20]较完整地讨论了这一模型方程的物理波动性质。他们通过解析方法给出方程组的特征多项式，运用介质定理等数学手段证明了模型方程的双曲性质；通过数学严格证明，讨论了由模型所描述的车流在通过激波或在稀疏波内密度的单调性变化。下面简要介绍这些性质。

为简化讨论，我们给定某一速度-密度函数 $v(\rho)$，并假设第 l 种车流的速度为 $v_l = b_l v(\rho)$，其中无量纲数 $b_l \leqslant 1$。同时，假定按分类顺序车流速度能力严格递减：

$$b_1 < b_2 < \cdots < b_{m-1} < b_m = 1.$$

假设不涉及车流密度为 0 的情况，那么可以证明模型方程是严格双曲的，并存在满足下面不等式的 m 个实特征值：

$$v_1 + \sum_{l=1}^{m} c_i < \lambda_1 < v_1 < \lambda_2 < v_2 \cdots < v_{l-1} < \lambda_l < v_l < \cdots < v_{m-1} < \lambda_m < v_m, \tag{6}$$

其中 $c_l = \rho_l v_l'(\rho)$。特征速度与各车流速度呈交错的不等式，说明特征场的形成与超车有关。通过式(6)，可以说明第 i 种车流($i \geqslant l$)超出第 j 种车流($j < l$)的行为形成了第 l 特征场($l \geqslant 2$)，其特征速度小于所有较快的 $m - l + 1$ 种车流速度，大于所有较慢的 $l - 1$ 种车流速度。而 λ_1 小于所有车流速度，说明第一特征场描述了当地交通流受下游车流变化影响的一般情况，这与 LWR 模型中特征场的形成相类似。式(6)中所有不等号变为恒等号，当且仅当函数 $v_1 \equiv v_2 \equiv \cdots = v_m$，即没有超车发生，这时方程组(5)退化为 LWR 模型。

对较为一般的情况，可以证明由不等式 6)所对应的所有 m 个特征场均为非线性的。换言之，对 Riemann 问题，每一特征场形成激波或稀疏波。我们简述下面关于这些激波和稀疏波的两条基本性质。

1）设 s_l 为第 l 特征场所形成激波的速度，激波左右解变量分别用上标 − 和 + 区分，那么必

有：对 $k < l$, $v_k^{\pm} < s_l$, $\rho_k^- > \rho_k^+$；对 $k \geqslant l$, $v_k^{\pm} > s_l$, $\rho_k^- < \rho_k^+$. 此外,总有 $\rho^- < \rho^+$, $v_k^- > v_k^+$.

2）设 θ 为第 l 特征场所形成稀疏波内的特征速度，那么在稀疏波内必有：对 $k < l$, $v_k(\rho(\theta)) < \theta$, $\rho_k'(\theta) > 0$；对 $k \geqslant l$, $v_k(\rho(\theta)) > \theta$, $\rho_k'(\theta) < 0$. 此外,总有 $\rho'(\theta) < 0$.

性质 1)说明，对 $k < l$，第 k 种车流由右至左穿过 l- 激波，且过激波后相对速度 $s - v_k$ 变小，密度变大；对 $k \geqslant l$，第 k 种车流由左至右穿过激波，且过激波后相对速度 $v_k - s$ 变小，密度变大. 此外,可以证明平均车流速度(定义为总流量除以总密度）在激波左侧大于在激波右侧,而且均大于激波速度,并同时注意到 $\rho^- < \rho^+$. 这说明车流作为总体是由左至右穿过激波,且过激波后相对速度变小,密度变大. 这些分析说明,无论是哪一种情形,激波确为压缩波. 由性质 2),可类似说明稀疏波确为膨胀波. 文献[20]还通过数值计算验证了模型方程的上述理论性质. 其中,不等式(6)是数值格式设计中所必需的,可以给出最大和最小特征速度的最佳估值,因而被许多文献所采用. 关于这一模型的数值计算方法,还可参考文献[21-23].

1.4 流通量间断问题

对流通量与空间变量有关的问题,在 Riemann 问题中需假设流通量间断,所以这类问题从本质上讲是流通量间断问题,其模型方程可以写为下面的一般形式：

$$u_t + f(u,\theta)_x = 0, \tag{7}$$

其中, u 和已知函数 $\theta(x)$ 可以为向量;$\theta(x)$ 一般包括某些具有明确物理意义的参变量. 方程右端也可包含源项或高阶项. 在交通流问题中,$\theta(x)$ 一般包含随路段变化的车道数和畅行速度. 流通量间断问题还广泛涉及多孔介质渗流、水波、弹性波、地层和海洋声波、地震波和随机介质等很多应用领域[4]. 类似的接触间断大量存在于不同材料和介质的接触面、燃烧波阵面和涡流等界面,其数值模拟是当今计算流体专家最关心的热点和难点问题之一.

如果将 $\theta(x)$ 视为求解变量,并增加方程:$\theta_t = 0$, 那么这一方程与式(7)构成标准的双曲守恒形式,而且易知总有特征速度 $\lambda = 0$, 形成线性退化的特征场,在 Riemann 问题中对应特征速度为 0 的接触间断 $x = 0$. 如果式(7) 为 $m \times m$ 方程组,且对给定的 θ 有 m 个特征值,那么加上上述的接触间断,模型方程至少应有 $m + 1$ 个波. 对大部分的应用问题,模型方程的波数确实正好为 $m + 1$,此时方程为严格双曲. 然而在交通流问题中,上述的接触间断往往可以使第一特征场形成两个波,使总的波数为 $m + 2$, 此时模型方程为非严格双曲. 交通流瓶颈效应是典型的由第一特征场形成两个波的例子,其原因是瓶颈上游流量大于下游的最大允许流量,使得特征线只能由瓶颈内部发出,一束向后传播,与上游特征线形成向后的反射激波或稀疏波,另一束则退化为垂线 $x = 0$, 与下游的特征线形成向前传播的稀疏波(参见文献[24-25]).

可以将经典格式直接应用于上述增广的标准双曲守恒形式方程组,从而得到模型方程稳定和收敛的数值解[25]. 关于这些经典格式,可参考文献[26-28]. 然而,这种求解方法会产生较大的数值粘性,过度抹平接触间断和激波间断;如果 $\theta(x)$ 为向量且所包含的物理参数很多,将增加不少的计算量. 如果将流通量 $f(u,\theta)$ 视为在网格边界的连续函数,从而将经典格式直接应用于式(7), 则很难得到稳定的数值解[24,29]. 以标量方程为例,式(7)中 θ 的变化使特征线不再是直线;尤其是,在特征线上 $f(u,\theta)$ 为不变量,而 u 不再是不变量. 这些本质差别显然使经典格式中关于迎风的考虑不再合理. 基于文献[24]对特征线理论的研究,文献[29]提出了求解标量方程(7)的所谓 δ- 映射算法. 这一算法后来被推广用于构造高阶格式[30]和求解方程组[31-32]. 下面主要结合文献[24,32]的讨论,简述这一算法.

事实上,δ-映射算法通过与任一经典算法结合,形成新的混合算法. 简言之,若将求解标准守恒律方程的经典算法记为 $u_i^{(n+1)}=C(u_{i-l+1}^{(n)},\cdots,u_{i+r}^{(n)})$,则混合算法可记为 $u_i^{(n+1)}=C(\delta u_{i-1}^{(n)},\cdots,\delta u_{i+r}^{(n)})$. 事实上,经典算法可以被解释为是将解函数值 $u_j^{(n)}(j=i-l,\cdots,i+r)$ 通过特征线传输到网格边界 $x=x_{i+1/2}$,再根据传输方向和所走的距离考虑其迎风影响,从而构造数值流通量 $\hat{f}(u_{i-l}^{(n)},\cdots,u_{i+r}^{(n)})$. 而对流通量间断问题,在特征线上解变量 u 不再是不变量. 此时不变量为 $f(u,\theta(x))$,当传播到 $x=x_{i+1/2}$ 时解变量变为 $\delta u_j^{(n)}$,所以数值流通量中的 $u_j^{(n)}$ 应由 $\delta u_j^{(n)}$ 代替. 其中 $\delta u_j^{(n)}$ 由下面条件唯一确定,即满足:$f(u_j^{(n)},\theta_j)=f(\delta u_j^{(n)},\theta_{i+1/2})$,且对任一特征速度有 $\lambda_k(u_j^{(n)},\theta_j)\lambda_k(\delta u_j^{(n)},\theta_{i+1/2})\geqslant 0$. 对特征线不能到达 $x=x_{i+1/2}$ 的情形,虽然在 $x=x_{i+1/2}$ 上不可能获得流量值 $f(u_j^{(n)},\theta_j)$,但仍可使其尽可能最大. 同时,以上关于特征速度的不等式仍成立. 综合起来,可以将 δ-映射简述为,找出 $\delta u_j^{(n)}$,使 $\gamma\leqslant 1$ 在约束条件

$$\gamma f(u_j^{(n)},\theta_j)=f(\delta u_j^{(n)},\theta_{i+1/2}),\ \lambda_k(u_j^{(n)},\theta_j)\lambda_k(\delta u_j^{(n)},\theta_{i+1/2})\geqslant 0 \tag{8}$$

下达到最大. 详细讨论见参考文献[32],其中 δ-映射与 WENO(weighted essentially non-oscillatory)五阶重构结合的混合格式被用于求解流通量间断的多车种 LWR 模型. δ-映射算法还被用于求解弹性波方程[31]和其它类似的应用问题.

对多数应用问题,例如弹性波方程[31],因任一特征速度恒为正或恒为负,式(8)中关于特征速度的不等式自然成立. 而交通流模型中的第一特征速度可以变号,方程具有较复杂的非严格双曲性质,在式(8)的不等式中需考虑 $k=1$ 的情形,此时不等式可以被视为一个附加的熵条件[32]. 关于流通量间断问题数值计算方法讨论的有很多,例如可参考文献[33-35].

2　推 广 问 题

2.1　概述

路段交通流模型一般采用开放或周期边界条件. 开放边界条件假定了在模拟时间内没有波到达边界;周期边界条件实际是假定路段为一个圆环,且由于车辆总数保持不变,能够反映与路段平均密度有关的一些宏观性质. 然而,这两类都不是真实的物理边界,相应的数值模拟结果很难反映真实的城市交通状况. 事实上,城市交通呈网络分布,由路段和交叉口(节点)组成. 任一路段由两个节点连接,或者一端被连接到一个节点,而另一端延伸至无穷. 所以,城市交通流真实的边界主要是交叉口. 这意味着,只考虑某一单独的路段是得不到边界条件的;必须考虑在交叉口处所有相关路段汇合和分流的耦合效应,才能得到在这一交叉口处关于所有相关路段车流的边界条件. 可以将问题简化为求解模型在交叉口处的 Riemann 问题,这至少足以满足数值求解的需要,也是进一步讨论 Cauchy 问题的基础.

Holden 和 Risebro[36]首先将 LWR 模型推广到网络,通过推广弱解与熵解的概念,建立了网络 LWR 模型的基本框架. 他们同时证明了 Riemann 问题解的存在唯一性,进而运用 Front Tracking 方法证明了 Cauchy 问题解的存在性. 然而,在其 Riemann 问题中所给出的熵条件没有考虑上游车流在交叉口处合理的路径选择——驾驶员似乎没有目的地,其路径选择仅仅是为了使某一与交叉口流量有关的熵函数达到最大. Coclite 等[37]合理假定了求解 Riemann 问题的耦合条件,其理论被普遍认可,我们将结合交通流需求-供给理论的观点[38],在 2.3 节作介绍. 相关的工作还可参考文献[39-41].

行人流与车辆交通流有很多相似之处,无论其建模方法还是模型分类也多由车辆交通流问题推广而来。较早的工作可参考 Helbing 的综述文章[42],其中关于行人流问题的描述类似车辆跟弛模型,是通过微观连续方法建立每一行人运动的微分方程,从而得到描述行人之间耦合作用的常微分方程组模型。微观离散模型主要包括元胞自动机模型和格子气模型,可参考文献[43]。近年来,这两类模型得到了较多的推广和应用。而行人流宏观模型的推广工作并不见多,主要包括 LWR 模型的推广[44-46]。此外,文献[47]对应用 Euler 方程描述行人流进行了一般性讨论。我们结合最近的工作,将在 2.3 节提出应用 Navier-Stokes(N-S)方程描述行人流问题的基本设想和框架。

2.2 交通流网络 LWR 模型的 Riemann 问题

假设交叉口连接 n 个来流(上游)路段:$I_1,I_2,\cdots,I_n$,和 m 个去流(下游)路段:$I_{n+1},I_{n+2},\cdots,I_{n+m}$。在每一路段,车流由 LWR 模型描述:

$$\partial_t\rho_k+\partial_x f_k(\rho_k)=0,\qquad k=1,2,\cdots,n+m,$$

其中,流量 $f_k(\rho_k)$ 为凹函数,满足:当 $\rho_k\neq\sigma_k$ 时,$f_k'(\rho_k)(\rho_k-\sigma_k)<0$;当 $\rho_k=\sigma_k$ 时,$f_k'(\rho_k)=0$。显然,当 $\rho_k=\sigma_k$ 时,$f_k(\rho_k)$ 取最大值。Riemann 问题的初始值如下:

$$\rho_k(x,0)=\rho_{k,0},\qquad k=1,2,\cdots,n+m,$$

其中 $\rho_{k,0}$ 为常数。所求 Riemann 解为在交叉口处各路段的车流密度,也假设为常数,并记为 $\{\hat\rho_k\}_{k=1}^{n+m}$。Riemann 解 $\hat\rho_k$ 或 $\hat f_k\equiv f_k(\hat\rho_k)$ 是设计数值格式的基本要素。

首先,合理假设在交叉口处的上游车流有确定的目的地。从而,由动态交通均衡理论,可假定这些车流有明确的下游路径选择,并定义下列关于 $\hat f_k$ 的流量分配矩阵:

$$\boldsymbol{A}=(\alpha_{j,i})_{m\times n},\qquad 0<\alpha_{j,i}<1,\ i=1,2,\cdots,n,\ j=n+1,n+2,\cdots,n+m,\tag{9}$$

其中常数 $\alpha_{j,i}$ 为交叉口处来自上游路段 I_i 的车流量中选择进入下游路段 I_j 的比例。显然有

$$\sum_{j=n+1}^{n+m}\alpha_{j,i}=1,\qquad i=1,2,\cdots,n.\tag{10}$$

而且在交叉口处的所有入流量可以表示为

$$\hat f_j=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{j,i}\hat f_i,\qquad j=n+1,n+2,\cdots,n+m.\tag{11}$$

为求解 Riemann 问题,首先确定 $\hat f_k$,再根据流量-密度关系式 $\hat f_k=f_k(\hat\rho_k)$ 以及在路段 I_k 的合理间断分解确定 $\hat\rho_k$。为求解 $\hat f_k$,首先给出由式(10)和(11)所隐含的、在交叉口处的质量守恒关系:

$$\sum_{i=1}^{n}\hat f_i=\sum_{j=n+1}^{n+m}\hat f_j.\tag{12}$$

并讨论下述关于流量的需求-供给问题。对上游路段,定义与 Riemann 初值有关的需求函数:

$$d_i(\rho_{i,0})=\begin{cases}f_i(\rho_{i,0}), & \rho_{i,0}\in[0,\sigma_i],\\ f_i(\sigma_i), & \rho_{i,0}\in[\sigma_i,\rho_{\mathrm{jam}}],\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n.\tag{13}$$

对下游路段,定义与 Riemann 初值有关的供给函数:

$$s_j(\rho_{j,0})=\begin{cases}f_j(\sigma_j), & \rho_{j,0}\in[0,\sigma_j],\\ f_j(\rho_{j,0}), & \rho_{j,0}\in[\sigma_j,\rho_{\mathrm{jam}}],\end{cases}\quad j=n+1,n+2,\cdots,n+m.\tag{14}$$

在由式(12)给出的守恒约束条件下,交叉口处的流量 $\hat f_k$ 需满足:(i) 总出流量(式(12)左端

项)或总入流量(式(12)右端项)达到最大; (ii) 出流量 $\hat{f}_i$ 不能超过需求 d_i; (iii) 入流量 $\hat{f}_j$ 不能超过供给 s_j. 这等价于求解下面的优化问题:

$$\text{找到}\{\hat{f}_i\}_{i=1}^{n}, \text{使}\sum_{i=1}^{n}\hat{f}_i\text{最大}, \qquad \text{其中}(\hat{f}_1,\cdots,\hat{f}_n)\in S^n, \tag{15}$$

$$S^n = \{(\hat{f}_1,\cdots,\hat{f}_n): 0\leqslant \hat{f}_i \leqslant d_i, i=1,2,\cdots,n;$$

$$0\leqslant \sum\nolimits_{i=1}^{n}\alpha_{j,i}\hat{f}_i \leqslant s_j,\ j=n+1,n+2,\cdots,n+m.\} \subset R^n.$$

入流量 $\{\hat{f}_j\}_{j=n+1}^{n+m}$ 则由式(11) 确定. 对 $n<m$ 的情形,可以证明上述优化问题解的唯一性. 例如,当 $n=1$ 和 $m=2$ 时,可以立即得到

$$\hat{f}_1 = \min(d_1, s_2/\alpha, s_3/(1-\alpha)),\ \hat{f}_2 = \alpha\hat{f}_1,\ \hat{f}_3 = (1-\alpha)\hat{f}_1,$$

其中,应用式(10)、式(9)中的矩阵元素被重记为 $a_{1,2}=\alpha$, $a_{1,3}=1-\alpha$.

对 $n\geqslant m$ 的情形,优化问题(15) 可以存在多解,需附加条件才可使解唯一. 以 $n=2$ 和 $m=1$ 的情形为例,此时式(9) 中流量分配的矩阵系数 $\alpha_{3,1}=\alpha_{3,2}=1$, 而式(10) 为恒等式. 换言之,两上游路段所有车辆都只能进入唯一的下游路段. 当上游的需求能够满足,即 $d_1+d_2\leqslant s_3$ 时,解显然是唯一的. 而当上游的需求不能满足,即 $d_1+d_2>s_3$ 时,解为 $(\hat{f}_1,\hat{f}_2)$ 平面内介于 $\hat{f}_1=d_1$ 和 $\hat{f}_2=d_2$ 的线段: $\hat{f}_1+\hat{f}_2=s_3$. 这时需要引入所谓优先系数 β 和 $1-\beta$, 分别描述上游路段 I_1 和 I_2 进入下游路段的优先级别. 做直线 $(1-\beta)\hat{f}_1=\beta\hat{f}_2$. 此直线若与以上线段相交,选择交点为唯一的解;若与其延长线相交,则选择线段上与这一交点最近的点为唯一的解. 不难解出

$$\hat{f}_1 = q\min(d_1+d_2,s_3),\ \hat{f}_2 = (1-q)\min(d_1+d_2,s_3),\ \hat{f}_3 = \min(d_1+d_2,s_3),$$

其中配流系数为

$$q=\begin{cases} d_1/(d_1+d_2), & d_1+d_2\leqslant s_3,\\ \beta, & d_1+d_2>s_3,\ \beta s_3\leqslant d_1,\ (1-\beta)s_3\leqslant d_2,\\ d_1/s_3, & d_1+d_2>s_3,\ \beta s_3>d_1,\\ (s_3-d_2)/s_3, & d_1+d_2>s_3,\ (1-\beta)s_3>d_2.\end{cases}$$

解出 $\hat{f}_k$ 后,由流量-密度关系 $\hat{f}_k=f_k(\hat{\rho}_k)$ 一般可得到 $\hat{\rho}_k$ 的两个值. 然而, 只要规定由交叉口发出的特征线在上游路段非正、在下游路段非负,则由函数 $f_k(\rho_k)$ 的凹性,即可唯一确定 $\hat{\rho}_k$.

2.3 行人流问题的 Navier-Stokes-Eikon 模型

与一般流体力学问题类似,行人流存在由密度梯度变化引起加速或减速的压力效应;与车辆交通流类似,行人流更存在按某一期盼速度运动的自驱动效应. 然而,行人流一般为二维问题,行人可根据欲到达的目标和周围的密度分布等因素选择运动方向,而不像在车辆交通流(一般视为一维问题)中那样有确定向前的运动方向. 所以,至少在行人的自驱动效应中要考虑行人的方向选择. 这是行人流模型与一般流体力学模型和车辆交通流模型的主要不同之处,也导致对行人流模型的数值计算和理论分析更加复杂和困难. 如果再考虑行人流粘性,设粘性系数为常值 μ, 我们可以将行人流流体力学模型的一般方程写为

$$\begin{cases}\rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y = 0,\\ u_t + uu_x + vu_y + \dfrac{p(\rho)_x}{\rho} = \dfrac{U_e(\rho)\nu_1 - u}{\tau} + \dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\\ v_t + uv_x + vv_y + \dfrac{p(\rho)_y}{\rho} = \dfrac{U_e(\rho)\nu_2 - v}{\tau} + \dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right),\end{cases} \tag{16}$$

其中,已知函数 $U_e(\rho)$ 和单位向量 $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$ 为行人期盼速度和方向. 行人期盼速度在 x 和 y 方向的分量分别为 $U_e(\rho)\nu_1$ 和 $U_e(\rho)\nu_2$, 两动量方程中的松弛项则表示行人流具有按某一期盼速度和方向运动的自驱动效应. 若移除弛豫项,模型为 N-S 方程. 若再消除粘性项 ($\mu = 0$), 模型为 Euler 方程. 所以,模型方程组(16)是双曲型的,且不难得到其“动量”守恒方程. 对 N-S 方程,尤其是 Euler 方程部分,可以直接应用经典的双曲守恒律格式进行逼近. 在确定运动方向 $\boldsymbol{\nu}$ 后,弛豫项中的解变量也可应用相应格式中的插值函数值代替.

我们考虑与推广的行人流 LWR 模型相类似的行人方向选择规则[44-46,48-49]. 区别是,在 LWR 模型中得到的是行人实际的运动方向,而我们得到的只是行人的期盼方向. 假设最简单的情况,即流场中所有行人只有一个目的地,设定为某一封闭区域内具有一定宽度的出口 Γ_0. 那么行人期盼方向 $\boldsymbol{\nu}$ 并非简单地直指出口. 事实上,行人将根据所处位置的密度 ρ 的大小,并根据瞬时的期盼速度 $U_e(\rho)$ 和欲到达目标选择方向,达到某种宏观和微观的最佳效应. 此外,同样根据所处位置的密度大小(或其它环境因素),行人有避开不舒适场景的本能反应. 为此,定义费用分布函数:

$$C(x,y,t) = \frac{1}{U_e(\rho)} + g(x,y,t),$$

上式第 1 项为主项,是时间费用分布. 第 2 项为负舒适度分布,一般可取为 $\rho(x,y,t)$ 的单调递增函数,即舒适度随密度增大而减小. 此外,再由下面的 Eikon 方程定义势函数 $\Phi(x,y,t)$:

$$|\nabla\Phi(x,y,t)| = C(x,y,t),\ \Phi(x_0,y_0,t) = 0,\qquad (x_0,y_0) \in \Gamma_0. \tag{17}$$

为简化讨论,下面不烦将点 (x_0,y_0) 完全等同于出口 Γ_0. 对固定时刻 t, 考虑费用分布函数 $C(x,y,t)$ 沿任一由(x,y) 到出口 Γ_0 的曲线 l 的积分. 积分元

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \sqrt{\mathrm{d}\bar{x}^2 + \mathrm{d}\bar{y}^2} \geqslant \mathrm{d}\bar{x}\cos\theta + \mathrm{d}\bar{y}\sin\theta = (\cos\theta, \sin\theta)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}.$$

其中向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{s} = (\mathrm{d}\bar{x}, \mathrm{d}\bar{y})$. 如果将 θ 取为 Φ 的负梯度方向,使 $-\nabla\Phi = |\nabla\Phi|(\cos\theta, \sin\theta)$, 则有

$$\int_l C(\bar{x},\bar{y},t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} \geqslant \int_l C(\bar{x},\bar{y},t)\left(-\frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} =$$

$$-\int_l \nabla\Phi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = -(\Phi(x_0,y_0,t) - \Phi(x,y,t)) = \Phi(x,y,t),$$

以上不等式等号成立,当且仅当曲线 l 的切向 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 与 $-\nabla\Phi$ 同向平行. 此时将$(\bar{x},\bar{y})$ 换为(x,y), 可得到 l 的曲线簇: $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \Phi_y/\Phi_x$, $y(x_0) = y_0$, 我们称其为(定常态时的)流线. 定义等势线为互不相交的曲线簇: $\Phi(x,y,t) = A(t)$, 切方向为 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -\Phi_x/\Phi_y$. 显然,流线为与等势线正交的曲线簇,由此可知流线((x_0,y_0) 除外) 互不相交. 这意味着,在 t 时刻,在流场中任给一点((x_0,y_0) 除外)可确定唯一的一条等势线和流线. 由以上讨论,我们概括得到下面几点.

1) 由任一点 (x,y) 到出口(x_0,y_0) 的所有曲线中,$C(x,y,t)$ 沿过该点的流线积分最小,等于这点处势函数的值.

2）如果将解设定为定常状态，即假设所有变量与 t 无关，则在 (x,y) 的行人将沿过这点的流线运动。因与 Φ 的负梯度方向相切，沿这一轨迹运动总能使行人的"势"减少最快，或者说行人会以最快速度到达下一条等势线，同时使其到达目标的总费用最小。

3）即使解是非定常的，也可合理假定行人会选择与经过所在位置的流线相切的运动目标，以期达到使其势函数减少最快、局部费用最小的瞬时效果。

综上所述，为确定行人运动的期盼方向，可先通过 Eikon 方程(17)确定 Φ，再取为 $\boldsymbol{\nu}=-\nabla\Phi/|\Phi|$。数值求解时，对每一固定的时间步，可采用 Fast-Sweeping 方法求解方程(17)，确定行人期盼方向后，再应用守恒律方程的差分或有限体格式求解方程组(16)。在墙壁和障碍处，除类似于一般流体问题中设置固壁边界条件外，还应合理假定势函数为无穷大，从而使行人能与这些边界保持距离。

3 结　　语

通过本文的综述，可以看出交通流包含十分复杂的非线性波现象，是守恒律和力学专家应该关注的问题。尤其是，将道路交通流方程推广到交通网络和包含弛豫效应的行人流问题，都对已有理论提出了挑战，相关的研究将进一步丰富和发展经典的非线性波理论和数值求解理论。此外，关于交通流问题的研究无疑具有十分广泛的应用前景。

参考文献(References)：

[1] Lighthill M J, Whitham G B. On kinematic waves—Ⅱ: a theory of traffic flow on long crowded roads[J]. *Proc Roy Soc A*, 1955, **229**(1178): 317-345.

[2] Richards P I. Shockwaves on the highway[J]. *Operations Research*, 1956, **4**(1): 42-51.

[3] Whitham G B. *Linear and Nonlinear Waves*[M]. New York: John Wiley and Sons, 1974.

[4] LeVeque R J. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

[5] Payne H J. Models of freeway traffic and control[C]//Bekey A G. *Mathematical Models of Public Systems*. La Jola: Simulation Council Proc, 1971, **1**: 51-61.

[6] Kühne R D. Macroscopic freeway model for dense traffic-stop-start waves and incident detection[C]//Volmuller J, Hamerslag R. *Proc 9th Int Symp on Transp and Traffic Theory*. Utrecht: VNU Science Press, 1984: 21-42.

[7] Kerner B S, Konháuser P. Structure and parameters of clusters in traffic flow[J]. *Phys Rev E*, 1994, **50**(1): 54-83.

[8] Aw A, Rascle M. Resurrection of "second order" models of traffic flow? [J]. *SIAM J Appl Math*, 2000, **60**(3): 916-938.

[9] Rascle M. An improved macroscopic model of traffic flow: derivation and links with the Lighthill-Whitham model[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2002, **35**(5/6): 581-590.

[10] Kerner B S, Klenov S L, Konhauser P. Asymptotic theory of traffic jams[J]. *Phys Rev E*, 1997, **56**(4): 4199-4216.

[11] Kurtze D A, Hong D C. Traffic jams, granular flow, and soliton selection[J]. *Phys Rev E*, 1995, **52**(1): 218-221.

[12] Zhang P, Wong S C, Dai S Q. Characteristic parameters of a wide cluster in a higher-order traffic flow model[J]. *Chinese Physics Letters*, 2006, **23**(2): 516-519.

[13] Zhang P, Wong S C. Essence of conservation forms in the traveling wave solutions of higher-order traffic flow models[J]. *Physical Review E*, 2006, **74**(2): 026109.

[14] Xu R Y, Zhang P, Dai S Q, Wong S C. Admissibility of a wide cluster solution in anisotropic higher-order traffic flow models[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2007, **68**(2): 562-573.

[15] Greenberg J M. Congestion redux[J]. *SIAM J Appl Math*, 2004, **64**(4): 1175-1185.

[16] Siebel F, Mauser W. On the fundamental diagram of traffic flow[J]. *SIAM J Appl Math*, 2006, **66**(4): 1150-1162.

[17] Zhang P, Wong S C, Dai S Q. A conserved higher-order anisotropic traffic flow model: description of equilibrium and non-equilibrium flows[J]. *Transportation Research Part B*, 2009, **43**(5): 562-574.

[18] Zhang P, Liu R X, Wong S C. High-resolution numerical approximation of traffic flow problems with variable lanes and free flow velocities[J]. *Physical Review E*, 2005, **71**(5): 056704.

[19] Wong G C K, Wong S C. A multi-class traffic flow model—an extension of LWR model with heterogeneous drivers[J]. *Transportation Research Part A*, 2002, **36**(9): 827-841.

[20] Zhang P, Liu R X, Wong S C, Dai S Q. Hyperbolicity and kinematic waves of a class of multi-population partial differential equations[J]. *Eur J Appl Math*, 2006, **17**: 171-200.

[21] Zhang M, Shu C W, Wong G C K, Wong S C. A weighted essentially non-oscillatory numerical scheme for a multi-class Lighthill-Whitham-Richards traffic flow model[J]. *J of Computational Phys*, 2003, **191**(2): 639-659.

[22] Bürger R, Kozakevicius A. Adaptive multi-resolution WENO schemes for multi-species kinematic flow models[J]. *Journal of Computational Physics*, 2003, **224**(2): 1190-1222.

[23] Donat R, Mulet P. Characteristic-based schemes for multi-class Lighthill-Whitham-Richards traffic models[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2008, **37**(3): 233-250.

[24] Zhang P, Liu R X. Hyperbolic conservation laws with space-dependent flux—Ⅰ: characteristics theory and Riemann problem[J]. *J Comput Appl Math*, 2003, **156**(1): 1-21.

[25] Zhang P, Wong S C, Shu C W. A weighted essentially non-oscillatory numerical scheme for a multi-class traffic flow model on an inhomogeneous highway[J]. *J Comput Phys*, 2006, **212**(2): 739-756.

[26] Toro E F. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*[M]. Berlin: Springer, 1999.

[27] Cockburn B, Shu C W. Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2001, **16**(3): 173-261.

[28] Shu C W. High order weighted essentially non-oscillatory schemes for convection dominated problems[J]. *SIAM Review*, 2009, **51**(1): 82-126.

[29] Zhang P, Liu R X. Hyperbolic conservation laws with space-dependent flux—Ⅱ: general study on numerical fluxes[J]. *J Comput Appl Math*, 2005, **176**(1): 105-129.

[30] Zhang P, Liu R X. Generalization of Runge-Kutta discontinuous Galerkin method to LWR traffic flow model with inhomogeneous road conditions[J]. *Numer Meth Partial Diff Equ*, 2005,

21(1): 80-88.

[31] Xu Z L, Zhang P, Liu R X. δ- mapping algorithm coupled with WENO reconstruction for nonlinear elasticity in heterogeneous media[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2007, **57**(1): 103-116.

[32] Zhang P, Wong S C, Xu Z L. A hybrid scheme for solving a multi-class traffic flow model with complex wave breaking[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2008, **197**(45/48): 3816-3827.

[33] Karlsen K H, Risebro N H, Towers J D. Upwind difference approximations for degenerate parabolic convection-diffusion equations with a discontinuous coefficient[J]. *IMA J Numer Anal*, 2002, **22**(4): 623-664.

[34] Herty M, Seaid M, Singh A K. A domain decomposition method for conservation laws with discontinuous flux function[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2007, **57**(4): 361-373.

[35] Bürger R, Gracía A, Karlsen K H, Towers J D. A family of numerical schemes for kinematic flows with discontinuous flux[J]. *Journal of Engineering Mathematics*, 2008, **60**(3/4): 387-425.

[36] Holden H, Risebro N H. A mathematical model of traffic flow on a network of unidirectional roads[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 1995, **26**(4): 999-1017.

[37] Coclite G M, Garavello M, Piccoli B. Traffic flow on a road network[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2005, **36**(6): 1862-1886.

[38] Lebacque J P. The Godunov scheme and what it means for first order traffic flow models [C]//Lesort J B. *Proceedings of the Thirteenth International Symposium on Transportation and Traffic Theory*. Lyon: France, 1996.

[39] Daganzo C F. The cell transmission model—part Ⅱ: network traffic[J]. *Transportation Research Part B*, 1995, **29**(2): 79-93.

[40] Piccoli B, Garavello M. *Traffic Flow on Networks*[M]. AIMS on Applied Math, 2006.

[41] Bretti G, Natalini R, Piccoli B. Numerical approximations of a traffic flow model on networks [J]. *Networks and Heterogeneous Media*, 2006, **1**(1): 57-84.

[42] Helbing D. Traffic and related self-driven many-particle systems[J]. *Rev Mod Phys*, 2001, **73**(4): 1067-1141.

[43] Burstedde C, Klauck K, Schadschneider A, Zittartz J. Simulation of pedestrian dynamics using a two-dimensional cellular automaton[J]. *Physica A*, 2001, **295**(3/4): 507-520.

[44] Hughes R L. A continuum theory for the flow of pedestrians[J]. *Transport Res Part B*, 2002, **36**(6): 507-536.

[45] Xia Y, Wong S C, Zhang M, Shu C W, Lam W H K. An effcient discontinuous Galerkin method on triangular meshes for a pedestrian flow model[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2008, **76**(3): 337-350.

[46] Huang L, Wong S C, Zhang M, Shu C W, Lam W H K. Revisiting Hughes' dynamic continuum model for pedestrian flow and the development of an effcient solution algorithm[J]. *Transportation Research Part B*, 2009, **43**(1): 127-141.

[47] Bellomo N, Dogbé C. On the modelling crowd dynamics from scaling to hyperbolic macroscopic models[J]. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2008, **18**(1): 1317-1345.

[48] Xiong T, Zhang P, Wong S C, Shu C W, Zhang M. A macroscopic approach to the lane formation phenomenon in pedestrian counterflow[J]. *Chinese Physical Letters*, 2011, **28**(10): 108901.

[49] Zhang P, Jian X X, Wong S C, Choi K. Potential field cellular automata model for pedestrian flow[J]. *Physical Review E*, 2012, **85**(2): 021119.

Fluid Dynamics Traffic Flow Models and Their Related Non-Linear Waves

ZHANG Peng[1,2], WANG Zhuo[1,2], S. C. Wong[3]

(1. *Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics*, *Shanghai University*, *Shanghai* 200072, *P. R. China*;

2. *Shanghai Key Laboratory of Mechanics in Energy Engineering*, *Shanghai* 200072, *P. R. China*;

3. *Department of Civil Engineering*, *The University of Hong Kong*, *Pokfulam Road*, *Hong Kong SAR*, *P. R. China*)

Abstract: Fluid dynamics methods were used in modeling traffic flow problems, which demonstrated many interesting non-linear propagation phenomena. It was summarized that the propagation was related to traffic pressures and self-driven forces, which generated shock and rarefaction waves in the LWR model, stop-and-go waves in the higher-order model, overtaking waves (shock or rarefaction waves) in the multi-class LWR model, and a contact discontinuity in problems with discontinuous fluxes. The Riemann problem arising from extension of the LWR model to traffic networks was also introduced in detail. And a system based on the Navier-Stokes equations was proposed to model the 2-dimensional pedestrian flow problem with application of the Eikon equation for determination of a pedestrian's desired motion direction.

Key words: conservation laws; shock; stop-and-go wave; overtaking wave; contact discontinuity