

压电螺型位错与含非理想界面层 圆形夹杂的干涉效应*

方棋洪^{1,2}, 冯 慧^{1,2}, 刘又文^{1,2}

(1. 湖南大学 汽车车身先进设计制造国家重点实验室, 长沙 410082;
2. 湖南大学 机械与运载工程学院, 长沙 410082)

摘要: 研究了位于压电材料基体或夹杂中任意点的压电螺型位错与含非理想界面层圆形夹杂的电弹性干涉问题,运用复变函数方法,获得了复势函数的精确解.由广义 Peach-Koehler 公式,导出了作用在螺型位错上的像力的精确表达式.讨论了不同参数对压电螺型位错的运动和平衡位置的影响规律.研究表明,对某些材料组合,当界面层的内界面是非理想界面且界面的非理想度达到一定值时,在基体中靠近界面处会出现两个位错的平衡位置,此现象未在以往研究(不考虑非理想界面)中观察到.

关键词: 复合材料; 位错; 压电效应; 力学性能

中图分类号: O343.7 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.01.006

引 言

在过去的几十年里,压电材料已经进化成为现代工程材料的一个重要分支,广泛应用于各种现代设备和复合结构中.这种材料的优良性能取决于传统弹性材料中所没有的、独特的力电耦合效应.压电材料中存在着各种缺陷.例如:位错、裂纹、空洞和夹杂,这些缺陷会极大地影响压电设备和结构的性能和强度.了解压电材料中各种缺陷所产生的电场和弹性场,有助于全面理解这些设备中的力电耦合效应.压电材料中位错和夹杂的电弹干涉在力电耦合效应中扮演着重要的角色.此外,位错的解答可以作为求解一般裂纹问题的核心函数,如裂纹变形、裂纹扭结、裂纹和夹杂干涉等问题.因而,这种干涉问题已经引起了大量的关注^[1-10].

在上述的研究^[1-10]中,涉及到压电材料中位错与夹杂的电弹干涉问题,均考虑了理想完好粘结界面,即假设在界面上,应力、位移、法向电位移以及电势均为连续的.然而,完好粘结界面是对实际复杂情况的一种理想化.事实上,这种理想条件忽略了界面损伤的存在,例如:不完美粘结、微裂纹和微孔^[11-12].近来,不少学者已经意识到界面损伤和非理想界面在研究复合材料

* 收稿日期: 2011-11-17; 修订日期: 2012-09-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11172094; 11172095); 教育部新世纪人才基金资助项目(NCET-11-0122); 湖南大学汽车车身先进设计制造国家重点实验室自主课题基金资助项目(61075005; 51075001); 中央高校基础研究基金资助项目(湖南大学)

作者简介: 方棋洪(1977—),男,浙江淳安人,副教授,博士(通讯作者. Fax: +86-731-88822330; E-mail: fangqh1327@tom.com).

物理性能的力学分析中起着重要的作用. 针对这种缺陷, 已经分别在弹性材料^[13-14]和压电材料中^[15-18]提出了非理想界面解析模型. 在此模型中, 应力在非理想界面上用“跳跃界面模型”模拟; 介质弱导电界面则假设界面上法向电位移连续, 而电势不连续, 且电势的跳跃与法向电位移成正比. Wang 和 Sudak^[19]利用此模型研究了压电螺型位错与非理想双材料界面的干涉效应. Jin 和 Fang^[20]研究了压电螺型位错与非理想圆形界面的干涉问题.

在复合材料力学研究中, 三相(夹杂/界面层/基体)模型由于具有重要的理论和实际意义, 引起了很多学者的重视, 已有很多研究成果^[21-24]. 本文主要研究位于压电复合材料中基体或夹杂中任意点的压电螺型位错与含非理想界面层圆形夹杂的干涉问题. 运用复变函数方法, 获得了复势函数的精确解答, 导出了作用在压电螺型位错上的像力表达式. 讨论了非理想界面, 材料电弹失配, 以及界面层厚度对像力的影响规律.

1 问题的一般解答

如图 1 所示, 考虑无限大压电介质包含一个圆形夹杂和环形界面, 其中 R_1 和 R_2 分别是界面层的内径和外径. 假设基体、夹杂和界面层是沿 z 方向极化的横观各向同性介质, xOy 平面为各向同性面, 夹杂在 z 方向无限延伸. 在基体或夹杂的任意点处有一个压电螺型位错, 位错线在 z 方向上无穷, 在其滑移面上, 位移和电势有限跳跃. 分别用 S_1 , S_2 和 S_3 表示夹杂、界面层和基体区域.

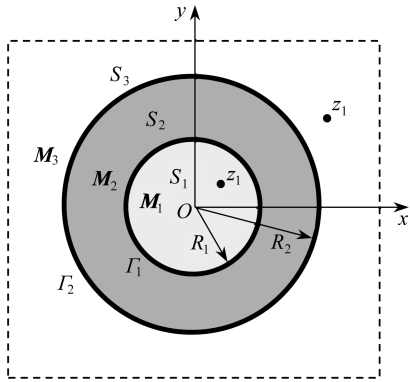


图 1 压电螺型位错与含非理想界面层圆形夹杂的干涉

Fig. 1 Schematic diagram of a piezoelectric screw dislocations interacting with a circular layered inclusion with imperfect interfaces

对于上述反平面问题, 考虑面外位移和面内电场, 在直角坐标中有位移 w , 应变分量 γ_{zx} 和 γ_{zy} , 应力分量 σ_{zx} 和 σ_{zy} , 电势 φ , 电场分量 E_x 和 E_y , 电位移分量 D_x 和 D_y , 并且所有变量均为 x 和 y 的函数.

引入广义位移、应力和应变矢量如下:

$$\begin{cases} \mathbf{U} = \begin{Bmatrix} w \\ \varphi \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_x = \begin{Bmatrix} \sigma_{zx} \\ D_x \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_y = \begin{Bmatrix} \sigma_{zy} \\ D_y \end{Bmatrix}, \\ \mathbf{Y}_x = \begin{Bmatrix} \gamma_{zx} \\ -E_x \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_y = \begin{Bmatrix} \gamma_{zy} \\ -E_y \end{Bmatrix}. \end{cases} \quad (1)$$

参考 Xiao 等^[25], 广义位移、应力和应变矢量可用复变函数矢量 $\mathbf{f}(z) = [f_w(z) \quad f_\varphi(z)]^T$ 表示:

$$\mathbf{U} = \text{Re}[\mathbf{f}(z)], \quad (2)$$

$$\mathbf{Y}_x - i\mathbf{Y}_y = \mathbf{f}'(z), \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_x - i\boldsymbol{\Sigma}_y = \mathbf{M}\mathbf{f}'(z), \quad (4)$$

其中, $\mathbf{f}'(z)$ 示对 z 求导, $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} c_{44} & e_{15} \\ e_{15} & -\varepsilon_{11} \end{bmatrix}$ 为电弹模量矩阵. c_{44} , e_{15} 和 ε_{11} 分别为剪切模量、压电系数和介电系数.

在极坐标下, 式(4)可写为

$$\boldsymbol{\Sigma}_r - i\boldsymbol{\Sigma}_\theta = \mathbf{M}\mathbf{f}'(z)e^{i\theta}, \quad (5)$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma}_r = [\sigma_{zr} \quad D_r]^T$, $\boldsymbol{\Sigma}_\theta = [\sigma_{z\theta} \quad D_\theta]^T$.

作用在任意弧 AB 上的合力和电位移的法向分量为

$$\mathbf{T} = \int_A^B \left(\boldsymbol{\Sigma}_x dy - \boldsymbol{\Sigma}_y dx \right) = \mathbf{M} \operatorname{Im}[\mathbf{f}(z)]_A^B. \quad (6)$$

现在问题简化为,求解边界条件下,夹杂、界面层和基体中的解析复势函数矢量 $\mathbf{f}_1(z)$, $\mathbf{f}_2(z)$ 和 $\mathbf{f}_3(z)$.

对于当前问题,考虑界面层的内外界面 (Γ_1 和 Γ_2) 均为非理想界面. 则边界条件可以表示为

$$\mathbf{T}_2(t) - \mathbf{T}_1(t) = \mathbf{0}, \quad [\mathbf{U}_2(t) - \mathbf{U}_1(t)] = \mathbf{Q} \boldsymbol{\Sigma}_{r_1}(t) = \mathbf{Q} \boldsymbol{\Sigma}_{r_2}(t), \quad |t| = R_1, \quad (7)$$

$$\mathbf{T}_3(t) - \mathbf{T}_2(t) = \mathbf{0}, \quad [\mathbf{U}_3(t) - \mathbf{U}_2(t)] = \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Sigma}_{r_2}(t) = \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Sigma}_{r_3}(t), \quad |t| = R_2, \quad (8)$$

其中,下标 1, 2 和 3 分别表示夹杂、界面层和基体区域;复数 t 表示界面上的点; $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1/K_{\sigma_1} & 0 \\ 0 & 1/K_{e_1} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 1/K_{\sigma_2} & 0 \\ 0 & 1/K_{e_2} \end{bmatrix}$; K_{σ_1} 和 K_{σ_2} 为界面 Γ_1 和 Γ_2 的粘结刚度常数, K_{e_1} 和 K_{e_2}

为电动弹簧常数^[15]. 对于理想界面, K_{σ_1} , K_{σ_2} , K_{e_1} 和 K_{e_2} 趋于无穷.

为了分析的方便,利用 Schwarz 对称原理,在相应区域引入如下解析函数:

$$\mathbf{f}_{3*}(z) = \overline{\mathbf{f}_3(R_2^2/z)}, \quad |z| < R_2, \quad (9)$$

$$\mathbf{f}_{2*}(z) = \overline{\mathbf{f}_2(R_1^2/z)}, \quad R_1^2/R_2 < |z| < R_1, \quad (10)$$

$$\mathbf{f}_{2**}(z) = \overline{\mathbf{f}_2(R_2^2/z)}, \quad R_2 < |z| < R_2^2/R_1, \quad (11)$$

$$\mathbf{f}_{1*}(z) = \overline{\mathbf{f}_1(R_1^2/z)}, \quad |z| > R_1. \quad (12)$$

将式(6)代入式(7)和(8)中的第 1 个方程,得

$$\mathbf{M}_1 [\overline{\mathbf{f}_1(t)} + \mathbf{f}_1(t)] = \mathbf{M}_2 [\overline{\mathbf{f}_2(t)} + \mathbf{f}_2(t)], \quad |t| = R_1, \quad (13)$$

$$\mathbf{M}_2 [\overline{\mathbf{f}_2(t)} + \mathbf{f}_2(t)] = \mathbf{M}_3 [\overline{\mathbf{f}_3(t)} + \mathbf{f}_3(t)], \quad |t| = R_2. \quad (14)$$

注意到,在 $|t| = R_1$ 上 $t\bar{t} = R_1^2$, 且 $|t| = R_2$ 上 $t\bar{t} = R_2^2$, 由方程(9)至(12),方程(13)和(14)可以改写成

$$[\mathbf{M}_1 \mathbf{f}_1(t) + \mathbf{M}_2 \mathbf{f}_{2*}(t) + \mathbf{M}_3 \mathbf{f}_{3*}(t)]^I = [\mathbf{M}_2 \mathbf{f}_2(t) + \mathbf{M}_1 \mathbf{f}_{1*}(t) + \mathbf{M}_3 \mathbf{f}_{3*}(t)]^C, \quad |t| = R_1, \quad (15)$$

$$[\mathbf{M}_2 \mathbf{f}_2(t) + \mathbf{M}_3 \mathbf{f}_{3*}(t) + \mathbf{M}_1 \mathbf{f}_{1*}(t)]^C = [\mathbf{M}_3 \mathbf{f}_3(t) + \mathbf{M}_2 \mathbf{f}_{2**}(t) + \mathbf{M}_1 \mathbf{f}_{1*}(t)]^M, \quad |t| = R_2, \quad (16)$$

其中,上标 I, C 和 M 分别代表函数由夹杂、界面层和基体区域内趋向界面时的值.

由式(17)和(18)可知,

$$\mathbf{M}_1 \mathbf{f}_1(z) + \mathbf{M}_2 \mathbf{f}_{2*}(z) + \mathbf{M}_3 \mathbf{f}_{3*}(z),$$

$$\mathbf{M}_2 \mathbf{f}_2(z) + \mathbf{M}_1 \mathbf{f}_{1*}(z) + \mathbf{M}_3 \mathbf{f}_{3*}(z),$$

$$\mathbf{M}_3 \mathbf{f}_3(z) + \mathbf{M}_2 \mathbf{f}_{2**}(z) + \mathbf{M}_1 \mathbf{f}_{1*}(z)$$

在区域 $R_1^2/R_2 < |z| < R_2^2/R_1$ 内可以直接进行解析延拓(个别奇异点除外),并可以用一个分区全纯函数矢量 $\mathbf{f}_T(z)$ 表示:

$$\mathbf{f}_T(z) = \begin{cases} \mathbf{M}_1 \mathbf{f}_1(z) + \mathbf{M}_2 \mathbf{f}_{2*}(z) + \mathbf{M}_3 \mathbf{f}_{3*}(z), & R_1^2/R_2 < |z| < R_1, \\ \mathbf{M}_2 \mathbf{f}_2(z) + \mathbf{M}_1 \mathbf{f}_{1*}(z) + \mathbf{M}_3 \mathbf{f}_{3*}(z), & R_1 < |z| < R_2, \\ \mathbf{M}_3 \mathbf{f}_3(z) + \mathbf{M}_2 \mathbf{f}_{2**}(z) + \mathbf{M}_1 \mathbf{f}_{1*}(z), & R_2 < |z| < R_2^2/R_1. \end{cases} \quad (17)$$

注意到式(9)至(12),可以定义

$$\mathbf{f}_T(z) = \begin{cases} \mathbf{M}_1 \mathbf{f}_1(z) + \mathbf{M}_3 \mathbf{f}_{3*}(z), & |z| < R_1^2/R_2, \\ \mathbf{M}_3 \mathbf{f}_3(z) + \mathbf{M}_1 \mathbf{f}_{1*}(z), & |z| > R_2^2/R_1, \end{cases} \quad (18)$$

其中, $\mathbf{f}_T(z)$ 是分区全纯函数矢量, 边界条件如下:

$$\mathbf{f}_T^+(t) - \mathbf{f}_T^-(t) = \begin{cases} \mathbf{M}_2 \mathbf{f}_{2*}(t), & |t| = R_1^2/R_2, \\ \mathbf{M}_2 \mathbf{f}_{2**}(t), & |t| = R_2^2/R_1. \end{cases} \quad (19)$$

类似地, 将式(2)和(5)代入式(7)和(8)中的第2个方程, 并考虑式(9)至(12), 位移边界条件可以表达为

$$\begin{aligned} & [\mathbf{f}_1(t) - \mathbf{f}_{2*}(t) - \mathbf{Q}\mathbf{M}_2 \mathbf{f}'_{2*}(t)t/R_1 - \mathbf{f}_{3*}(t)]^I = \\ & [\mathbf{f}_2(t) - \mathbf{f}_{1*}(t) - \mathbf{Q}\mathbf{M}_2 \mathbf{f}'_2(t)t/R_1 - \mathbf{f}_{3*}(t)]^C, \quad |t| = R_1, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & [\mathbf{f}_2(t) - \mathbf{f}_{3*}(t) + \mathbf{Q}\mathbf{M}_2 \mathbf{f}'_2(t)t/R_2 - \mathbf{f}_{1*}(t)]^C = \\ & [\mathbf{f}_3(t) - \mathbf{f}_{2**}(t) + \mathbf{Q}\mathbf{M}_2 \mathbf{f}'_{2**}(t)t/R_2 - \mathbf{f}_{1*}(t)]^M, \quad |t| = R_2. \end{aligned} \quad (21)$$

由式(20)、(21)和式(9)至(12), 可以定义连续解析函数矢量 $\mathbf{f}_U(z)$:

$$\mathbf{f}_U(z) = \begin{cases} \mathbf{f}_1(z) - \mathbf{f}_{3*}(z), & |z| < R_1^2/R_2, \\ \mathbf{f}_1(z) - \mathbf{f}_{2*}(z) - \mathbf{Q}\mathbf{M}_2 \mathbf{f}'_{2*}(z)z/R_1 - \mathbf{f}_{3*}(z), & R_1^2/R_2 < |z| < R_1, \\ \mathbf{f}_2(z) - \mathbf{f}_{1*}(z) - \mathbf{Q}\mathbf{M}_2 \mathbf{f}'_2(z)z/R_1 - \mathbf{f}_{3*}(z), & R_1 < |z| < R_2, \\ \mathbf{f}_3(z) - \mathbf{f}_{2**}(z) + \mathbf{Q}\mathbf{M}_2 \mathbf{f}'_{2**}(z)z/R_2 - \mathbf{f}_{1*}(z), & R_2 < |z| < R_2^2/R_1, \\ \mathbf{f}_3(z) - \mathbf{f}_{1*}(z), & |z| > R_2^2/R_1, \end{cases} \quad (22)$$

其中, $\mathbf{f}_U(z)$ 是分区全纯函数矢量, 且边界条件为

$$\mathbf{f}_U^+(t) - \mathbf{f}_U^-(t) = \begin{cases} -\mathbf{f}_{2*}(t) - \mathbf{Q}\mathbf{M}_2 \mathbf{f}'_{2*}(t)t/R_1, & |t| = R_1^2/R_2, \\ -[\mathbf{Q}/R_1 + \mathbf{Q}/R_2] \mathbf{M}_2 \mathbf{f}'_2(t)t, & |t| = R_2, \\ \mathbf{f}_{2**}(t) - \mathbf{Q}\mathbf{M}_2 \mathbf{f}'_{2**}(t)t/R_2, & |t| = R_2^2/R_1. \end{cases} \quad (23)$$

2 位错在基体中

当仅考虑有一个压电螺型位错 $\mathbf{b}_1 = [b_{z1} \quad b_{\varphi 1}]^T$ 位于基体中点 $z_1 (z_1 = x_1 + iy_1)$ 时, 基体区域的解析函数矢量 $\mathbf{f}_3(z)$ 可以写为

$$\mathbf{f}_3(z) = \mathbf{B}_1 \ln(z - z_1) + \mathbf{f}_{30}(z), \quad |z| > R_2, \quad (24)$$

其中, $\mathbf{B}_1 = \frac{1}{2\pi i} \begin{bmatrix} b_{z1} \\ b_{\varphi 1} \end{bmatrix}$, 第2项 $\mathbf{f}_{30}(z)$ 在域 $|z| > R_2$ 内全纯.

由式(9)可得

$$\mathbf{f}_{3*}(z) = \overline{\mathbf{B}_1} \ln\left(\frac{R_2^2}{z} - \overline{z_1}\right) + \mathbf{f}_{3*0}(z). \quad (25)$$

忽略表示刚体位移和等电位场的常数项, 函数矢量 $\mathbf{f}_2(z)$ 可以在圆环域内用 Laurent 级数展开

$$\mathbf{f}_2(z) = \mathbf{G}_N(z) + \mathbf{G}_P(z), \quad R_1 < |z| < R_2, \quad (26)$$

其中 $\mathbf{G}_N(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{a}_k z^{-(k+1)}$, $\mathbf{G}_P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{b}_k z^{k+1}$.

将式(26)代入式(10)和(11),得到

$$f_{2*}(z) = \overline{G}_N(R_1^2/z) + \overline{G}_P(R_1^2/z), \quad R_1^2/R_2 < |z| < R_1, \quad (27)$$

$$f_{2**}(z) = \overline{G}_N(R_2^2/z) + \overline{G}_P(R_2^2/z), \quad R_2 < |z| < R_2^2/R_1. \quad (28)$$

明显地, $f_1(z)$ 在域 $|z| < R_1$ 内全纯, 由式(12)可知, $f_{1*}(z)$ 在已定义区域内全纯.

由式(24)至式(28), 式(19)可以表示为

$$f_{10}^+(t) - f_{10}^-(t) = \begin{cases} M_2 [\overline{G}_N(R_1^2/z) + \overline{G}_P(R_1^2/z)] + M_3 \overline{B}_1 \ln\left(\frac{R_2^2}{z} - \overline{z}_1\right), & |t| = R_1^2/R_2, \\ M_2 [\overline{G}_N(R_2^2/z) + \overline{G}_P(R_2^2/z)] + M_3 B_1 \ln(z - z_1), & |t| = R_2^2/R_1. \end{cases} \quad (29)$$

按照 Muskhelishvili^[26], 方程(29)的解答可以明确推导为

$$M_1 f_1(z) + M_3 f_{3*0}(z) = -M_2 \overline{G}_N(R_1^2/z) + M_2 \overline{G}_N(R_2^2/z) + M_3 B_1 \ln(z - z_1), \quad |z| < R_1^2/R_2, \quad (30)$$

$$M_2 f_2(z) + M_1 f_{1*}(z) + M_3 f_{3*}(z) = M_2 \overline{G}_P(R_1^2/z) + M_2 \overline{G}_N(R_2^2/z) + M_3 \overline{B}_1 \ln\left(\frac{R_2^2}{z} - \overline{z}_1\right) + M_3 B_1 \ln(z - z_1), \quad R_1^2/R_2 < |z| < R_2^2/R_1, \quad (31)$$

$$M_3 f_{30}(z) + M_1 f_{1*}(z) = M_2 \overline{G}_P(R_1^2/z) - M_2 \overline{G}_P(R_2^2/z) + M_3 \overline{B}_1 \ln\left(\frac{R_2^2}{z} - \overline{z}_1\right), \quad |z| > R_2^2/R_1. \quad (32)$$

类似地, 式(23)可以表示为

$$f_{10}^+(t) - f_{10}^-(t) = \begin{cases} -\overline{G}_N(R_1^2/z) - \overline{G}_P(R_1^2/z) - \Omega M_2 f_{2*}'(t)t/R_1 - \overline{B}_1 \ln\left(\frac{R_2^2}{z} - \overline{z}_1\right), & |t| = R_1^2/R_2, \\ -[Q/R_1 + \Omega/R_2] M_2 f_{2*}'(t)t, & |t| = R_2, \\ \overline{G}_N(R_2^2/z) + \overline{G}_P(R_2^2/z) - \Omega M_2 f_{2*}'(t)t/R_2 - B_1 \ln(z - z_1), & |t| = R_2^2/R_1. \end{cases} \quad (33)$$

方程(33)的解答可以明确推导为

$$f_1(z) - f_{3*0}(z) = \overline{G}_N(R_1^2/z) - \overline{G}_N(R_2^2/z) + B_1 \ln(z - z_1) - (1+k)(m_1 + m_2)G_P(z) + (1+k)m_1 \overline{G}_N(R_1^2/z) + (1+k)m_2 \overline{G}_N(R_2^2/z), \quad |z| < R_1^2/R_2, \quad (34)$$

$$f_2(z) - f_{1*}(z) - \Omega M_2 f_{2*}'(z)z/R_1 - f_{3*}(z) = -\overline{G}_P(R_1^2/z) - \overline{G}_N(R_2^2/z) + B_1 \ln(z - z_1) - \overline{B}_1 \ln\left(\frac{R_2^2}{z} - \overline{z}_1\right) - (1+k)(m_1 + m_2)G_P(z) + (1+k)m_1 \overline{G}_P(R_1^2/z) + (1+k)m_2 \overline{G}_N(R_2^2/z), \quad R_1^2/R_2 < |z| < R_2, \quad (35)$$

$$f_3(z) - f_{2**}(z) + \Omega M_2 f_{2**}'(z)z/R_2 - f_{1*}(z) =$$

$$\begin{aligned}
& -\overline{\mathbf{G}}_p(R_1^2/z) - \overline{\mathbf{G}}_N(R_2^2/z) + \mathbf{B}_1 \ln(z - z_1) - \overline{\mathbf{B}}_1 \ln\left(\frac{R_2^2}{z} - \overline{z}_1\right) - \\
& (1+k)(m_1 + m_2)\mathbf{G}_N(z) + (1+k)m_1\overline{\mathbf{G}}_p(R_1^2/z) + \\
& (1+k)m_2\overline{\mathbf{G}}_N(R_2^2/z), \quad R_2 < |z| < R_2^2/R_1, \tag{36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{30}(z) - f_{1*}(z) = & -\overline{\mathbf{G}}_p(R_1^2/z) + \overline{\mathbf{G}}_p(R_2^2/z) - \overline{\mathbf{B}}_1 \ln\left(\frac{R_2^2}{z} - \overline{z}_1\right) - \\
& (1+k)(m_1 + m_2)\mathbf{G}_N(z) + (1+k)m_1\overline{\mathbf{G}}_p(R_1^2/z) + \\
& (1+k)m_2\overline{\mathbf{G}}_p(R_2^2/z), \quad |z| > R_2^2/R_1, \tag{37}
\end{aligned}$$

其中, $m_1 = \mathbf{Q}\mathbf{M}_2/R_1$ 和 $m_2 = \mathbf{\Omega}\mathbf{M}_2/R_2$.

由式(30)和(34)可得

$$\begin{aligned}
f_1(z) = & 2[\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3]^{-1}\mathbf{M}_3\mathbf{B}_1 \ln(z - z_1) + \\
& \sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3]^{-1}[\mathbf{M}_3 - \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3m_1(1+k)] \overline{\mathbf{a}}_k R_1^{-2(1+k)} z^{(1+k)} + \\
& \sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3]^{-1}[\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_3m_2(1+k)] \overline{\mathbf{a}}_k R_2^{-2(1+k)} z^{(1+k)} - \\
& [\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3]^{-1}\mathbf{M}_3 \sum_{k=0}^{\infty} (1+k)(m_1 + m_2)\mathbf{b}_k z^{(1+k)}. \tag{38}
\end{aligned}$$

由式(32)和(37)可得

$$\begin{aligned}
f_3(z) = & \mathbf{B}_1 \ln(z - z_1) + [\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3]^{-1}[\mathbf{M}_3 - \mathbf{M}_1] \overline{\mathbf{B}}_1 \ln\left(\frac{R_2^2}{z} - \overline{z}_1\right) - \\
& [\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3]^{-1}\mathbf{M}_1 \sum_{k=0}^{\infty} (1+k)(m_1 + m_2)\mathbf{a}_k z^{-(1+k)} + \\
& \sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3]^{-1}[\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_1(1+k)m_1] \overline{\mathbf{b}}_k R_1^{2(1+k)} z^{-(1+k)} + \\
& [\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3]^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_1(1+k)m_2] \overline{\mathbf{b}}_k R_2^{2(1+k)} z^{-(1+k)}. \tag{39}
\end{aligned}$$

由式(31)和(35),导出下面的方程:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2)[\mathbf{G}_N(z) + \mathbf{G}_p(z)] - \mathbf{M}_1m_1f_2'(z)z + (\mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_1)f_{3*}(z) = \\
\sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_1(1+k)m_1] \overline{\mathbf{b}}_k R_1^{2(1+k)} z^{-(1+k)} + \\
\sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_1(1+k)m_2] \overline{\mathbf{a}}_k R_2^{-2(1+k)} z^{(1+k)} - \\
\mathbf{M}_1 \sum_{k=0}^{\infty} (1+k)(m_1 + m_2)\mathbf{a}_k z^{(1+k)} + \\
(\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3)\mathbf{B}_1 \ln(z - z_1) + (\mathbf{M}_3 - \mathbf{M}_1) \overline{\mathbf{B}}_1 \ln\left(\frac{R_2^2}{z} - \overline{z}_1\right). \tag{40}
\end{aligned}$$

由方程(9)和(39),可以得到复势函数 $f_{3*}(z)$ 的表达式. 忽略代表刚体位移和等电位场的常数项,考虑复势函数 $f_{3*}(z)$,将式(26)代入式(40),并比较相同级数项的系数,可得

$$\mathbf{a}_k = -\frac{1}{1+k}[\mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_1m_1(1+k)]^{-1}[\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_1m_1(1+k)] \times$$

$$[\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_3]^{-1} \mathbf{H}_4 \overline{\mathbf{B}_1} \frac{R_1^{2(1+k)}}{z_1^{(1+k)}}, \quad (41)$$

$$\mathbf{b}_k = -\frac{1}{1+k} [\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_3]^{-1} \mathbf{H}_4 \mathbf{B}_1 \frac{1}{z_1^{(1+k)}}, \quad (42)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= [\mathbf{M}_3 - \mathbf{M}_1][\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3]^{-1}[\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_1 \mathbf{m}_2(1+k)] + \\ &\quad [\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_1 \mathbf{m}_2(1+k)], \\ \mathbf{H}_2 &= [\mathbf{M}_3 - \mathbf{M}_1][\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3]^{-1}[\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_1 \mathbf{m}_1(1+k)](R_1/R_2)^{2(1+k)}, \\ \mathbf{H}_3 &= -\{[\mathbf{M}_3 - \mathbf{M}_1][\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3]^{-1} \mathbf{M}_1(1+k)(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2) + \\ &\quad [\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_1 \mathbf{m}_2(1+k)]\} \times \\ &\quad [\mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_1 \mathbf{m}_1(1+k)]^{-1}[\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_1 \mathbf{m}_1(1+k)](R_1/R_2)^{2(1+k)}, \\ \mathbf{H}_4 &= \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3 + [\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_3][\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3]^{-1}[\mathbf{M}_3 - \mathbf{M}_1]. \end{aligned}$$

由式(26)、(38)、(39)、(41)和(42)可以得到解析函数矢量 $\mathbf{f}_1(z)$, $\mathbf{f}_2(z)$ 和 $\mathbf{f}_3(z)$ 的精确表达式。

注意到, 当 $K_{\sigma_1} = K_{\sigma_2} = K_{e_1} = K_{e_2} = \infty$ 时, 对应的是理想边界条件, 此时复势函数 $\mathbf{f}_j(z)$ ($j = 1, 2, 3$) 的解答与文献[23]和[25]中的结果一致。

复势矢量的解析解答已在式(26)、(38)和(39)中给出。则夹杂、界面层和基体中电弹性场的精确表达式可由式(2)至(4)导出。我们为了节省空间略去了详细的解答。

3 位错在夹杂中

对于一个 Burgers 矢量为 \mathbf{b}_1 的螺型位错作用在夹杂中 z_1 点, 此时的复势函数可以写为

$$\mathbf{f}_1(z) = \mathbf{B}_1 \ln(z - z_1) + \mathbf{f}_{10}(z), \quad (43)$$

$$\mathbf{f}_2(z) = \mathbf{B}_1 \ln(z - z_1) + \mathbf{f}_{20}(z), \quad (44)$$

$$\mathbf{f}_3(z) = \mathbf{B}_1 \ln(z - z_1) + \mathbf{f}_{30}(z), \quad (45)$$

其中, 复势函数 $\mathbf{f}_{10}(z)$, $\mathbf{f}_{20}(z)$ 和 $\mathbf{f}_{30}(z)$ 在各自定义的区域全纯。复势函数 $\mathbf{f}_{20}(z)$ 可以用 Laurent 级数展开:

$$\mathbf{f}_{20}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{c}_k z^{-(k+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{d}_k z^{k+1}, \quad R_1 < |z| < R_2. \quad (46)$$

考虑方程(8)至(11), 引入的4个复势函数矢量可写为

$$\mathbf{f}_{1*}(z) = \overline{\mathbf{f}_1}(R_1^2/z) = \overline{\mathbf{B}_1} \ln\left(\frac{R_1^2}{z} - \overline{z_1}\right) + \mathbf{f}_{1*0}(z), \quad |z| > R_1, \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{2*}(z) &= \overline{\mathbf{f}_2}(R_2^2/z) = \\ &\quad \overline{\mathbf{B}_1} \ln\left(\frac{R_1^2}{z} - \overline{z_1}\right) + \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\mathbf{c}_k} R_1^{-2(1+k)} z^{(k+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\mathbf{d}_k} R_1^{2(1+k)} z^{-(k+1)}, \\ &\quad R_1^2/R_2 < |z| < R_1, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{2**}(z) &= \overline{\mathbf{f}_2}(R_2^2/z) = \\ &\quad \overline{\mathbf{B}_1} \ln\left(\frac{R_2^2}{z} - \overline{z_1}\right) + \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\mathbf{c}_k} R_2^{-2(1+k)} z^{(k+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\mathbf{d}_k} R_2^{2(1+k)} z^{-(k+1)}, \\ &\quad R_2 < |z| < R_2^2/R_1, \end{aligned} \quad (49)$$

$$f_{3*}(z) = \overline{f_3}(R_2^2/z) = \overline{B_1} \ln\left(\frac{R_2^2}{z} - \overline{z_1}\right) + f_{3*0}(z), \quad |z| < R_2. \quad (50)$$

采用和上节类似的方法,可以得到复势函数 $f_1(z)$, $f_2(z)$ 和 $f_3(z)$:

$$\begin{aligned} f_1(z) = & B_1 \ln(z - z_1) + [M_1 + M_3]^{-1} [M_1 - M_2] \overline{B_1} \ln\left(z - \frac{R_1^2}{z_1}\right) + \\ & [M_1 + M_3]^{-1} [M_2 - M_3] \overline{B_1} \ln\left(z - \frac{R_2^2}{z_1}\right) + \\ & [M_1 + M_3]^{-1} M_3 m_1 \overline{B_1} \frac{z}{z - R_1^2/\overline{z_1}} + [M_1 + M_3]^{-1} M_3 m_2 \overline{B_1} \frac{z}{z - R_2^2/\overline{z_1}} + \\ & \sum_{k=0}^{\infty} [M_1 + M_3]^{-1} [M_3 - M_2 + M_3 m_1(1+k)] \overline{c_k} R_1^{-2(1+k)} z^{(1+k)} + \\ & \sum_{k=0}^{\infty} [M_1 + M_3]^{-1} [M_2 - M_3 + M_3 m_2(1+k)] \overline{c_k} R_2^{-2(1+k)} z^{(1+k)} - \\ & [M_1 + M_3]^{-1} M_3 \sum_{k=0}^{\infty} (1+k)(m_1 + m_2) d_k z^{(1+k)}, \end{aligned} \quad (51)$$

$$f_2(z) = B_1 \ln(z - z_1) + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-(k+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^{k+1}, \quad (52)$$

$$\begin{aligned} f_3(z) = & 2[M_1 + M_3]^{-1} M_1 B_1 \ln(z - z_1) + [M_1 + M_3]^{-1} [M_1 - M_3] \overline{B_1} \ln z + \\ & [M_1 + M_3]^{-1} M_1 (m_1 + m_2) B_1 \frac{z_1}{z - z_1} - \\ & [M_1 + M_3]^{-1} M_1 \sum_{k=0}^{\infty} (1+k)(m_1 + m_2) c_k z^{-(1+k)} + \\ & \sum_{k=0}^{\infty} [M_1 + M_3]^{-1} [M_2 - M_1 + M_1(1+k)m_1] \overline{d_k} R_1^{2(1+k)} z^{-(1+k)} + \\ & [M_1 + M_3]^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} [M_1 - M_2 + M_1(1+k)m_2] \overline{d_k} R_2^{2(1+k)} z^{-(1+k)}, \end{aligned} \quad (53)$$

其中

$$\begin{aligned} c_k = & \frac{1}{1+k} [M_2 + M_1 + M_1 m_1(1+k)]^{-1} [M_2 - M_1 + \\ & M_1 m_1(1+k)] \left[I - [II_1 + II_2 + II_3]^{-1} II_5 \frac{R_1^{2(1+k)}}{R_2^{2(1+k)}} \right] B_1 z_1^{(1+k)}, \end{aligned} \quad (54)$$

$$d_k = \frac{1}{1+k} [II_1 + II_2 + II_3]^{-1} II_5 B_1 \frac{\overline{z_1}^{(1+k)}}{R_2^{2(1+k)}}, \quad (55)$$

其中

$$\begin{aligned} II_5 = & [M_2 - M_1 + M_1(1+k)m_1] + 2[M_1 - M_3][M_1 + M_3]^{-1} M_1 + \\ & [M_3 - M_1][M_1 + M_3]^{-1} M_1 (m_1 + m_2)(1+k) - \\ & \{ [M_3 - M_1][M_1 + M_3]^{-1} M_1(1+k)(m_1 + m_2) + \\ & [M_2 - M_1 + M_1 m_2(1+k)] \} \times \\ & [M_2 + M_1 + M_1 m_1(1+k)]^{-1} [M_2 - M_1 + M_1 m_1(1+k)] (R_1/R_2)^{2(1+k)}. \end{aligned}$$

注意到,当 $K_{\sigma_1} = K_{\sigma_2} = K_{e_1} = K_{e_2} = \infty$ 时,由式(51)至(53)可以得到理想边界条件下的复势函数解 $f_j(z)$ ($j = 1, 2, 3$), 和文献[23]的解吻合. 令 $M_3 = \mathbf{0}$, 式(51)至式(53)则简化为压电螺

型位错与含非理想界面涂层圆柱的干涉解。

4 作用在位错上的像力

研究不均匀材料的电弹干涉现象时,作用在位错上的像力是一个重要的物理参量.尤其是研究压电位错的移动性和所谓诱捕机制时,位错的移动性取决于作用在位错上的内力.作用在位于点 z_1 处的压电螺型位错上的像力,可以由广义 Peach-Koehler 公式求得^[2]

$$f_x - if_y = i[b_{z_1} \quad b_{\varphi_1}] [\boldsymbol{\Sigma}_x^0(z_1) - i \boldsymbol{\Sigma}_y^0(z_1)], \quad (56)$$

其中, f_x 和 f_y 分别为像力在 x 和 y 方向的分量; $\boldsymbol{\Sigma}_x^0(z_1)$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}_y^0(z_1)$ 分别表示位错点 z_1 的扰动广义应力分量.

将式(4)中求得的广义应力场,减去相应位错在无限大均匀介质中产生的广义应力场,并将该场对 $z \rightarrow z_1$ 取极限值,即可得到位错点的扰动应力场.根据 Lee^[27]的工作,可得到作用在单个压电螺型位错上的像力的精确表达式:

当位错在基体时

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_x^0(z_1) - i \boldsymbol{\Sigma}_y^0(z_1) = & \\ & \mathbf{M}_3 [\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3]^{-1} [\mathbf{M}_3 - \mathbf{M}_1] \overline{\mathbf{B}_1} \left(\frac{1}{z_1 - R_2^2/\bar{z}_1} - \frac{1}{z_1} \right) + \\ & \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{M}_3 [\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3]^{-1} [\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_1(1+k)\mathbf{m}_1] \times \\ & [\mathbf{II}_1 + \mathbf{II}_2 + \mathbf{II}_3]^{-1} \mathbf{II}_4 \overline{\mathbf{B}_1} \frac{R_1^{2(1+k)}}{z_1^{(1+k)} \bar{z}_1^{(2+k)}} + \\ & \mathbf{M}_3 [\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3]^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_1(1+k)\mathbf{m}_2] \\ & [\mathbf{II}_1 + \mathbf{II}_2 + \mathbf{II}_3]^{-1} \mathbf{II}_4 \overline{\mathbf{B}_1} \frac{R_2^{2(1+k)}}{z_1^{(1+k)} \bar{z}_1^{(2+k)}} - \\ & \mathbf{M}_3 [\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3]^{-1} \mathbf{M}_1 \sum_{k=0}^{\infty} (1+k)(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2) [\mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_1\mathbf{m}_1(1+k)]^{-1} \times \\ & [\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_1\mathbf{m}_1(1+k)] [\mathbf{II}_1 + \mathbf{II}_2 + \mathbf{II}_3]^{-1} \mathbf{II}_4 \overline{\mathbf{B}_1} \frac{R_1^{2(1+k)}}{z_1^{(1+k)} \bar{z}_1^{(2+k)}} \end{aligned} \quad (57)$$

和当位错在夹杂时

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_x^0(z_1) - i \boldsymbol{\Sigma}_y^0(z_1) = & \\ & \mathbf{M}_1 [\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3]^{-1} [\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2] \overline{\mathbf{B}_1} \frac{1}{z_1 - R_1^2/\bar{z}_1} + \\ & \mathbf{M}_1 [\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3]^{-1} [\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_3] \overline{\mathbf{B}_1} \frac{1}{z_1 - R_2^2/\bar{z}_1} + \\ & \mathbf{M}_1 [\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3]^{-1} \mathbf{M}_3 \mathbf{m}_1 \mathbf{B}_1 \frac{R_1^2/\bar{z}_1}{(z_1 - R_1^2/\bar{z}_1)^2} + \\ & \mathbf{M}_1 [\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3]^{-1} \mathbf{M}_3 \mathbf{m}_2 \mathbf{B}_1 \frac{R_2^2/\bar{z}_1}{(z_1 - R_2^2/\bar{z}_1)^2} + \\ & \sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3]^{-1} [\mathbf{M}_3 - \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3\mathbf{m}_1(1+k)] \overline{\mathbf{c}_k} R_1^{-2(1+k)} (1+k) z_1^k + \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3]^{-1} [\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_3 \mathbf{m}_2 (1+k)] \bar{c}_k R_2^{-2(1+k)} (1+k) z_1^k - [\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3]^{-1} \mathbf{M}_3 \sum_{k=0}^{\infty} (1+k)^2 (\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2) \mathbf{d}_k z_1^k. \quad (58)$$

将式(57)和(58)代入式(56),就可以得到作用在压电螺型位错 z_1 上像力的精确表达式. 我们为了节省空间略去了详细的解答.

5 数值计算和讨论

利用式(56)给出的像力表达式, 讨论所考虑问题的一些性质. 在本节中, 我们考虑一个压电螺型位错位于基体中. 利用式(56)和(57)研究各项参数对作用于该位错上的像力的影响规律.

在以下讨论中, 不失一般性, 我们假设压电螺型位错位于 x 轴上一点 x_0 处. 此时, 沿 y 方向的像力 $f_y = 0$, 且定义沿 x 方向的像力分量的无量纲力为 $f_{x_0} = 2\pi R_2 f_x / (c_{44}^{(2)} b_{z_1}^2)$. 令压电螺型位错矢量 $\mathbf{b}_1 = [b_{z_1} \ b_{\varphi_1}]^T = [1.0 \times 10^{-9} \text{ m} \ 1.0 \text{ V}]^T$, 界面层材料为 PZT-5H, 其电弹常数分别为 $c_{44}^{(2)} = 3.53 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $e_{15}^{(2)} = 17.0 \text{ C/m}^2$, $\varepsilon_{11}^{(2)} = 1.51 \times 10^{-8} \text{ C}^2 / (\text{N} \cdot \text{m}^2)$.

另外, 引入界面无量纲参数:

$$m_{11} = c_{44}^{(2)} / (R_1 K_{\sigma_1}), \quad m_{12} = e_{15}^{(2)} / (R_1 K_{\sigma_1}), \quad m_{13} = e_{15}^{(2)} / (R_1 K_{e_1}), \quad m_{14} = \varepsilon_{11}^{(2)} / (R_1 K_{e_1}), \\ m_{21} = c_{44}^{(2)} / (R_2 K_{\sigma_2}), \quad m_{22} = e_{15}^{(2)} / (R_2 K_{\sigma_2}), \quad m_{23} = e_{15}^{(2)} / (R_2 K_{e_2}), \quad m_{24} = \varepsilon_{11}^{(2)} / (R_2 K_{e_2}).$$

其中, $m_{1j} (j=1, 2, 3, 4)$ 表示夹杂和界面层之间传递荷载的界面 (Γ_1) 的粘结指数 (界面非理想度), $m_{2j} (j=1, 2, 3, 4)$ 表示界面层和基体之间界面 (Γ_2) 的粘结指数. 在物理学上, 当 $m_{1j} (j=1, 2, 3, 4)$ 和 $m_{2j} (j=1, 2, 3, 4)$ 的值非常小时, 对应理想粘结条件; 而当 $m_{1j} (j=1, 2, 3, 4)$ 和 $m_{2j} (j=1, 2, 3, 4)$ 取非常大的值时, 对应的是完好粘结且绝缘的界面. 最后, 定义位错的相对位置为 $\rho = x_0 / R_2$, 以及界面层的相对厚度为 $\lambda = R_1 / R_2$.

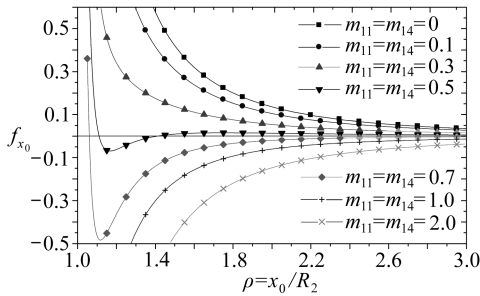


图2 无量纲像力 f_{x_0} 随 ρ 的变化, 取 $m_{2j} = 0$,

$$\mathbf{M}_3 = 0.5\mathbf{M}_2, \quad \mathbf{M}_1 = 2\mathbf{M}_2, \quad \lambda = 0.9$$

Fig. 2 Normalized force f_{x_0} versus ρ for $m_{2j} = 0$,

$$\mathbf{M}_3 = 0.5\mathbf{M}_2, \quad \mathbf{M}_1 = 2\mathbf{M}_2 \text{ and } \lambda = 0.9$$

m_{1j} 很大时, 夹杂和界面层将会一直吸引基体中的位错, 且在界面附近不存在平衡位置.

图3则表明, 取材料常数 $\mathbf{M}_3 = 0.5\mathbf{M}_2$ 和 $\mathbf{M}_1 = 2\mathbf{M}_2$, 当界面层的外界面 Γ_2 为非理想界面 ($m_{2j} \neq 0$), 内界面 Γ_1 为理想界面 ($m_{1j} = 0$), 且非理想界面的粘结指数 m_{2j} 达到一定值时, 夹杂和界面层首先吸引后排斥基体中的压电螺型位错. 在靠近界面 Γ_2 处存在一个不稳定平衡位置. 当非理想界面粘结指数 m_{2j} 比较大时, 夹杂和界面层将一直吸引基体中的位错, 却不存在平

取一定的材料常数和不同的界面参数 m_{1j} 和 m_{2j} ($j=1, 2, 3, 4$), 无量纲像力 f_{x_0} 随相对位置 ρ 的变化如图2和图3所示. 由图2可知, 取 $\mathbf{M}_3 = 0.5\mathbf{M}_2$ 和 $\mathbf{M}_1 = 2\mathbf{M}_2$, 当界面层的内界面 Γ_1 为非理想界面 ($m_{1j} \neq 0$), 外界面 Γ_2 为理想界面 ($m_{2j} = 0$), 且非理想界面的粘结指数 m_{1j} 达到一定值时, 夹杂和界面层首先排斥, 再吸引最后又排斥基体中的压电螺型位错. 在界面 Γ_2 附近有两个位错平衡位置, 其中靠近界面 Γ_2 的平衡位置为稳定平衡位置, 另一个则为不稳定平衡位置. 当非理想界面粘结指数 m_{1j} 相对较大时, 夹杂和界面层先排斥后吸引基体中的位错, 且在界面 Γ_2 附近有一稳定平衡位置. 另外, 当非理想界面粘结指数

衡位置.

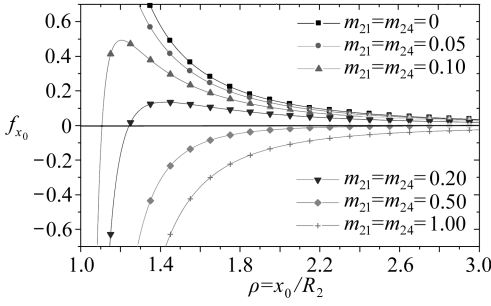


图3 无量纲像力 f_{x_0} 随 ρ 的变化, 取 $m_{ij} = 0$,

$$\mathbf{M}_3 = 0.5\mathbf{M}_2, \mathbf{M}_1 = 2\mathbf{M}_2, \lambda = 0.9$$

Fig. 3 Normalized force f_{x_0} versus ρ for $m_{ij} = 0$,

$$\mathbf{M}_3 = 0.5\mathbf{M}_2, \mathbf{M}_1 = 2\mathbf{M}_2, \lambda = 0.9$$

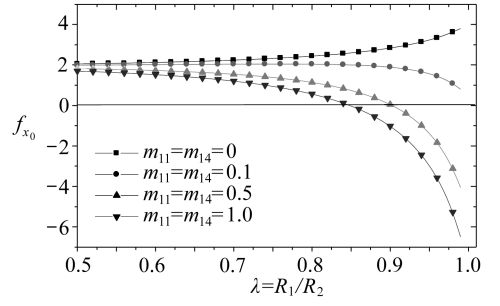


图4 无量纲像力 f_{x_0} 随 λ 的变化, 取 $m_{2j} = 0$,

$$\mathbf{M}_3 = 0.5\mathbf{M}_2, \mathbf{M}_1 = 2\mathbf{M}_2, \rho = 1.1$$

Fig. 4 Normalized force f_{x_0} versus λ for $m_{2j} = 0$,

$$\mathbf{M}_3 = 0.5\mathbf{M}_2, \mathbf{M}_1 = 2\mathbf{M}_2, \rho = 1.1$$

取一定的材料常数和不同的界面参数 m_{ij} 和 m_{2j} , 且 $\rho = 1.1$, 图4和图5描绘了无量纲像力 f_{x_0} 随界面层相对厚度 $\lambda = R_1/R_2$ 的变化曲线. 如图4所示, 在取 $\mathbf{M}_3 = 0.5\mathbf{M}_2$ 和 $\mathbf{M}_1 = 2\mathbf{M}_2$ 的情况下, 界面层比较厚(如 $\lambda = R_1/R_2 = 0.55$) 时, 非理想界面的粘结指数 m_{ij} 对位错像力的影响则被界面层所屏蔽. 而当界面层比较薄(如 $\lambda = R_1/R_2 = 0.95$) 时, 非理想界面的粘结指数 m_{ij} 对像力的影响则显而易见.

由图5可知, 取 $\mathbf{M}_3 = 0.5\mathbf{M}_2$ 和 $\mathbf{M}_1 = 0.1\mathbf{M}_2$, 界面层比较厚(如 $\lambda = R_1/R_2 = 0.5$) 时, 非理想界面的粘结指数对位错像力的影响很明显; 而当界面层比较薄(如 $\lambda = R_1/R_2 = 0.95$) 时, 非理想界面的粘结指数对位错像力的影响将减小.

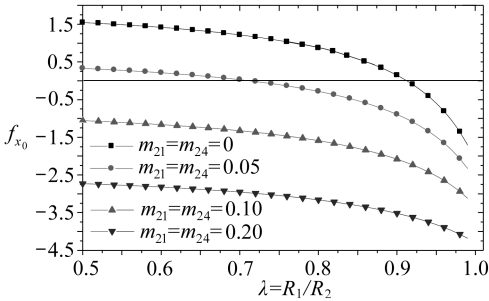


图5 无量纲像力 f_{x_0} 随 λ 的变化,

$$\text{取 } m_{ij} = 0, \mathbf{M}_3 = 0.5\mathbf{M}_2,$$

$$\mathbf{M}_1 = 2\mathbf{M}_2, \rho = 1.1$$

Fig. 5 Normalized force f_{x_0} versus λ

$$\text{for } m_{ij} = 0, \mathbf{M}_3 = 0.5\mathbf{M}_2,$$

$$\mathbf{M}_1 = 2\mathbf{M}_2, \rho = 1.1$$

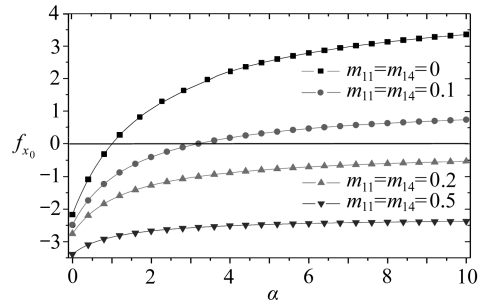


图6 无量纲像力 f_{x_0} 随 $\alpha = c_{44}^{(2)}/c_{44}^{(3)}$ 的变化,

$$\text{取 } x_1/R = 1.2, m_{ij} = 0, \mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_3,$$

$$e_{15}^{(2)} = e_{15}^{(3)}, \varepsilon_{11}^{(2)} = \varepsilon_{11}^{(3)}$$

Fig. 6 Normalized force f_{x_0} versus $\alpha = c_{44}^{(2)}/c_{44}^{(3)}$

$$\text{for } x_1/R = 1.2, m_{ij} = 0, \mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_3,$$

$$e_{15}^{(2)} = e_{15}^{(3)}, \varepsilon_{11}^{(2)} = \varepsilon_{11}^{(3)}$$

取不同的界面参数 m_{2j} , 且 $m_{ij} = 0, x_0/R_2 = 1.2$, 无量纲像力 f_{x_0} 随相对电弹性模量的变化如图6至图8所示. 这里, 我们取基体材料为 PZT-5H, 其电弹常数分别为

$$c_{44}^{(3)} = 3.53 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, e_{15}^{(3)} = 17.0 \text{ C/m}^2,$$

$$\varepsilon_{11}^{(3)} = 1.51 \times 10^{-8} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2),$$

且定义比率

$$\alpha = c_{44}^{(2)}/c_{44}^{(3)}, \beta = e_{15}^{(2)}/e_{15}^{(3)}, \gamma = \varepsilon_{11}^{(2)}/\varepsilon_{11}^{(3)}.$$

由图 6 可知,作用在压电螺型位错上的排斥力随着相对剪切模量 $\alpha = c_{44}^{(2)}/c_{44}^{(3)}$ 的增大而增大.另一方面,吸引力随着非理想界面的粘结指数 m_{2j} 的增大而增大.当 m_{2j} 取较大值时,界面层的剪切模量对像力的影响会很小;相反,非理想界面对像力的影响随着相对剪切模量 $\alpha = c_{44}^{(2)}/c_{44}^{(3)}$ 的增大而增大.图 7 表明,当 m_{2j} 取较小值时,夹杂和界面层会随着比率 $\beta = e_{15}^{(2)}/e_{15}^{(3)}$ 绝对值的增大先吸引后排斥基体中的压电螺型位错.而当 m_{2j} 取较大值时,夹杂和界面层将一直吸引位错.随着比率 $\beta = e_{15}^{(2)}/e_{15}^{(3)}$ 的绝对值增大,非理想界面对像力的影响越来越重要,并且明显也增大.由图 8 可知, $m_{2j} = 0$, 比率 $\gamma = \varepsilon_{11}^{(2)}/\varepsilon_{11}^{(3)}$ 的值小于 1 时,夹杂和界面层会排斥基体中的位错,此规律与比率 $\alpha = c_{44}^{(2)}/c_{44}^{(3)}$ 和 $\beta = e_{15}^{(2)}/e_{15}^{(3)}$ 对像力的影响规律恰好相反.类似地,当 m_{2j} 的值较大时,不管比率 $\gamma = \varepsilon_{11}^{(2)}/\varepsilon_{11}^{(3)}$ 取何值,夹杂和界面层都将一直吸引基体中的位错.

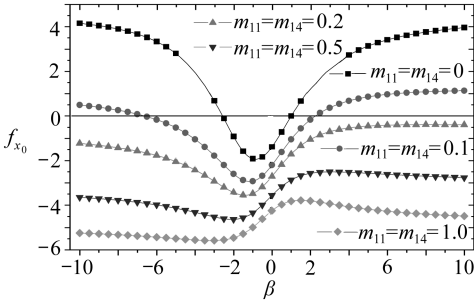


图 7 无量纲像力 f_{x_0} 随 $\beta = e_{15}^{(2)}/e_{15}^{(3)}$ 的变化,

$$\text{取 } x_1/R = 1.2, m_{1j} = 0, \mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_3, \\ c_{44}^{(2)} = c_{44}^{(3)}, \varepsilon_{11}^{(2)} = \varepsilon_{11}^{(3)}$$

Fig. 7 Normalized force f_{x_0} versus $\beta = e_{15}^{(2)}/e_{15}^{(3)}$

$$\text{for } x_1/R = 1.2, m_{1j} = 0, \mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_3, \\ c_{44}^{(2)} = c_{44}^{(3)}, \varepsilon_{11}^{(2)} = \varepsilon_{11}^{(3)}$$

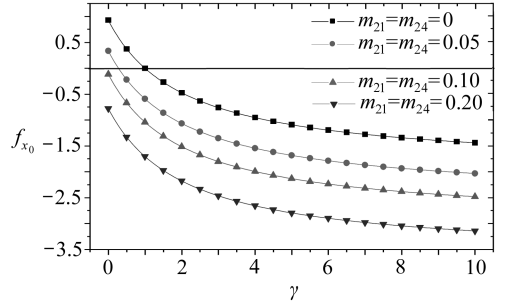


图 8 无量纲像力 f_{x_0} 随 $\gamma = \varepsilon_{11}^{(2)}/\varepsilon_{11}^{(3)}$ 的变化,

$$\text{取 } x_1/R = 1.2, m_{1j} = 0, \mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_3, \\ c_{44}^{(2)} = c_{44}^{(3)}, e_{15}^{(2)} = e_{15}^{(3)}$$

Fig. 8 Normalized force f_{x_0} versus $\gamma = \varepsilon_{11}^{(2)}/\varepsilon_{11}^{(3)}$

$$\text{for } x_1/R = 1.2, m_{1j} = 0, \mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_3, \\ c_{44}^{(2)} = c_{44}^{(3)}, e_{15}^{(2)} = e_{15}^{(3)}$$

6 结 论

本文用三相复合材料模型研究了压电螺型位错与含非理想界面圆形夹杂的电弹干涉效应.运用复变函数方法,得到了电弹性场的精确解答,导出了作用在压电螺型位错上的像力表达式.详细分析了非理想界面,压电材料的电弹常数以及界面层相对厚度对像力的影响规律;并讨论了压电螺型位错的平衡位置.结果表明,非理想界面对压电螺型位错的吸引力会随着电弹性界面的非理想度的增大而增大.与以往结论(理想界面)相比较,由于非理想界面的影响,当压电螺型位错靠近电弹性硬夹杂时,可能会出现更多的位错平衡位置.

另外,当界面层的内界面为非理想界面,且界面的非理想度达到一定值时,对于电弹性硬夹杂,基体中的位错在界面附近有两个平衡位置,这是以往研究(不考虑非理想界面)中未曾发现的新结论.两个位错平衡位置中,靠近界面的为稳定平衡位置,另一个则为非稳定平衡位置.另外,当界面层的外界面为非理想界面,且界面的非理想度达到一定值时,位错只有一个非稳定平衡位置.当界面层相对较厚时,界面层内界面的非理想度对像力的影响会被界面层屏蔽.而当界面的非理想度比较大时,界面层材料的电弹常数对像力以及位错平衡位置的影响非常小.

参考文献(References):

- [1] Deng W F. The analysis of dislocation, crack, and inclusion problems in piezoelectric solids [D]. Ph D Dissertation. Stanford University, 1980.
- [2] Pak Y E. Force on a piezoelectric screw dislocation[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1990, **57**(4): 863-869.
- [3] Xiao Z M, Yan J, Chen B J. Electroelastic analysis for a Griffith crack interacting with a coated inclusion in piezoelectric solid[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2005, **43**(8/9): 639-654.
- [4] Kattis M A, Providas E, Kalamkarov A L. Two-phase potentials in the analysis of smart composites having piezoelectrical components[J]. *Composites Part B*, 1998, **29**(1): 9-14.
- [5] Lu P, Williams F W. Green functions of piezoelectric material with an elliptic hole or inclusion[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1998, **35**(7/8): 651-664.
- [6] Meguid S A, Deng W. Electro-elastic interaction between a screw dislocation and an elliptical inhomogeneity in piezoelectric materials[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1998, **35**(13): 1467-1482.
- [7] Huang Z, Kuang Z B. Dislocation inside a piezoelectric media with an elliptic inhomogeneity [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, **38**(46/47): 8459-8479.
- [8] Shen M H, Chen S N, Chen F M. A piezoelectric screw dislocation interacting with a nonuniformly coated circular inclusion[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2006, **44**(1/2): 1-13.
- [9] Liu Y W, Fang Q H, Jiang C P. Analysis of a piezoelectric screw dislocation in the interphase layer between a circular inclusion and an unbounded matrix[J]. *Materials Chemistry and Physics*, 2006, **98**(1): 14-26.
- [10] Shen M H. A magnetoelectric screw dislocation interacting with a circular layered inclusion [J]. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2008, **27**(3): 429-442.
- [11] Benveniste Y, Miloh T. The effective conductivity of composites with imperfect thermal contact at constituent interfaces [J]. *International Journal of Engineering Science*, 1986, **24**(9): 1537-1552.
- [12] Hashin Z. Thin interphase/imperfect interface in conduction[J]. *Journal of Applied Physiology*, 2001, **89**(4): 2262-2268.
- [13] Shen H, Schiavone P, Ru C Q, Mioduchowski A. Analysis of internal stress in an elliptic inclusion with imperfect interface in plane elasticity[J]. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2000, **5**(4): 501-521.
- [14] Studak L J. Interaction between a screw dislocation and a three-phase circular inhomogeneity with imperfect interface[J]. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2003, **8**(2): 171-188.
- [15] Fan H, Sze K Y. A micro-mechanics model for imperfect interface in dielectric materials[J]. *Mechanics of Materials*, 2001, **33**(6): 363-370.
- [16] Chen W Q, Lee K Y. Exact solution of angle-ply piezoelectric laminates in cylindrical bending with interfacial imperfections[J]. *Composite Structures*, 2004, **65**(3/4): 329-337.
- [17] Li Y D, Lee K Y. Crack tip shielding and anti-shielding effects of the imperfect interface in a layered piezoelectric sensor[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2009, **46**(7/8): 1736-1742.
- [18] Li Y D, Lee K Y. The shielding effect of the imperfect interface on a mode III permeable crack in a layered piezoelectric sensor[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2009, **76**(7): 876-883.

- [19] Wang X, Sudak L J. A piezoelectric screw dislocation interacting with an imperfect piezoelectric biomaterial interface[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, **44**(10): 3344-3358.
- [20] Jin B, Fang Q H. Piezoelectric screw dislocation interacting with a circular inclusion with imperfect interface[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2008, **78**(2): 105-116.
- [21] Luo H A, Chen Y. An edge dislocation in a three-phase composite cylinder model[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1991, **58**(1): 75-86.
- [22] Xiao Z M, Chen B J. A screw dislocation interacting with a coated fiber[J]. *Mechanics of Materials*, 2000, **32**(8): 485-494.
- [23] Liu Y W, Fang Q H, Jiang C P. A piezoelectric screw dislocation interacting with an interphase layer between a circular inclusion and the matrix[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2004, **41**(11/12): 3255-3274.
- [24] Feng H, Fang Q H, Liu Y W, Jin B. Image force and stability of a screw dislocation inside a coated cylindrical inhomogeneity with interface stresses[J]. *Acta Mechanica*, 2011, **220**(1/4): 315-329.
- [25] Xiao Z M, Yan J, Chen B J. Electro-elastic stress analysis for a screw dislocation interacting with a coated inclusion in piezoelectric[J]. *Acta Mechanica*, 2004, **172**(3/4): 237-249.
- [26] Muskhelishvili N L. *Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity*[M]. Leyden: Noordhoff, 1975.
- [27] Lee L. The image force on the screw dislocation around a crack of finite size[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1987, **27**(5): 539-545.

Electroelastic Interaction Between a Piezoelectric Screw Dislocation and a Circularly Layered Inclusion With Imperfect Interfaces

FANG Qi-hong^{1,2}, FENG Hui^{1,2}, LIU You-wen^{1,2}

(1. State Key Laboratory of Advanced Design and Manufacturing for Vehicle Body,
Hunan University, Changsha 410082, P. R. China;

2. College of Mechanical and Vehicle Engineering, Hunan University,
Changsha 410082, P. R. China)

Abstract: The interaction between a piezoelectric screw dislocation and an interphase layer in piezoelectric solids was theoretically investigated. Here, the dislocation located at arbitrary points inside either the matrix or the inclusion, and the interfaces of the interphase layer were imperfect. By complex variable method, the explicit solutions of complex potentials were given and electroelastic fields could be derived from them. The image force acting on the dislocation could be obtained by the generalized Peach-Koehler formula. The motion of the piezoelectric screw dislocation and its equilibrium positions were discussed for variable parameters. The important results show that, if the inner interface of interphase layer is imperfect and the magnitude of degree of interface imperfection reaches the certain value, two equilibrium positions of the piezoelectric screw dislocation in the matrix near the interface are found for certain material combination which has never been observed in previous studies (without considering the interface imperfection).

Key words: composite materials; dislocations; piezoelectricity; mechanical properties