

Hamilton 体系下层合板弱粘接模型的应用*

但 敏

(中国民航大学 航空工程学院,天津 300300)

摘要: 层合板的层间粘接模型对整个层合板的结构有重要影响.运用 Hamilton 正则方程对层合板层间的不同类型的粘接模型进行了分析.结合弹性材料修正后的 Hellinger-Reissner 变分原理和插值函数,构建了直角坐标系下 8 节点层合板的每一层的线性方程;考虑到脱层板的连接界面处应力和位移的关系,改进了现有的常用弱粘接模型,建立不同粘接模型的控制方程;最后通过求解整个板的控制方程,得到层合板的层间应力和位移.数值算例验证了该模型的正确性,并研究了层间界面为线性和非线性时的问题.结果表明:应用改进后的弱粘接模型,能够更好地模拟层合板的弱界面失效过程.

关键词: 层合板; 层间模型; Hamilton 正则方程; 半解析法; 8 节点

中图分类号: O343 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.01.008

引 言

复合材料在飞机上应用的部位和用量的多少,现已成为衡量飞机结构先进性的重要指标之一.在当代航空工业中,设计和制造最为广泛的一类复合材料就有层合复合材料^[1].对于层合复合材料类的层合板结构,在传统的层合板模型分析中,将层与层之间的粘接都假设成为满足应力和位移连续的理想性能^[2-6].但在实际工程中,一方面,复合材料层合板的层间由于局部制造的缺陷和长期服役,会使结构上有微裂纹和间隙等缺陷;另一方面,由于复合材料的不同铺层角度和铺层材料,导致相邻层间的力学性能有所不同.

为了研究层板结构的层间状态,文献[7-8]首先将 Pagano 中的弹性解^[2]推广到需要考虑层间具有弱界面的情形,将层合板的界面简化成弹簧模型. Chen 等^[9-11]在利用状态空间法,对复合材料的弱粘接问题上进行了深入的研究,将层间以线性弹簧模型进行模拟粘接层的力学性能; Geun 等^[12]在 Chen 的基础上,研究了不同厚宽比的层合板在弱界面下的应力情况; Iannucci 等^[13]利用层间弹簧模型,研究层合板脱层情况.然而这些弹簧模型中弹簧的长度和等效刚度定义方法并不是基于界面层的几何特征和材料特性,而完全是由研究者凭计算经验给定,它导致在进行脱层模拟时,若弹簧的刚度系数太大则会导致计算不稳定,甚至失败;若刚度系数太小则不能保证脱层处两铺层的正确接触^[9-12,14].

根据材料力学中的各类强度理论可知:复合材料层间弱界面的变化并不是从一有载荷就

* 收稿日期: 2012-07-01; 修订日期: 2012-12-09

作者简介: 但敏(1983—),男,湖北大悟人,讲师,硕士(Tel: +86-22-24092415; E-mail: danmincauc@163.com).

发生,必须满足某种最大破坏强度理论才能发生脱层。为了改进层间传递弹簧模型, Achenbach 等^[15]和 Levy^[16]在纤维增强复合材料中提出了常响应界面模型和渐进适应分离模型。此后,大量文献研究了这两类层间模型^[17-18]。但是这些研究主要停留在纤维增强复合材料,鲜有文献将其引入层合板结构中进行研究。

由于 Hamilton 半解析法^[19-22]在板厚度方向未引入任何假定,且保证了各层间界面处应力和位移的连续性,该方法具有不受层合板厚度和层数的限制,未知量少和精度高的优点。Qing 等^[23-26]利用平面 4 节点有限元做了大量工作,认为可以将该方法拓展到二次单元的有限元中^[27]。

在 Qing 等的工作基础上,结合 Hamilton 体系中 8 节点插值函数的优点,对弱粘接模型的接触面为线性和非线性分别进行了研究。首先推导了 8 节点的复合材料层合板的混合控制方程;然后利用层间位移和应力关系,建立了弱粘接的控制方程和求解方程;最后分别对建立的柔性界面模型、常响应界面模型和渐进适应分离模型进行研究,利用非线性弹簧单元对现有线性弹簧进行改进。

1 Hamilton 正则方程的 8 节点等参元列式

对于绝大多数工程材料,在直角坐标系下,材料单元体的本构关系为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha u \\ \beta v \\ \gamma w \\ \gamma v + \beta w \\ \alpha w + \gamma u \\ \beta u + \alpha v \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

其中, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$ 为应力分量; u, v, w 为沿 x, y, z 方向的位移分量; $\alpha = \partial/\partial x, \beta = \partial/\partial y, \gamma = \partial/\partial z$ 是微分运算符; $C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{16}, C_{22}, C_{23}, C_{26}, C_{33}, C_{36}, C_{44}, C_{45}, C_{55}, C_{66}$ 是弹性材料的刚度系数; $C_{ij}(i, j = 1, 2, \dots, 6)$ 与工程弹性参数的转变关系可见文献[1]。

对于板中的每一薄层,参见文献[20, 23-26],对于各向同性、正交异性或各向异性弹性板,均以 z 坐标模拟为时间 t ,利用修正后的 Hellinger-Reissner 变分原理可将板的总势能表示为

$$\delta \Pi = \delta \iiint_V (\mathbf{P}^T \mathbf{Q}_{,z} - H) dV + \delta \oint_{S_A} \boldsymbol{\lambda}_1^T \mathbf{B}_{\bar{p}q} - \boldsymbol{\lambda}_0^T \mathbf{B}_{\bar{p}q} dS, \quad (2)$$

其中, H 是 Hamilton 函数; $\mathbf{P} = [\tau_{xz} \quad \tau_{yz} \quad \sigma_z]^T$, $\mathbf{Q} = [u \quad v \quad w]^T$, $S_A = S_\sigma + S_u + S_m$ 为混合边界条件, $\boldsymbol{\lambda}_1 = [\lambda_x - 1 \quad \lambda_y - 1 \quad \lambda_z - 1]^T$ 和 $\boldsymbol{\lambda}_0 = [\lambda_x \quad \lambda_y \quad \lambda_z]^T$ 是特意引入的特征系数, $\lambda_i (i = x, y, z)$ 的值为 1 和 0,以此来表示边界状态的特征(例如,在 x 方向为应力边界条件,则 $\lambda_x = 1$,若是位移边界条件,则 $\lambda_x = 0, \lambda_y, \lambda_z$ 的取值依次类推),引入特征系数后,上式即能处理单一的边界条件问题,又能处理混合边界条件问题; $\mathbf{B}_{\bar{p}q} = [p_x(u - \bar{u}) \quad p_y(v - \bar{v}) \quad p_z(w - \bar{w})]^T$, $p_i (i = x, y, z)$ 是边界面 3 个坐标轴方向上的应力分量; \bar{u}, \bar{v} 和 \bar{w} 是边界面 3 个坐标轴方向上给定的位移分量; $\mathbf{B}_{\bar{p}q} = [\bar{p}_x u \quad \bar{p}_y v \quad \bar{p}_z w]^T$, $\bar{p}_i (i = x, y, z)$ 是边界面 3 个坐标轴方向上给定的应力分量。其值可以通过

$$\begin{cases} p_x = n_x \sigma_x + n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz} = \bar{p}_x, \\ p_y = n_x \tau_{xy} + n_y \sigma_y + n_z \tau_{yz} = \bar{p}_y, \\ p_z = n_x \tau_{xz} + n_y \tau_{yz} + n_z \sigma_z = \bar{p}_z, \end{cases} \quad (3)$$

其中, n_x, n_y, n_z 分别为边界外法线的方向余弦。

值得注意的是板的侧面位移边界条件有

$$u = \bar{u}, v = \bar{v}, w = \bar{w}. \quad (4)$$

利用高阶单元具有比低阶线性单元更高的收敛率,8 节点有限元比 4 节点有限元具有更快的收敛率,本文引入 8 节点形函数^[27],对每一薄层进行网格划分,见图 1。

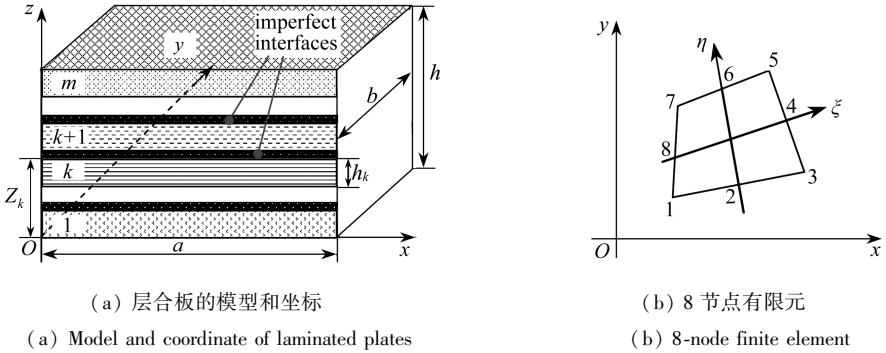


图 1 层合板 8 节点等参元

Fig. 1 Laminated plates with 8-node isoparametric element

$$N_i(\xi, \eta) = \begin{cases} (1 - \xi^2)(1 + \eta_i \eta)/2, & i = 2, 6, \\ (1 + \xi_i \xi)(1 - \eta^2)/2, & i = 4, 8, \\ (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(\xi_i \xi + \eta_i \eta - 1)/4, & i = 1, 3, 5, 7. \end{cases} \quad (5)$$

整体坐标 x 和 y 与局部坐标 ξ 和 η 有如下的转换关系:

$$\begin{cases} x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 + N_5 x_5 + N_6 x_6 + N_7 x_7 + N_8 x_8, \\ y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 + N_5 y_5 + N_6 y_6 + N_7 y_7 + N_8 y_8, \end{cases} \quad (6)$$

即可得图 1 中某一个网格的形函数矩阵:

$$N_{\text{all}} = \begin{bmatrix} \bar{N}(x, y) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{N}(x, y) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{N}(x, y) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

式中

$$\bar{N}(x, y) = [N_1(\xi, \eta) \quad N_2(\xi, \eta) \quad N_3(\xi, \eta) \quad N_4(\xi, \eta) \\ N_5(\xi, \eta) \quad N_6(\xi, \eta) \quad N_7(\xi, \eta) \quad N_8(\xi, \eta)].$$

设混合状态 Hamiltonian 等参元的场函数为

$$\begin{cases} u(x, y, z) = N_{\text{all}} \cdot \mathbf{U}_{\text{all}}^T(z), \\ v(x, y, z) = N_{\text{all}} \cdot \mathbf{V}_{\text{all}}^T(z), \\ w(x, y, z) = N_{\text{all}} \cdot \mathbf{W}_{\text{all}}^T(z), \end{cases} \quad (8a)$$

$$\begin{cases} \tau_{xz}(x, y, z) = \mathbf{N}_{\text{all}} \cdot \boldsymbol{\tau}_{xz, \text{all}}^T(z), \\ \tau_{yz}(x, y, z) = \mathbf{N}_{\text{all}} \cdot \boldsymbol{\tau}_{yz, \text{all}}^T(z), \\ \sigma_z(x, y, z) = \mathbf{N}_{\text{all}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{z, \text{all}}^T(z), \end{cases} \quad (8b)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{\text{all}}(z) &= [u_1(z) \quad \cdots \quad u_8(z)], \quad \mathbf{V}_{\text{all}}(z) = [v_1(z) \quad \cdots \quad v_8(z)], \\ \mathbf{W}_{\text{all}}(z) &= [w_1(z) \quad \cdots \quad w_8(z)], \quad \boldsymbol{\tau}_{xz, \text{all}}(r) = [\tau_{xz1}(z) \quad \cdots \quad \tau_{xz8}(z)], \\ \boldsymbol{\tau}_{yz, \text{all}}(r) &= [\tau_{yz1}(z) \quad \cdots \quad \tau_{yz8}(z)], \quad \boldsymbol{\sigma}_{z, \text{all}}(r) = [\sigma_{z1}(z) \quad \cdots \quad \sigma_{z8}(z)]. \end{aligned}$$

根据式(5)和式(6),可将 \mathbf{P} 和 \mathbf{Q} 写成矩阵形式为

$$\mathbf{P} = \mathbf{N}\mathbf{P}_e, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{N}\mathbf{Q}_e, \quad (9)$$

式(9)中下标 e 表示某一薄层中的编号为 e 的一个网格,在处理完边界后整合到式(2)中.然后对式(2)进行变分并分步积分,即可得下列方程:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_e \\ \mathbf{Q}_e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{F} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_e \\ \mathbf{Q}_e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Xi} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (10)$$

式(10)中矩阵 $\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{F}, \mathbf{D}$ 和 $\boldsymbol{\Xi}$ 的详细表达见文献[19-23].

将该薄层中的所有网格进行拼装并求逆,即可得到单层板的控制方程

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{V}^{(k)}(z) = \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{V}^{(k)}(z) + \mathbf{G}^{(k)}. \quad (11)$$

由常数系数线性微分方程理论可知,式(10)的标准解为

$$\mathbf{V}^{(k)}(z) = \exp(\mathbf{K}^{(k)} z) \mathbf{V}^{(k)}(0) + \int_0^z \exp(\mathbf{K}^{(k)}(z - \tau)) \mathbf{G}^{(k)}(\tau) d\tau. \quad (12)$$

令 $\mathbf{G}^{(k)}(\tau) = \mathbf{0}$ 忽略自身重量,式(12)可为

$$\mathbf{V}_{\text{top}}^{(k)} = \mathbf{T}^{(k)} \mathbf{V}_{\text{bot}}^{(k)}, \quad (13)$$

其中, $\mathbf{V}_{\text{top}}^{(k)}$ 和 $\mathbf{V}_{\text{bot}}^{(k)}$ 分别表示第 k 层板的上下状态矢量; $\mathbf{T}^{(k)} = \exp(\mathbf{K}_k z)$ 是该层的传递矩阵.

同理类推,可得层合板中其它每层的控制方程.例如第 $(k+1)$ 层有

$$\mathbf{V}_{\text{top}}^{(k+1)} = \mathbf{T}^{(k+1)} \mathbf{V}_{\text{bot}}^{(k+1)}. \quad (14)$$

2 弱粘接的界面分离模型

2.1 界面分离关系为线性

对于层与层之间的界面,不考虑层间粘接层的厚度,无论是粘接完好还是发生脱层,其力学性能关系有

$$\begin{cases} \tau_{xz}^{(k+1)\text{bot}} = \tau_{xz}^{(k)\text{top}} = \mathbf{K}_{xz}^{(k)} [u^{(k+1)\text{bot}} - u^{(k)\text{top}}], \\ \tau_{yz}^{(k+1)\text{bot}} = \tau_{yz}^{(k)\text{top}} = \mathbf{K}_{yz}^{(k)} [v^{(k+1)\text{bot}} - v^{(k)\text{top}}], \\ \sigma_z^{(k+1)\text{bot}} = \sigma_z^{(k)\text{top}} = \mathbf{K}_{zz}^{(k)} [w^{(k+1)\text{bot}} - w^{(k)\text{top}}], \end{cases} \quad (15)$$

其中, $\mathbf{K}_j^{(k)} (i, j = x, y, z)$ 为第 k 层和第 $k+1$ 层之间的分离系数,该值的取得与界面应力有关.

将式(15)简写为

$$\Delta U_i = R_i \sigma_i, \quad (16)$$

其中, $\Delta U_i (i = x, y, z)$ 为3个方向上位移的变化量; $\sigma_i (i = x, y, z)$ 为3个方向上的应力分量;将式(16)中的分离系数 R_i 定义不同的系数就可以得到不同的界面模型.

2.1.1 柔性界面分离模型

文献[9-10,12]将界面分离系数 R_i 取常数,认为界面位移和界面应力之间的力学性能属于线性关系.这样的界面模型始终是柔性的,称为柔性界面(flexible interface, FI)分离模型.

$$\Delta U_i = R_n \sigma_i, \quad (17)$$

当界面分离系数 $R_n \rightarrow 0$ ($n = x, y, z$) 时表示界面是理想粘接的;而当 $R_n \rightarrow \infty$ ($n = x, y, z$) 时则表示界面完全脱层.

该方法在理论上是可行的,但在实际求解过程中却很难控制 R_n 的取值.因为层合板在外载荷一定的情况下, σ_i ($i = x, y, z$) 也是定值.如果将 R_n ($n = x, y, z$) 取较大的定值(例如取 $R_n > 10^2$) 时,就会发生脱层畸形、层间相互嵌入现象.故在使用该方法的时候,文献[9-10,12]将 R_n 的取值 $0 \leq R_n \leq 3$ 的定值来减小计算误差.

2.1.2 常响应界面分离模型

为了更好的模拟层间界面的脱粘过程,引入界面弱粘接极限强度概念,对 FI 分离模型进行改进:采用微元增量形式的分离函数,将式(16)改写为

$$d\Delta U_i = dR_i \cdot \sigma_i + R_i \cdot d\sigma_i. \quad (18)$$

文献[15]将式(18)简化成式(19)

$$\begin{cases} d\Delta U_i = 0 & (\sigma_i < \sigma_{DM}), \\ d\Delta U_i = R_i \cdot d\sigma_i & (\sigma_i \geq \sigma_{DM}), \end{cases} \quad (19)$$

其中, σ_{DM} 为界面的屈服极限.当界面的应力低于 σ_{DM} 时,表示层间界面粘接完好;大于 σ_{DM} 时界面发生脱层,并通过取不同的定值 R_i 来模拟脱层过程.通常称该模型为常响应界面(constant compliant interface, CCI)分离模型^[15].

2.2 界面分离关系为非线性

常响应界面分离模型在使用过程中也有局限.当层间界面一旦发生了微小分离,由于 R_i 是人为设定的常数,计算出的 U_i 就有较大的随机性.实验也证明^[28]:在受外载荷情况下,复合材料的应力-应变曲线存在明显的3个阶段:第1阶段由于界面粘结完好,应力-应变关系表现为线弹性;第2阶段,由于界面发生脱粘,应力-应变曲线起始于转折点,界面发生脱粘并分离,基体发生了塑性变形;第3阶段,界面进一步分离乃至失效,基体发生明显的塑性变形.

对于实际的层合板,考虑层间粘接层的厚度,文献[16]采用一种新的界面分离模型

$$\begin{cases} d\Delta U_i = 0 & (\sigma_i < \sigma_{DM}), \\ \sigma_i = \sigma_{DM} \cdot \frac{\Delta U_i}{\rho} \cdot \exp\left(1 - \frac{\Delta U_i}{\rho}\right) & (d\Delta U_i \neq 0), \end{cases} \quad (20)$$

其中, σ_{DM} 为界面的屈服极限; ρ 为复合材料相邻层间的初始粘接层厚度(实际粘接厚度一般小于 0.05 mm).该模型不仅能模拟层间粘接完好,还能模拟脱层过程中,层间界面分离系数随着界面应力、位移状态的变化而变化.因此,该模型被称为渐进适应界面(evolution compliant interface, ECI)分离模型.

结合式(15),本文将渐进适应界面分离模型改进为

$$\begin{cases} \tau_{xz}^{(k+1)bot} = \tau_{xz}^{(k)top} = \tau_{xz}^{DM} \frac{(u^{(k+1)bot} - u^{(k)top})}{\rho} \exp\left(1 - \frac{(u^{(k+1)bot} - u^{(k)top})}{\rho}\right), \\ \tau_{yz}^{(k+1)bot} = \tau_{yz}^{(k)top} = \tau_{yz}^{DM} \frac{(v^{(k+1)bot} - v^{(k)top})}{\rho} \exp\left(1 - \frac{(v^{(k+1)bot} - v^{(k)top})}{\rho}\right), \\ \sigma_z^{(k+1)bot} = \sigma_z^{(k)top} = \sigma_z^{DM} \frac{(w^{(k+1)bot} - w^{(k)top})}{\rho} \exp\left(1 - \frac{(w^{(k+1)bot} - w^{(k)top})}{\rho}\right). \end{cases} \quad (21)$$

3 含弱粘接层合板模型的求解

3.1 整个板的控制方程

由于式(12)和式(13)已经求出 $\mathbf{P} = [\tau_{xz} \quad \tau_{yz} \quad \sigma_z]^T$, $\mathbf{Q} = [u \quad v \quad w]^T$, 由式(1)即可求出剩下 3 个应力变量为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}\alpha + C_{16}\beta & C_{16}\alpha + C_{12}\beta & C_{13}\gamma \\ C_{12}\alpha + C_{26}\beta & C_{26}\alpha + C_{22}\beta & C_{23}\gamma \\ C_{16}\alpha + C_{66}\beta & C_{66}\alpha + C_{26}\beta & C_{36}\gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}. \quad (22)$$

在运用 8 节点有限元作为插值函数求 σ_x, σ_y 和 σ_z 时, 对于 k 层中的某一个网格, 结合式(7)和式(8a)可将式(22)写为

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\sigma}_x \\ \tilde{\sigma}_y \\ \tilde{\tau}_{xy} \end{Bmatrix}_{(i)} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ C_4 & C_5 & C_6 \\ C_7 & C_8 & C_9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \end{Bmatrix}_{(i)}, \quad (23)$$

式中 $\{ \}_{(i)}$ 表示第 k 层板中第 e 个网格的第 i 个节点的应力关系。

将式(15)改写成矩阵形式:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz}^{(k+1)\text{bot}} \\ \tau_{yz}^{(k+1)\text{bot}} \\ \sigma_z^{(k+1)\text{bot}} \\ u^{(k+1)\text{bot}} \\ v^{(k+1)\text{bot}} \\ w^{(k+1)\text{bot}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ R_{xz}^{(k)} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & R_{yz}^{(k)} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & R_{zz}^{(k)} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{xz}^{(k)\text{top}} \\ \tau_{yz}^{(k)\text{top}} \\ \sigma_z^{(k)\text{top}} \\ u^{(k)\text{top}} \\ v^{(k)\text{top}} \\ w^{(k)\text{top}} \end{Bmatrix}, \quad (24)$$

其中, 对于界面分离关系为线性时, R_i 为常数; 对于界面分离关系为非线性时

$$R_i = \rho \exp(\Delta U / \rho - 1) / \sigma_{DM}.$$

式(24)可以写成

$$\mathbf{V}_{\text{bot}}^{(k+1)} = \mathbf{M}^{(k)} \mathbf{V}_{\text{top}}^{(k)}. \quad (25)$$

由式(13)和式(14)可得

$$\mathbf{V}_{\text{top}}^{(k+1)} = \mathbf{T}^{(k+1)} \mathbf{V}_{\text{bot}}^{(k+1)} = \mathbf{T}^{(k+1)} \mathbf{M}^{(k)} \mathbf{T}^{(k)} \mathbf{V}_{\text{bot}}^{(k)}. \quad (26)$$

对于共 m 层的层合板, 同理可以得到

$$\mathbf{V}_{\text{top}}^{(m)} = \left(\prod_{k=1}^m \mathbf{T}^{(k+1)} \mathbf{M}^{(k)} \mathbf{T}^{(k)} \right) \mathbf{V}_{\text{bot}}^{(1)}. \quad (27)$$

这样即可得到整个板的控制方程. 对于理想粘接情况, $\mathbf{M}^{(k)}$ 均是单位矩阵; 出现界面脱层, 根据分离系数 R_i 定义不同的系数就可以得到不同的界面模型。

对于板的侧面边界已经通过式(3)和式(4)得到控制, 而整个板的上下表面一般有力的边界条件, 根据式(27)即可求得整个板的上下表面的位移。

3.2 层间应力和位移的求解

对于 FI 分离模型和 CCI 分离模型, 底层应力已知, 位移已通过式(27)求得, 根据式(16)即可求解出第 1 层上表面的应力和位移:

$$\mathbf{V}_{\text{top}}^{(1)} = \mathbf{T}^{(1)} \mathbf{V}_{\text{bot}}^{(1)}, \quad (28)$$

同理可得, 第 k 层的上表面应力和位移有

$$\mathbf{V}_{\text{top}}^{(k)} = \left(\prod_{i=1}^k \mathbf{T}^{(i+1)} \mathbf{M}^{(i)} \mathbf{T}^{(i)} \right) \mathbf{V}_{\text{bot}}^{(1)}. \quad (29)$$

即通过式(29)可以求出每一层的 $\mathbf{P} = [\tau_{xz} \quad \tau_{yz} \quad \sigma_z]^T$ 和 $\mathbf{Q} = [u \quad v \quad w]^T$, 代回式(23)即可求解出剩下 3 个应力分量.

对于 ECI 分离模型, 通过控制步长 $\Delta U_i (i = x, y, z)$, 就可计算出层间应力. 最终的计算精度依赖于不同的 $\Delta U_i (i = x, y, z)$ 取值.

4 算例和分析

为了避免出现层间不合理的相互嵌入现象, 本文的算例分析只考虑层合板上下表面受法线向外的力作用.

4.1 柔性界面分析结果

算例 1 对于文献[28]中采用的四边简支的层合板, 其外形结构如图 1 所示, 由简支情况可得: 在 $x = (0, a)$ 边界上有 $\bar{v} = \bar{w} = 0$; 在 $y = (0, b)$ 边界上有 $\bar{u} = \bar{w} = 0$; 板的上表面加载应力 $q = q_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$, 其中 x, y 为节点的坐标; 下表面自由; 层合板的材料参数为

$$E_y = 7 \text{ GPa}, (E_x, E_y, E_z) = (25, 1, 1) E_y, \\ (G_{yz}, G_{xz}, G_{xy}) = (0.2, 0.5, 0.5) E_y, (\nu_{yz}, \nu_{xz}, \nu_{xy}) = (0.25, 0.25, 0.25);$$

该 4 层层合板材料铺层角度为 $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$.

为了更好的和文献[9, 28]对比, 在计算中令 $R_{zz}^{(k)} = 0$, 即相邻两层之间仅允许有界面内的滑移; $R_{xz}^{(k)} = R_{yz}^{(k)} = R$; 板的外形 $a = b$. 对比计算后的结果如表 1 所示.

表 1 四边简支层合板静力计算结果

Table 1 Static results of simply supported square laminated plates

a/h	R	\tilde{w}	$\tilde{\sigma}_x$	$\tilde{\sigma}_y$	$\tilde{\tau}_{xy}$	$\tilde{\tau}_{xz}$	$\tilde{\tau}_{yz}$
4	0	-1.934 06	-0.719 80	-0.664 04	-0.044 04	-0.227 54	-0.300 40
		[-1.936 72]	[-0.720 26]	[-0.662 55]	[-0.045 81]	[-0.219 33]	[-0.291 52]
	0.2	-2.108 79	-0.778 143	-0.695 46	-0.049 12	-0.220 98	-0.274 54
		[-2.211 71]	[-0.785 85]	[-0.707 19]	[-0.049 88]	[-0.210 51]	[-0.263 91]
	0.4	-2.371 49	-0.805 65	-0.701 20	-0.049 62	-0.213 44	-0.258 13
		[-2.458 15]	[-0.843 89]	[-0.751 08]	[-0.053 40]	[-0.201 79]	[-0.242 74]
0.6	-2.506 30	-0.843 50	-0.771 24	-0.051 68	-0.201 07	-0.237 11	
	[-2.681 13]	[-0.896 07]	[-0.793 26]	[-0.056 48]	[-0.193 48]	[-0.225 68]	
10	0	-0.734 08	-0.559 16	-0.394 25	-0.026 91	-0.309 46	-0.204 57
		[-0.736 98]	[-0.558 61]	[-0.409 60]	[-0.027 64]	[-0.301 37]	[-0.195 95]
	0.2	-0.786 49	-0.577 43	-0.411 465	-0.027 30	-0.300 60	-0.201 08
		[-0.796 88]	[-0.569 83]	[-0.420 79]	[-0.028 85]	[-0.295 92]	[-0.198 76]
	0.4	-0.831 67	-0.579 41	-0.415 746	-0.029 646	-0.305 57	-0.204 44
		[-0.854 92]	[-0.581 06]	[-0.439 48]	[-0.030 01]	[-0.291 04]	[-0.195 82]
0.6	-0.885 38	-0.582 34	-0.430 54	-0.028 946	-0.297 48	-0.217 10	
	[-0.912 03]	[-0.592 24]	[-0.457 16]	[-0.031 12]	[-0.286 06]	[-0.202 51]	

注 表 1 中方括号的结果来自于文献[9], 通过对比可以发现: 本文解和文献的解的误差范围在 -8.50% 至 $+7.21\%$ 之间. 由此可得本数据模式是可以接受的. 误差主要是因为文献[9]采用的是精确解, 而此处采用的是半解析解, 八节点有限元的引入导致层合板在厚度方向变硬, 从而导致出现相关误差.

计算无量纲的位移和应力为

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= 100E_y h^3 w(a/2, b/2, h/2)/(q_0 a^4), \quad \tilde{\sigma}_x = h^2 \sigma_x(a/2, b/2, h)/(q_0 a^2), \\ \tilde{\sigma}_y &= h^2 \sigma_y(a/2, b/2, 3h/4)/(q_0 a^2), \quad \tilde{\tau}_{xy} = h^2 \tau_{xy}(0, 0, 0)/(q_0 a^2), \\ \tilde{\tau}_{xz} &= h \tau_{xz}(0, b/2, h/2)/(q_0 a), \quad \tilde{\tau}_{yz} = h \tau_{yz}(a/2, 0, h/2)/(q_0 a). \end{aligned}$$

4.2 常响应界面分离模型计算结果

算例2 对于某四边简支的层合材料 $a = b = 10h$, 其材料参数取为文献[21]中的材料. 已知该材料的几何尺寸模型如图1所示. 该层合板共分4层 $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h/4$, 每一层又分成厚度相同的4子层, 材料的铺层角度为 $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, 其中铺层为 0° 材料的刚度系数比为

$$\begin{aligned} C_{12}/C_{11} &= 0.246\ 269, \quad C_{13}/C_{11} = 0.083\ 171\ 5, \quad C_{22}/C_{11} = 0.543\ 103, \\ C_{23}/C_{11} &= 0.115\ 017, \quad C_{33}/C_{11} = 0.530\ 172, \quad C_{44}/C_{11} = 0.266\ 810, \\ C_{55}/C_{11} &= 0.159\ 914, \quad C_{66}/C_{11} = 0.262\ 931, \quad C_{16} = C_{26} = C_{36} = C_{45} = 0. \end{aligned}$$

板的外载荷和边界情况同算例1; 为了模拟脱层过程, 在计算中令 $R_{zz}^{(k)} = R; R_{xz}^{(k)} = R_{yz}^{(k)} = 0$, 即相邻两层之间不允许有界面内的滑移; 由于

$$C_{11} = E_x(1 - \mu_{yz}\mu_{zy})/(1 - \mu_{xy}\mu_{yx} - \mu_{yz}\mu_{zy} - \mu_{zx}\mu_{xz} - 2\mu_{xy}\mu_{yz}\mu_{zx}),$$

在计算过程中, 弱界面处于相邻两层的连接处, 界面的屈服极限 σ_{DM} 做 $\tilde{\sigma} = \sigma_{DM}/C_{11}$ 无量纲化处理.

首先, 本算例先确定分离界面的应力-应变关系, 如图2所示. 参考柔性界面分离模型, 根据情况取不同的界面分离系数来控制弱粘接层间应力和位移; 控制 $\tilde{\sigma}$ 的取值, 来模拟不同的屈服极限, 当 $\tilde{\sigma} = 0$ 时, 常响应界面分离模型退化成柔性界面分离模型.

从图3中可以看出: 对于弱粘接的层合板, 在层合板的边界处(图3(a)、图3(c)、图3(d)所示), 弱粘接模型和理想模型相差并不是很明显, 这主要是控制住了 x 和 y 方向的弱粘接系数, z 方向上的弱粘接对 x 和 y 方向只有较小的影响; 同样的结果可见层合板的角点(图3(b)所示); 但是对于层合板的中心点(图3(e)、图3(f)所示), 应力和位移都有较大的影响, 尤其是层合板的层间出现了位移的不连续性, 这表明层间已经出现了微小的裂纹, 是需要重点关注的部位.

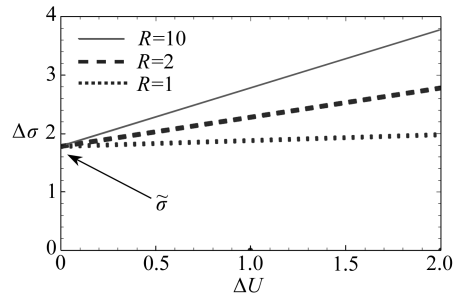
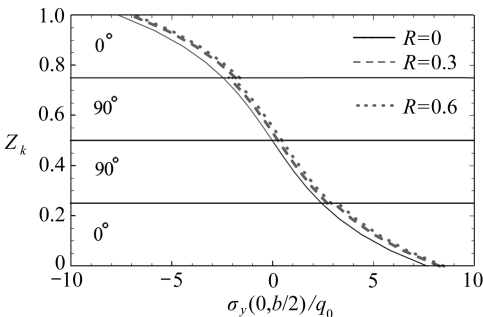
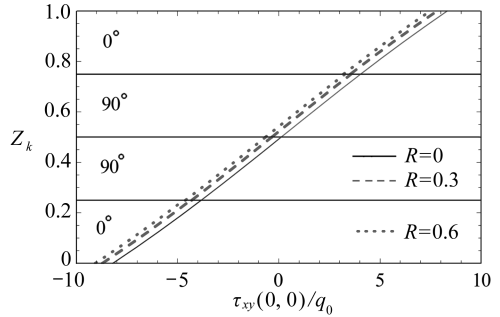


图2 界面分离关系为线性时应力应变关系
Fig.2 The stress-displace relationship of linear interfacial debonding



(a) 沿着厚度 Z_k 上的 $\sigma_y(0, b/2)/q_0$
(a) $\sigma_y(0, b/2)/q_0$ along the thickness Z_k



(b) 沿着厚度 Z_k 上的 $\tau_{xy}(0, 0)/q_0$
(b) $\tau_{xy}(0, 0)/q_0$ along the thickness Z_k

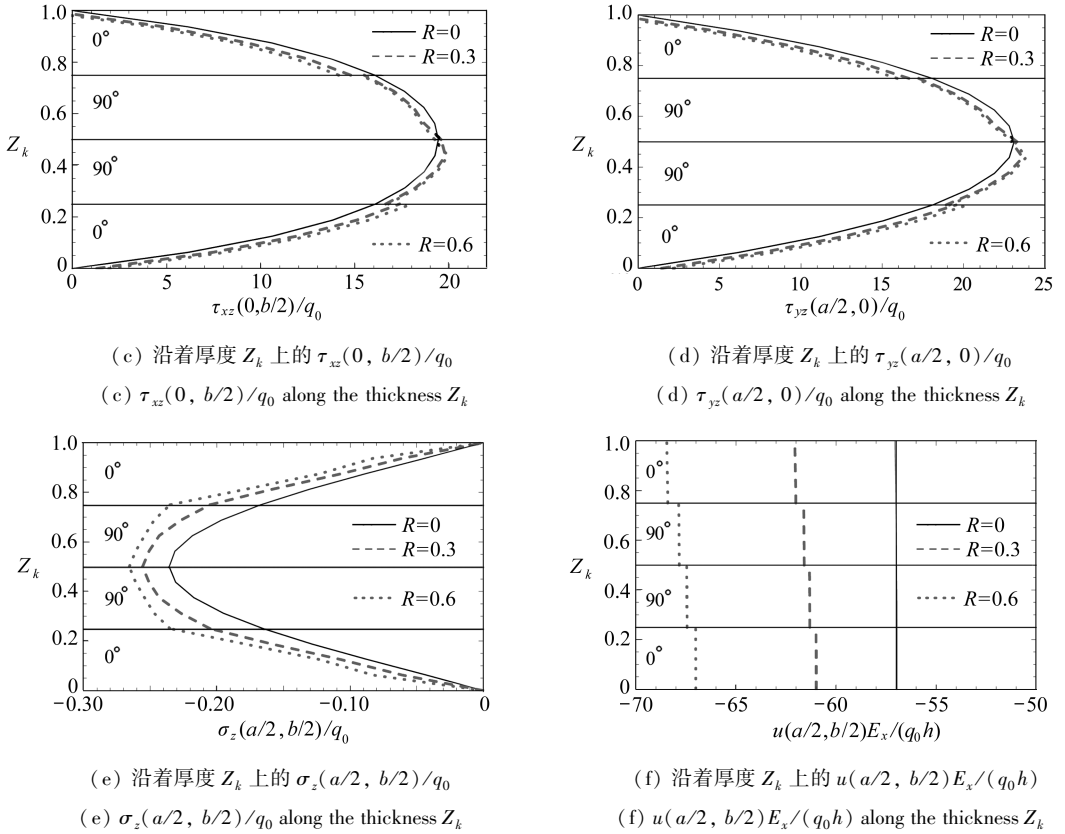


图3 层合板中各点的状态变量分布

Fig.3 Distributions of vibrations along the different position

4.3 渐进适应分离模型计算结果

算例3 对于某四边固支的层合材料 $a = b = 10h$, 其材料参数取为文献[21]中的材料. 已知该材料的几何尺寸模型如图1所示. 该层合板共分6层: $h_1 = h_6 = h/10$, $h_2 = h_3 = h_4 = h_5 = h/5$, 材料的铺层角度为 $[0^\circ/90^\circ]_3$, 材料参数同算例2, 层合板下表面受均布载荷 $q = q_0$, 上表面自由. 其中在第3层和第4层之间引入渐进适应分离模型, 而其余层间粘接完好; 在计算中令 $R_{zz}^{(k)} = R$; $R_{xz}^{(k)} = R_{yz}^{(k)} = 0$. 首先, 确定层间模型的应力-应变关系, 如图4所示.

从图4中可以看出: 渐进适应界面分离模型能够反映出, 在加载过程中, 随着外载荷从0增加 q_0 , 层间位移不断增加, 但层间应力经历了前期持续增加、中期层间载荷达到界面的屈服极限 σ_{DM} 、后期层间出现失效而导致层间应力不断减小最终至0状态.

同时从图4(a)可以看出: 层间粘接厚度主要影响响应曲线峰值的位置和宏观应力卸载的速度. 特征长度的值越大则峰值越晚出现, 应力卸载就越慢. 从图4(b)中可以看出: 层间步长 ΔU_i 也具有该功能, 但是层间步长收敛速度比较缓慢, 较大的步长意味着层间状态变化偏大, 层间变化成大变形状态.

图5中下子板的应力峰值随着界面最大应力 $\tilde{\sigma}$ 的增大而增大, 这表明界面的承载能力随着界面最大应力的增大而增强; 达到峰值后, 由于层间已经发生失效, 外载荷主要由下子板承受, 上子板整体趋于自由; 对于整个层合板来说, 层间有更好的粘接强度意味着整个板拥更好

的力学性能。

图 6 中对于相同的界面特征长度,下子板的宏观响应在曲线后段趋于一致,表明在界面完全失效之后,复合材料的响应主要由下子板的力学性质决定;同时可见:较小的界面特征长度 ρ 收敛速度更快。但是计算过程发现,过小的 ρ 会使得本有限元计算模型无法求解。

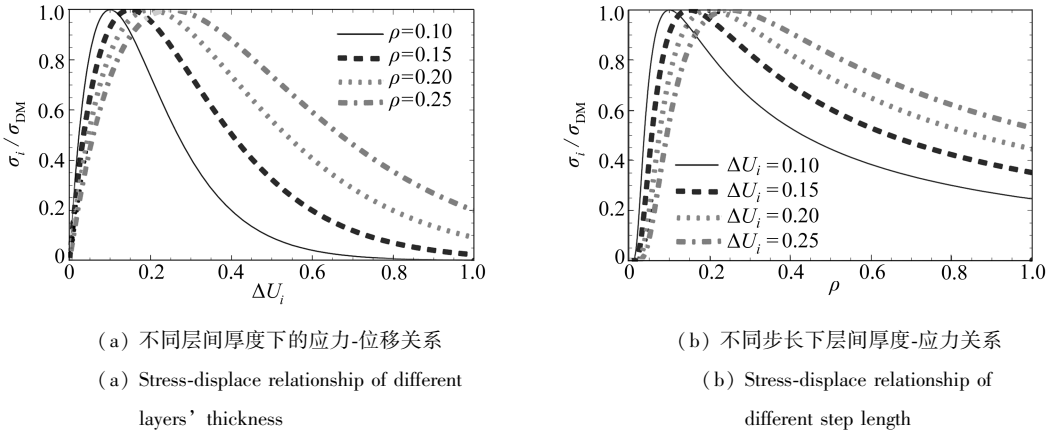


图 4 渐进适应界面分离模型的应力-位移关系

Fig. 4 The stress-displace relationship in ECI

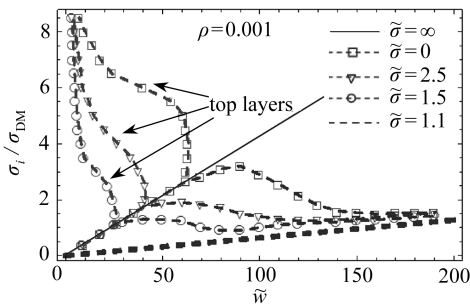


图 5 不同屈服极限下应力-位移关系

Fig. 5 The stress-displace relationship under different $\tilde{\sigma}$

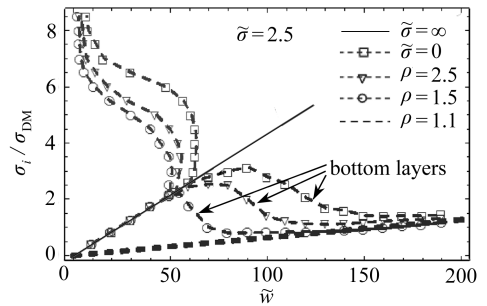


图 6 不同层间厚度下应力-位移关系

Fig. 6 The stress-displace relationship under different ρ

5 结 论

本文利用 8 节点的 Hamilton 正则方程的优势,将不同的层间粘接模型应用到层合板的弱界面中来模拟层合板的失效过程。数值算例验证了 Hamilton 正则方程弱粘接模型的正确性,并将层间界面从线性和非线性两个方面进行了研究。研究结果表明:

- 1) 采用柔性界面模型,在计算过程中最为简单,分析相对容易。但计算的误差大,使用范围有限;
- 2) 采用常响应界面模型,能够在一定范围内优化柔性界面模型。通过对该模型的层间屈服极限进行控制,可以初步得到层合板的失效过程。数值表明:采用该模型时,柔性系数对层合板层间的应力影响要小于对层间位移的影响;
- 3) 采用渐进适应界面模型,能够真实的反映层间失效过程:随着层间的位移不断增加,层

间应力先后出现增加、达到极限和最终卸载 3 个阶段,能较好的模拟层间变化的整个过程。

最后,该类模型在脱层壳及梁上的运用,以及层间失效后的屈曲和后屈曲,是以后研究的一个重点。

致谢 感谢中国民航大学校级科研项目(2012ky07)的资助。

参考文献(References):

- [1] 沈观林, 胡更开. 复合材料力学[M]. 北京:清华大学出版社, 2006. (SHEN Guan-lin, HU Geng-kai. *Mechanics of Composite Materials*[M]. Beijing: Tsinghua Press, 2006. (in Chinese))
- [2] Pagano N J. Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending[J]. *Journal of Composite Materials*, 1969, **3**(3): 398-411.
- [3] Srinivas S, Rao A K. Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1970, **6**(5): 1463-1481.
- [4] Fan J R, Ye J Q. An exact solution for the static and dynamics of laminated thick plate with orthotropic[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1990, **26**(5): 655-662.
- [5] Fan J R, Ye J Q. A series solution of the exact equation for thick orthotropic plate[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1990, **26**(7): 773-778.
- [6] Zou G P, Tang L M. A semi-analytical solution for thermal stress analysis of laminated composite plate in the Hamiltonian system[J]. *Composite Structure*, 1995, **55**(1): 113-118.
- [7] Williams T O, Addessio F L. A general theory for laminated plates with delaminations[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1997, **34**(7): 2003-2024.
- [8] Williams T O. Efficiency and accuracy considerations in a unified plate theory with delamination[J]. *Composite Structures*, 2001, **52**(1): 27-40.
- [9] Chen W Q, Cai J B, Ye G R. Exact solution of cross-ply laminates with bonding interfacial imperfections[J]. *AIAA Journal*, 2003, **41**(11): 2244-2250.
- [10] Chen W Q, Lee K Y. Exact solution of angle-ply piezoelectric laminates in cylindrical bending with interfacial imperfections [J]. *Composite Structures*, 2004, **65**(3/4): 329-337.
- [11] Chen W Q, Cai J B, Ye G R, Wang Y F. Exact three-dimensional solutions of laminated orthotropic piezoelectric rectangular plates featuring inter-laminar bonding imperfections modeled by a general spring layer[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2004, **41**(18/19): 5247-5263.
- [12] Geun W K, Kang Y L. Influence of weak interfaces on buckling of orthotropic rectangular laminates[J]. *Composite Structures*, 2007, **81**(6): 427-431.
- [13] Iannucci L, Willows M L. An energy based damage mechanics approach to modeling impact onto woven composite material—part-1: numerical models[J]. *Composites, Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2006, **37**(1): 2041-2056.
- [14] Elder D J, Rodney S T, Minh Q N, Murray L S. Review of delamination predictive methods for low speed impact of composite laminates[J]. *Composite Structures*, 2004, **66**(2): 677-683.
- [15] Achenbach J D, Zhu H. Effect of interfacial zone on mechanical behavior and failure of fiber-reinforced composites[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1989, **37**(3): 381-393.

- [16] Levy A J. The effective dilatational response of fiber-reinforced composites with nonlinear interface[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1996, **63**(2): 357-364.
- [17] 孙志刚, 宋迎东, 廉英琦. 弱界面粘结对复合材料有效能的影响[J]. 航空动力学报, 2005, **20**(6): 915-919. (SUN Zhi-gang, SONG Ying-dong, LIAN Ying-qi. Composite Mechanical Behavior with Weak Interfacial Bonding[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2005, **20**(6): 915-919. (in Chinese))
- [18] 高希光, 孙志刚, 廉英琦. 弱界面黏结通用单胞模型理论及应用[J]. 航空动力学报, 2009, **24**(8): 1684-1690. (GAO Xi-guang, SUN Zhi-gang, LIAN Yin-qi. Generalized method of cell with weak interfacial bonding[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2009, **24**(8): 1684-1690. (in Chinese))
- [19] 钟万勰. 弹性力学求解新体系[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1995: 1-187. (ZHONG Wan-xie. *A New Systematic Methodology for Theory of Elasticity*[M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1995: 1-187. (in Chinese))
- [20] Zou G P, Tang L M. A semi-analytical solution for thermal stress analysis of laminated composite plate in the Hamiltonian system[J]. *Computer & Structure*, 1995, **55**(1): 113-118.
- [21] 范家让. 强厚叠层板壳的精确理论[M]. 北京: 科学出版社, 1996: 111-385. (FAN Jia-rang. *Exact Theory of Laminated Thick Plates and Shells*[M]. Beijing: Science Press, 1996: 111-385. (in Chinese))
- [22] 钟万勰. 应用力学对偶体系[M]. 北京: 科学出版社, 2002: 22-44. (ZHONG Wan-xie. *Symplectic System of Applied Mechanics*[M]. Beijing: Science Press, 2002: 22-44. (in Chinese))
- [23] Qing G H, Liu Y H, Qiu J J. A semi-analytical method for the free vibration analysis of thick double-shell systems[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2006, **42**(10): 837-845.
- [24] Qing G H, Qiu J J, Liu Y H. A semi-analytical solution for dynamic analysis of plate with piezoelectric patches[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, **43**(6): 1388-1403.
- [25] Qing G H, Wang F X, Liu Y H. State-space approach for energy release rate analysis of delaminated laminates with stiffeners[J]. *AIAA Journal*, 2011, **49**(10): 2123-2129.
- [26] Qing G H, Liu Y H, Li D H. A semi-analytical model for the energy release rate analyses of composite laminates with a delamination[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2011, **47**(9): 1017-1024.
- [27] 但敏, 卿光辉. 脱层板固有频率的有限元方法分析[J]. 动力学与控制学报, 2011, **9**(1): 7-11. (DAN Min, QING Guang-hui. Natural frequencies analysis of delamination planes with finite element method[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2011, **9**(1): 7-11. (in Chinese))
- [28] Majumdar B S, Newaz G M. Inelastic deformation of metal matrix composites: plasticity and damage mechanisms[J]. *Philosophical Magazine A*, 1992, **66**(2): 187-121.
- [29] Lars F, Walter L, Fabrizio V. A generalized higher-order theory for multi-layered, shear-deformable composite plates[J]. *Acta Mechanica*, 2010, **209**(1/2): 85-98.

Application of Composite Laminated Plates With Bonding Imperfection in Hamilton System

DAN Min

(*College of Aeronautical Engineering, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, P. R. China*)

Abstract: The weak interfacial bonding seriously affected the mechanical behavior of laminated plates. Different imperfect bonding models of laminated plates were discussed in Hamilton canonical equation. By combining the modified H-R variational principle for elastic material with the quadratic interpolation functions, the linear formulation of laminated plates with 8-node for Hamilton canonical equation in the Cartesian coordinate was derived. The relationship between stress and displacement on the interface between layers was considered to improve the normal bonding model, and the state equation with delamination situation was established. The stress and displacement were obtained by solving the overall model. Numerical examples showed that the methods presented were correct, and this paper studied the linear and non-linear bonding models of the laminated plate respectively. The last results show that the application of improved models can simulate the process of fail better.

Key words: laminated plates; bonding model; Hamilton canonical equation; semi-analytical solution; 8-nodes