

含多种尺寸缺陷岩体中的弹性波散射*

谭子翰¹, 徐松林^{1,2}, 刘永贵¹, 席道瑛³

(1. 中国科学技术大学 中国科学院材料力学行为和设计重点实验室, 合肥 230027;

2. 洛桑联邦理工大学 环境、建筑与土木工程学院岩石力学实验室, 1015 洛桑 瑞士;

3. 中国科学技术大学 蒙城地球物理国家野外观测站 地球和空间科学学院, 合肥 230026)

摘要: 研究了含多种尺寸扁平椭圆缺陷的岩体中弹性波散射规律, 细观上应用 Green 函数方法, 考虑了入射波与基本的扁平椭圆缺陷相互作用, 宏观上采用线性叠加原理, 得到了缺陷岩体的频散和衰减规律. 频散曲线中特征频率与裂纹尺寸负相关, 含几种不连续尺寸裂纹的岩体中其频散曲线呈"阶梯跳跃"形, 其衰减曲线也有不同的峰值; 而含"均匀分布"与"正态分布"裂纹尺寸的岩体, 与含单一尺寸缺陷的岩体相比, 其频散曲线具有较宽的特征频率段. 结合两个声波测试实例, 讨论了这一理论模型的合理性与可行性.

关键词: 缺陷岩体; 频散效应; 多种尺寸缺陷; 特征频率; Green 函数

中图分类号: P313.1 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.01.005

引言

岩体具有典型的跨尺度非均质多组元相的复杂结构: 岩体由固体矿物颗粒组成的骨架和孔隙、孔隙填充物组成, 本身就是一个多组元多相、含有大量微孔洞微裂纹等缺陷的复合体; 岩体骨架则是由不同的矿物颗粒胶结而成, 是从微观到细观结构复杂的复合物. 由于其形成过程的差异, 岩体内的个体差别很大, 对其进行研究难度较大. 实际岩体会引起弹性波的频散和衰减. 同时, 利用声波测试得到的材料中的弹性波的频散和衰减规律, 用于推断材料或岩体介质中的缺陷(节理、裂隙、孔洞和内含物等)分布和几何形态. 这在地球物理勘探^[1-3]与无损检测^[4-5]等多个领域得到了极大的关注.

弹性波传播过程中波速的频散效应, 其内在机制是弹性波与缺陷岩体的相互作用. 对岩体中这一机制的研究, 有等效介质理论和射线理论^[6]. 但这两类理论走了两个极端: 前者将岩体等效成一种均匀介质, 并不关注波与缺陷相互作用的细节; 后者主要考虑波与局部缺陷的细节方面的作用. 为探索一种更合理的途径, Mavoko 等(2005)将 BISQ 理论与 Gussman 方程结合; Zimmer 等^[7](2007), Bachrach 等^[8](2008)则将岩体看作颗粒材料, 考虑不同颗粒接触模式对波速的影响; Pride 等^[9-10](2003)讨论了入射波长 λ 大于材料特征尺度 L 大于散射体尺度 D 的情况下, 波在双孔洞饱和介质中的衰减和弥散, 得到了一些有益的结论. 但由于其全局平均化

* 收稿日期: 2012-07-24; 修订日期: 2012-11-28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11272304; 11102206)

作者简介: 谭子翰(1987—), 男, 湖南涟源人, 学士, 硕士生(通讯作者. Tel: +86-551-3601249; E-mail: slxu99@ustc.edu.cn).

思想的约束,难有根本性的改变。

因此,需要考虑从细观到宏观统一的散射模型来对缺陷岩体中弹性波进行研究。Zhang 等^[11](1989)和 Achenbach 等^[12](1982)利用射线理论在细观上研究弹性波与扁平缺陷的相互作用,宏观上利用线性叠加的方法将单个缺陷的作用结果进行统计分析,得到了弹性波频散规律。刘永贵,徐松林等^[13-14](2010,2012)应用类似的思想,结合现场实验数据,研究了含扁平裂隙缺陷岩体中弹性波的单次散射和部分多次散射问题,得到了其频散和衰减规律。

实际上,岩体中的组分是跨尺度的,故原位岩体中所存在的缺陷一般含多种尺寸分布。例如:在细观上,较完整的岩石基体中富含毫米、亚毫米量级的微裂纹;宏观上则是可见的、厘米量级的裂纹;更大的尺度上,缺陷则以节理、裂纹等宏观形式出现。要研究实际问题中的缺陷岩体,须充分考虑这种按不同尺寸分布的缺陷与弹性波的相互作用问题。在试验方面,邓向允等^[15](2009)研究了 25 kHz 到 1 MHz 的水泥砂浆和玄武岩的声波实验,其频散曲线具有明显的“阶梯跳跃”性,与传统的单一尺寸裂纹的频散规律不同。Aggelis 等^[16](2005)在对新鲜水泥砂浆的频率范围从 0 ~ 1 MHz 的声波测试中,测到了两种尺寸的缺陷,并利用内含物多次散射理论进行了分析,认为不同尺寸分布下的缺陷对弹性波频散和衰减的影响也会分布在不同的频率范围。

基于此,考虑到缺陷形态的任意性以及实际岩体缺陷内含夹杂物,前面的工作(Zhang 等^[11],刘永贵,徐松林等^[13-14])研究的裂纹对象没法考虑这些实际情况的事实,因此,本文细观上从扁平的椭圆缺陷模型出发,采用 Green 函数基本解方法,绕椭圆缺陷边界进行积分,由此得到相应的散射场,研究具有一定厚度的椭圆缺陷对波的散射规律。进一步则分析弹性波与多种尺寸缺陷的相互作用,更深层次地来揭示实际岩体中弹性波传播的一般规律。这些规律的揭示,在工程应用上,可对金属矿勘探、石油勘探等地质勘探工作和无损检测技术进行指导,具有广泛的实用价值。

1 基本理论模型和计算方法

1.1 理论模型

图 1 所示为弹性波与岩体中特征“缺陷”相互作用分析模型。分析弹性波与含单扁平椭圆裂纹相互作用的情况。椭圆的半长轴为 a ,半短轴为 b ,具有上下表面 Γ^+ , Γ^- 。以裂纹中点为坐标原点,沿裂纹法向和切向建立正交直角坐标系。

对于扁平椭圆裂纹边界上任意一点的单位法向量为 \mathbf{n} ,其参数方程为

$$x_1 = a \cos \varphi, x_2 = b \sin \varphi, \quad (1)$$

椭圆边界法向量分量 n_i 可表示为

$$n_1(\varphi) = \frac{b \cos \varphi}{\sqrt{(a \sin \varphi)^2 + (b \cos \varphi)^2}}, n_2(\varphi) = \frac{a \sin \varphi}{\sqrt{(a \sin \varphi)^2 + (b \cos \varphi)^2}}. \quad (2)$$

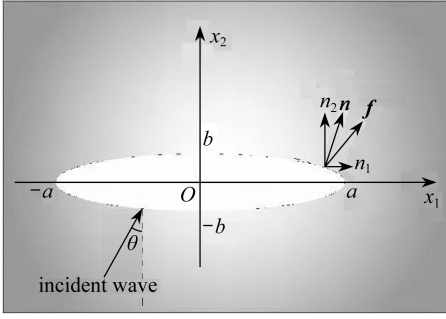
当弹性波入射到节理面处时将产生散射,所研究区域内总位移场 \mathbf{u} 和总应力场 $\boldsymbol{\sigma}$ 分别为

$$u_\alpha = u_\alpha^{\text{in}} + u_\alpha^{\text{sc}}, \quad (3)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^{\text{in}} + \sigma_{\alpha\beta}^{\text{sc}}, \quad (4)$$

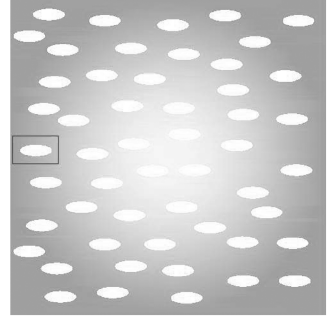
式中, u_α^{in} 为入射位移场, u_α^{sc} 为散射位移场, $\sigma_{\alpha\beta}^{\text{in}}$ 为入射应力场, $\sigma_{\alpha\beta}^{\text{sc}}$ 为散射应力场, $\alpha, \beta = 1, 2$ 分别表示坐标 x_1, x_2 方向。

当入射波以入射角 θ 的谐波作用于椭圆裂纹,入射位移场为



(a) 细观模型

(a) Meso-mechanical model



(b) 宏观模型

(b) Macro model

图1 基本计算模型

Fig.1 Basic calculation model

$$u_{\alpha}^{\text{in}}(\mathbf{x}) = U_{\alpha} e^{ik_L(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)}, \quad u_{\alpha}^{\text{in}} = u_{\alpha}^{\text{in}}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}, \quad (5)$$

式中, k_L 为纵波波数, ω 为圆频率, U_{α} 为谐波的振幅, \mathbf{x} 为任意观测点与原点的距离。

弹性本构关系:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda \delta_{\alpha\beta} u_{\gamma,\gamma} + \mu (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}), \quad (6)$$

式中, λ, μ 为 Lamé 常数; $\delta_{\alpha\beta}$ 为 Kronecker 符号。

入射弹性波为谐波, 在忽略体积力的情况下, 相应入射位移场、散射位移场和总的位移场均满足运动方程:

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} + \rho\omega^2 u_{\alpha} = 0. \quad (7)$$

裂纹面上自由边界条件

$$\sigma_{\alpha\beta}^{\text{in}}(\mathbf{x}_p) n_{\beta} + \sigma_{\alpha\beta}^{\text{sc}}(\mathbf{x}_p) n_{\beta} = f_{\alpha}^{\text{in}} + f_{\alpha}^{\text{sc}} = 0, \quad (8)$$

式中, n_{β} 为裂纹面的单位法向量, $\mathbf{x}_p \in (\Gamma^+ + \Gamma^-)$ 。

1.2 基本解法

上述分析给出了弹性波作用于非均匀岩体问题的数学描述。最终问题归结为在满足裂纹面边界条件(8)下, 求解波动方程(7), 得到散射位移场的解。

采用 Green 函数解法, 得散射位移场^[13]:

$$u_{\gamma}^{\text{sc}}(\mathbf{x}_p) = \int_{\Gamma^+} \sigma_{\alpha\beta\gamma}^G(\mathbf{x}; \mathbf{x}_p) \Delta u_{\alpha}(\mathbf{x}) n_{\beta} d\Gamma, \quad \mathbf{x}_p \notin \Gamma^+, \quad (9)$$

式中, $\sigma_{\alpha\beta\gamma}^G$ 为应力 Green 函数, $\Delta u_{\alpha} = u_{\alpha}(\mathbf{x})|_{x \in \Gamma^+} - u_{\alpha}(\mathbf{x})|_{x \in \Gamma^-}$ 为裂纹张开位移(COD), Γ 为裂纹边界。相应的位移 Green 函数满足运动方程:

$$(\lambda + \mu) u_{i\alpha,\alpha k}^G + \mu u_{lk,\alpha\alpha}^G + \rho\omega^2 u_{lk}^G + \delta_{lk} \delta(P, Q) = 0, \quad (10)$$

u_{lk}^G 就是在无限大平面弹性体内某一点 P 处的点载荷 x_l 方向分量, 引起任意一点 Q 的 x_k 方向上的位移分量, 上式中第 4 项表示点荷载按 Dirac 函数形式分布。其解为^[17]

$$u_{lm}^G(r) = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2 r} \left[\beta^2 \delta_{lm} \exp(i\beta r) - r \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_m} \left\{ \frac{\exp(i\alpha r)}{r} - \frac{\exp(i\beta r)}{r} \right\} \right], \quad (11)$$

其中

$$\alpha^2 = \rho\omega^2 / (\lambda + 2\mu), \quad \beta^2 = \rho\omega^2 / \mu, \quad r = (\delta_{lm} x_l x_m)^{1/2}, \quad l, m = 1, 2.$$

得到相应散射应力场为^[13]

$$\sigma_{\alpha\beta}^{\text{sc}} = \int_{\Gamma^+} [\lambda \delta_{\alpha\beta} \sigma_{\eta\varepsilon\gamma,\gamma}^G(\mathbf{x}; \mathbf{x}_p) + \mu \sigma_{\eta\varepsilon\alpha,\beta}^G(\mathbf{x}; \mathbf{x}_p) + \mu \sigma_{\eta\varepsilon\beta,\alpha}^G(\mathbf{x}; \mathbf{x}_p)] \Delta u_{\eta}(\mathbf{x}) n_{\varepsilon} ds, \quad (12)$$

对应的散射应力矢量为

$$T_{\alpha}^{\text{sc}}(\mathbf{x}_p) = -n_{\beta}(\mathbf{x}_p) \int_{\Gamma^+} [\lambda \delta_{\alpha\beta} \sigma_{\eta\varepsilon\gamma,\gamma}^G(\mathbf{x}; \mathbf{x}_p) + \mu \sigma_{\eta\varepsilon\alpha,\beta}^G(\mathbf{x}; \mathbf{x}_p) + \mu \sigma_{\eta\varepsilon\beta,\alpha}^G(\mathbf{x}; \mathbf{x}_p)] \Delta u_{\eta}(\mathbf{x}) n_{\varepsilon} ds, \quad (13)$$

以上(12)和(13)两式中, $\alpha, \beta = 1, 2$.

谐波入射下,入射位移场和应力场是已知的,散射场由式(9)和(12)确定.只要确定了谐波入射下的椭圆模型的 COD,散射位移场和应力场均可求解. COD 可通过裂纹面上的边界条件(8),采用数值积分的方法求解^[18].

$$u_R^{\text{sc}}(R, \Psi) = \frac{e^{i(k_L R + \pi/4)}}{(8\pi k_L R)^{1/2}} F_L(\Psi), \quad R \rightarrow \infty, \quad (14)$$

$$u_{\Psi}^{\text{sc}}(R, \Psi) = \frac{e^{i(k_T R + \pi/4)}}{(8\pi k_T R)^{1/2}} F_T(\Psi), \quad R \rightarrow \infty, \quad (15)$$

$$F_L(\psi) = -ik_L [2k^{-2} \tilde{x}_{\alpha} \tilde{x}_2 + (1 - 2k^{-2}) \delta_{\alpha 2}] \int_{-a}^{+a} e^{-ik_L \tilde{x}_{\gamma} \tilde{x}_1} \Delta u_{\alpha}(x_1) dx_1, \quad (16)$$

$$F_T(\psi) = -ik_T (\tilde{h}_{\alpha} \tilde{x}_2 + \tilde{h}_2 \tilde{x}_{\alpha}) \int_{-a}^{+a} e^{-ik_T \tilde{x}_{\gamma} \tilde{x}_1} \Delta u_{\alpha}(x_1) dx_1, \quad (17)$$

其中

$$k = k_T/k_L, \quad \tilde{x} = \begin{Bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{Bmatrix}, \quad \tilde{h} = \begin{Bmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \end{Bmatrix}. \quad (18)$$

宏观上,根据 Foldy^[19]方程,波数关于裂纹密度进行复数域展开,其有效波数为

$$K = k + \frac{m}{2} \frac{\text{Re}(F)}{k} + i \frac{m}{2} \frac{\text{Im}(F)}{k} + o\left\{\left[\frac{m}{2} \frac{\text{Re}(F)}{k}\right]^2\right\}, \quad (19)$$

式中, m 为裂纹密度, F 为纵波或横波的散射幅度如式(14),等式右边第 1 项 k 为不含裂纹岩体中纵波或横波的波数,第 2 项反映了弹性波的频散效应,第 3 项反映了弹性波的衰减效应,从中可以看出弹性波的频散效应和衰减效应之间是有联系的,较大的衰减通常与较大的频散相关.

频率 ω 对应的等效相速度的表达式:

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{2} m \gamma = \frac{1}{2} m \frac{\text{Im}(F_{L/T})}{k_{L/T}}, \quad K_{L/T}(\omega) = \frac{\omega}{C_{pL/T}(\omega)} + i\alpha(\omega),$$

$$\frac{C_{0L/T}}{C_{pL/T}(\omega)} = 1 + \frac{m}{2} \frac{\text{Re}(F_{L/T})}{\omega^2} C_{0L/T}^2 + o\left(\left(\frac{m}{2} \frac{\text{Re}(F_{L/T})}{\omega^2}\right)^2 C_{0L/T}\right), \quad (20)$$

上式中, α 为衰减系数(attenuation coefficient),由此可以求出相对波速和频率之间的关系.

在一个包含多种尺寸裂纹的系统中,对于第 i 种尺寸裂纹数密度 m_i ,散射场幅值 $(F_{L/T})_i$,采用线性叠加原理有:

$$K = k + \frac{1}{2k} \sum_i m_i \text{Re}((F_{L/T})_i) + i \frac{1}{2k} \sum_i m_i \text{Im}((F_{L/T})_i) + o(m_i), \quad (21)$$

衰减系数:

$$\alpha = \frac{1}{2k} \sum_i m_i \text{Im}((F_{L/T})_i), \quad (22)$$

其中, $i = 1, 2, 3, \dots$.

2 数值方法

为了计算得到散射场的幅值,进而得到相对速度、衰减系数和频率的关系,首先要求出裂纹张开位移.本文中,将其拓展到扁平椭圆形的裂纹,张开位移可由以下边界积分方程得到

$$T_{\alpha}^{\text{in}}(\mathbf{x}_p) = n_{\beta}(\mathbf{x}_p) \sum_{j=1}^N \left[H_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_p) \Delta u_{\eta}(\mathbf{x}) \Big|_{s_j^{j+1}} + \int_{s_j}^{s_{j+1}} J_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_p) \Delta u_{\eta}(\mathbf{x}) ds - \int_{s_j}^{s_{j+1}} H_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_p) \in_{\lambda\mu} \Delta u_{\eta, \lambda} n_{\mu} ds \right]. \quad (23)$$

对上式和边界条件在椭圆边界上进行离散,并对参数方程中的角度采用4点 Gauss 积分^[20]:

$$\begin{aligned} T_1^{\text{in}}(\varphi^P) &= \sum_{j=1}^N \Delta u_1^j(\varphi) \sum_{g=1}^4 [n_1(\varphi^P) J_{111}(r_g) + n_2(\varphi^P) J_{121}(r_g)] \Lambda \Delta \varphi s_g + \\ &2 \sum_{j=1}^N [\Delta u_1^{j+1}(\varphi) - \Delta u_1^j(\varphi)] \sum_{g=1}^4 [n_1(\varphi^P) H_{111}(r_g) + n_2(\varphi^P) H_{121}(r_g)] s_g + \\ &\sum_{j=1}^N \Delta u_2^j(\varphi) \sum_{g=1}^4 [n_1(\varphi^P) J_{112}(r_g) + n_2(\varphi^P) J_{122}(r_g)] \Lambda \Delta \varphi s_g + \\ &2 \sum_{j=1}^N [\Delta u_2^{j+1}(\varphi) - \Delta u_2^j(\varphi)] \sum_{g=1}^4 [n_1(\varphi^P) H_{112}(r_g) + n_2(\varphi^P) H_{122}(r_g)] s_g, \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2^{\text{in}}(\varphi^P) &= \sum_{j=1}^N \Delta u_1^j(\varphi) \sum_{g=1}^4 [n_1(\varphi^P) J_{211}(r_g) + n_2(\varphi^P) J_{221}(r_g)] \Lambda \Delta \varphi s_g + \\ &2 \sum_{j=1}^N [\Delta u_1^{j+1}(\varphi) - \Delta u_1^j(\varphi)] \sum_{g=1}^4 [n_1(\varphi^P) H_{211}(r_g) + n_2(\varphi^P) H_{221}(r_g)] s_g + \\ &\sum_{j=1}^N \Delta u_2^j(\varphi) \sum_{g=1}^4 [n_1(\varphi^P) J_{212}(r_g) + n_2(\varphi^P) J_{222}(r_g)] \Lambda \Delta \varphi s_g + \\ &2 \sum_{j=1}^N [\Delta u_2^{j+1}(\varphi) - \Delta u_2^j(\varphi)] \sum_{g=1}^4 [n_1(\varphi^P) H_{212}(r_g) + n_2(\varphi^P) H_{222}(r_g)] s_g, \quad (25) \end{aligned}$$

其中, N 为划分单元数, $\Delta \varphi = \pi/N$ 为离散的单元角度; $\Lambda = \sqrt{(a \sin \varphi)^2 + (b \cos \varphi)^2}$, r_g 为第 g 个 Gauss 积分点坐标, s_g 为相应点的加权系数;

张量

$$\begin{aligned} H_{\alpha\beta\eta} &= \lambda \delta_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\varepsilon} \sigma_{\eta\varepsilon\gamma}^G + \mu (\varepsilon_{\beta\varepsilon} \sigma_{\eta\varepsilon\alpha}^G + \varepsilon_{\alpha\varepsilon} \sigma_{\eta\varepsilon\beta}^G), \\ J_{\alpha\beta\eta} &= -\rho \omega^2 [\lambda \delta_{\alpha\beta} n_{\gamma} u_{\eta\gamma}^G + \mu (n_{\beta} u_{\eta\alpha}^G + n_{\alpha} u_{\eta\beta}^G)], \end{aligned}$$

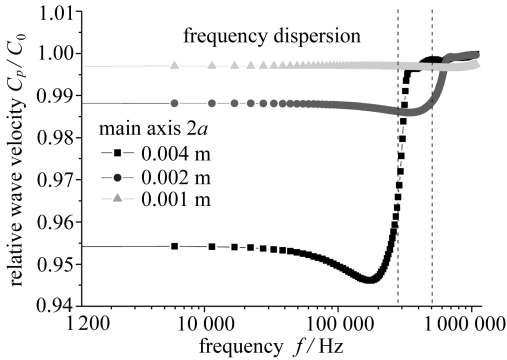
式中指标 $\alpha, \beta, \eta = 1, 2$.

3 多种尺寸裂纹对弹性波的影响

3.1 特征频率随裂纹尺寸的变化规律

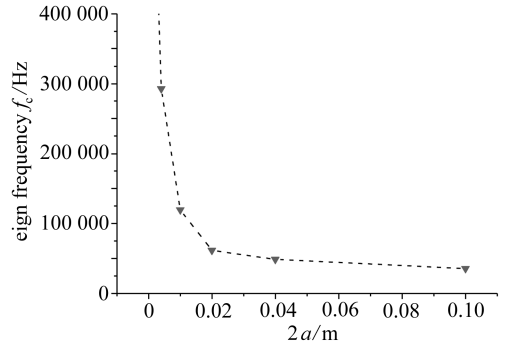
讨论多种尺寸裂纹的频散规律,裂纹尺寸和特征频率是重要指标.对于扁平椭圆模型,为简化分析,固定椭圆裂纹的纵横比 $b/a = 0.1$,且其他条件相同的情况下,计算不同长度 $2a$ 下的频散曲线,计算结果见图2.如图所示,当数密度一定时,随着裂纹长度的增长,频散效应明显增大.另一方面,随着裂纹长度的增长,其相对波速剧烈变化的频率范围向低频移动,该频率范围的中心对应所谓的“特征频率”^[14],与 $f_c = kC_0/D$ 相近,即图中的虚线, k 与材料相关.上式中: C_0 为完整岩石弹性波速, D 为岩体中缺陷的特征长度,此处取为裂纹平均长度.此时,相对

波速随频率剧烈变化的机制为共振散射 (resonant scattering). 由此计算特征频率随裂纹长度的变化关系, 其结果见图 2(b). 如图所示, 特征频率与裂纹长度的关系与公式 $f_c = kC_0/D$ 相符合, 式中 k 为 1/5.



(a) 不同裂纹尺寸下的频散曲线

(a) Dispersion curve at different crack sizes



(b) 特征频率与椭圆半长轴的变化关系

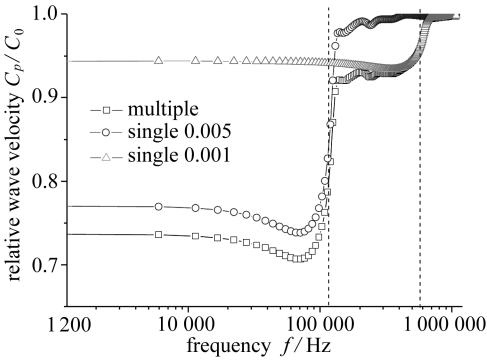
(b) Characteristic frequency vs. semimajor axis

图 2 裂纹尺寸对频散的影响

Fig. 2 Crack size effect on frequency dispersion

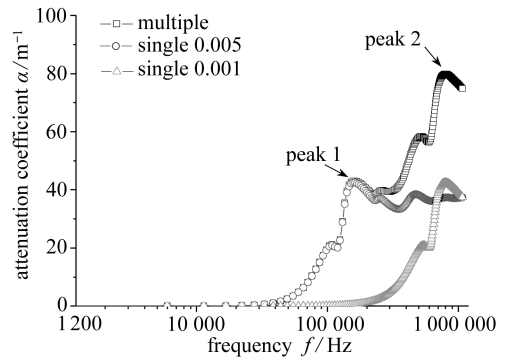
3.2 两种分布尺寸的分析

考虑岩体内部含有两种分布尺寸的扁平椭圆裂纹的情况. 为具体计算, 不妨取较大尺寸的裂纹长轴为 10 mm, 较小尺寸裂纹长轴为 2 mm, 控制小尺寸裂纹密度是大尺寸裂纹的 5 倍, 其计算结果见图 3.



(a) 频散曲线

(a) Dispersion curve



(b) 衰减系数曲线

(b) Attenuation coefficient

图 3 含两种尺寸裂纹岩体的频散与衰减

Fig. 3 Dispersion and attenuation for rock mass with two kind of sizes crack

图 3(a) 为含两种尺寸的缺陷与分别含这两种尺寸缺陷的岩体频散效应的对比. 采用线性叠加原理, 含两种尺寸 (10 mm 与 2 mm 裂纹) 缺陷的岩体的频散效应是两种裂纹共同贡献的结果. 但不同尺寸的裂纹具有不同的特征频率, 本计算中, 10 mm 裂纹的特征频率为 $f_{c1} \approx 1.2 \times 10^5$ Hz, 2 mm 裂纹特征频率为 $f_{c2} \approx 6 \times 10^5$ Hz. 这两个特征频率在含两种尺寸结合的岩体频散曲线中分别得到了体现, 须特别说明的是: 当两种尺寸比较接近时, 互相影响, 这种阶梯跳跃不明显.

图 3(b) 为相应的衰减系数变化关系. 由此可见, 单种尺寸的衰减系数值先增加再趋于平坦, 而两种尺寸共同起作用时衰减曲线出现明显的两个峰 (共振峰) 值, 分别对应于两种尺寸

的衰减峰。

由此,可以推测:两种或者两种以上的尺寸作用的频散效应可以统一地体现在同一条频散曲线上;每一种尺寸的裂纹对应一个特征频率,当各种尺寸裂纹的数密度分配合理时,相应的由等效介质理论到射线理论的过渡段都能表现出来,出现一定程度的阶梯跳跃性。同时,尺寸种数越多,裂纹分布覆盖越广,这种阶梯性跳跃会相互叠加。

3.3 连续尺寸分布裂纹的分析

考虑岩体内部含有连续分布尺寸的扁平椭圆裂纹的情况。以某一裂纹长度为平均值,在裂纹总数相同的情况下,采用两种不同情况的统计。如图4,长轴尺寸区间 $[2a_{\min}, 2a_{\max}]$ 服从均匀分布和正态分布, $a_{\min} = 0.00025 \text{ m}$, $a_{\max} = 0.05 \text{ m}$ 。其对半长轴 a 的分布函数解析式为

$$1) \quad f_1(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(a-a_0)^2}{2\sigma^2}\right),$$

其中,平均值 $a_0 = (a_{\min} + a_{\max})/2$, 标准差 $\sigma = (a_{\max} - a_{\min})/6$ ($\pm 3\sigma$ 原则);

$$2) \quad f_2(a) = 1/(a_{\max} - a_{\min}).$$

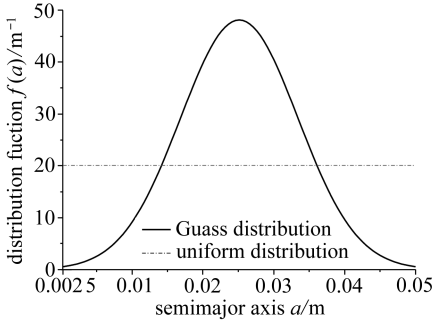


图4 裂纹数的分布函数

Fig. 4 Distribution functions for crack number vs. semimajor axis

两种情况下的频散和衰减特性曲线如图5所示。与单一尺寸 $a_0 = (a_{\min} + a_{\max})/2$ 的裂纹情况(i)相比,由于系统的裂纹总数目相等,其频散和衰减强度整体上比较接近,但由于不同尺寸的裂纹对应不同的特征频率,而数目分配差异会造成一些差别。总体上可分为4个阶段: I 阶段属于等效介质理论区,频散强度比较(i)<(iii)<(ii); IV 阶段属于射线理论区,其相对波速均在“1”附近保持稳定; II 和 III 阶段为波速急剧变化的过渡段,相比单种尺寸的频散曲线(i),其变化区域明显拓宽了,这是多种尺寸对应的特征频率段相互叠加后的最终结果。

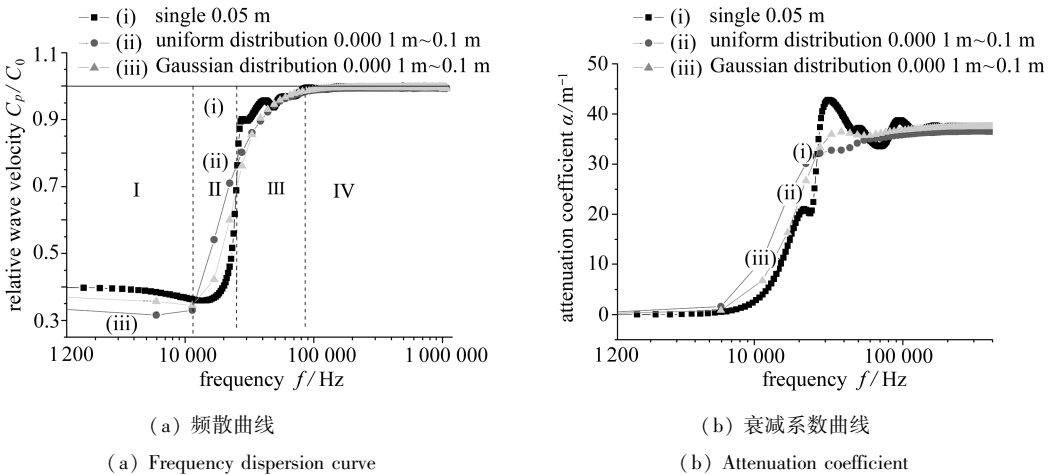


图5 多种尺寸裂纹衰减曲线

Fig. 5 Dispersion and attenuation for rock mass with multi-size crack

4 讨 论

下面基于两个具体的实验结果讨论材料内部分布尺寸的缺陷对弹性波传播规律的影响。

4.1 含两种缺陷尺寸的玄武岩

文献[15]中所用的玄武岩试件实际上含有两种缺陷尺寸:玄武岩本身含有的天然的毫米和亚毫米量级的微缺陷;以及人为预制的厘米量级的缺陷. 对其进行频率范围:25 kHz ~ 1 000 kHz 的声波测试,得到波速与频率的关系,见图 5 中的数据点^[15]. 测试结果表明,在频率 10 kHz ~ 1 000 kHz 频段内,波速随频率的变化,具有明显的频散现象,而且出现了明显的“阶梯跳跃”趋势. 结合 SEM 实验结果,取长度为 2 cm 和 2 mm 的两种裂纹进行计算,其结果见图 6. 由此可见,两种尺寸的缺陷可以很好地模拟实验结果.

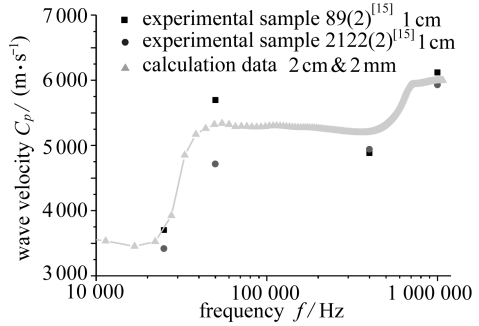


图 6 玄武岩频散曲线

Fig. 6 Frequency dispersion curve for basalt

4.2 某新鲜水泥砂浆实验的讨论

文献[16]中,利用声波测试技术,对一种新鲜水泥砂浆进行了 25 kHz 到 1 MHz 频率的测试,获得衰减曲线见图 7 中的虚线. 其测得的衰减信号明显地分为低频部分和高频部分. Aggelis 等^[16]仅从内含孔洞或者弹性体的多次散射理论对该低高频段频散衰减特性进行了分析,对高频衰减信号进行理论解释.

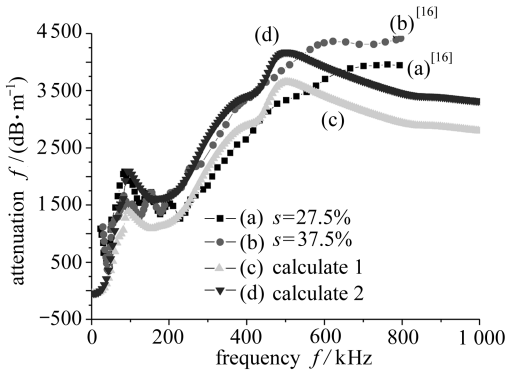


图 7 水泥砂浆实验衰减曲线

Fig. 7 Attenuation curve for cement mortar

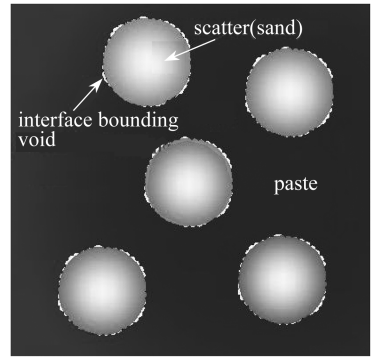


图 8 沙粒与水泥结合形成的小尺寸孔隙

Fig. 8 Mesoscopic cracks are formed at interface between sand particle and cement

事实上,新鲜水泥砂浆是由水、水泥、砂颗粒以及骨料组成的混合物,在制作过程和养护过程都会形成很多的细微观缺陷,典型的有:发泡造成的气泡,沙粒与水泥、水之间结合界面处形成的孔洞(如图 8). 这些不同尺寸情况下的孔洞缺陷,会在衰减曲线上有所体现. 根据文献[16],估算此材料内部至少含有 1.6 cm 和 0.3 cm 的缺陷,分别为对应于引起 150 kHz 处的衰减峰值的“气泡”和对应于引起 400 kHz 处的衰减峰微孔洞. 由此,分别对两种含砂量的材料进行模拟,计算结果见图 7 中的实线,其中:图 7 中(a)含沙量 27.5% 和(c)对应,(b)含沙量 37.5% 和(d)对应,拟合结果较好. 也须注意,在高频段,拟合结果比实验结果低,这说明可能

还存在更小尺寸的微缺陷,比如水泥砂浆结合产生的微米量级凝胶孔(其体积约为总体积的10%)。总之,利用多种尺寸分布缺陷散射理论,对 Aggelis 的实验结果给出了另一种解释。

5 结 论

基于单一尺寸的散射理论,利用线性叠加原理,建立了宏观上的多种尺寸扁平椭圆孔洞散射分析模型,实现了二维均匀弹性岩体中含扁平椭圆缺陷的频散规律分析。

不同尺寸裂纹对应不同的特征频率,裂纹尺寸越大,特征频率越低。计算并讨论了裂纹尺寸分别为两种尺寸分布、均匀分布、正态分布情况下的散射规律。计算结果表明:当裂纹尺寸的种数较少的情况下,频散曲线呈“阶梯跳跃”状,衰减系数曲线表现出不同的峰值;当裂纹尺寸呈连续的均匀分布或者正态分布时,频散曲线具有较宽的特征频率段,Rayleigh 散射区和米氏散射区均被弱化,呈反“Z”字型。

结合实例,分析了文献[15]中两种尺寸裂纹系统中的频散现象,本模型能很好地拟合该实验数据;结合文献[16]分析了一种新鲜水泥砂浆的声波测试曲线,利用两种尺寸裂纹体系,对实验中的衰减规律给出了合理解释。

本文的理论模型与计算实现了多种尺寸裂纹的频散特性的研究,对工程勘探和无损检测技术提供了很好的参考和指导价值。然而,本模型仅仅采用线性叠加思想,没有考虑多次散射问题,与实际情况有一定的差异,下一步将讨论考虑多次散射的多种尺寸分布裂纹的散射问题。

致谢 感谢浙江华东工程安全技术有限公司“金沙江白鹤滩水电站坝区玄武岩弹性波频散特性和尺度效应研究技术研究”项目组给予的支持。

参考文献(References):

- [1] Glover J, Schweizer A, Christen M, Gerber W, Leine R, Bartelt P. Numerical investigation of the influence of rock shape on rockfall trajectory[J]. *Geophysical Research Abstracts*, 2012, **14**: 11022.
- [2] Shapiro A A, Bedrikovetsky P G. A stochastic theory for deep bed filtration accounting for dispersion and size distributions[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2010, **389**(13): 2473-2494.
- [3] Adelinet M, Fortin J, Guéguen Y. Dispersion of elastic moduli in a porous-cracked rock: theoretical predictions for squirt-flow[J]. *Tectonophysics*, 2011, **503**(1/2): 173-181.
- [4] Ke W, Castaings M, Bacon C. 3D finite element simulations of an air-coupled ultrasonic NDT system[J]. *NDT & E International*, 2009, **42**(6): 524-533.
- [5] Anders Løvstad, Peter Cawley. The reflection of the fundamental torsional guided wave from multiple circular holes in pipes[J]. *NDT & E International*, 2011, **44**(7): 553-562.
- [6] 葛瑞. 马沃可,塔潘. 木克基,杰克. 德沃金. 岩石物理手册:孔隙介质中地震分析工具[M]. 合肥:中国科学技术大学,2008: 33-57. (Gray Mavko, Tapan Mukerji, Jack Dvorkin. *The Rock Physics Handbook: Tools for Seismic Analysis in Porous Media*[M]. Hefei: University of Science and Technology of China, 2008: 33-57. (Chinese version))
- [7] Zimmer M A, Prasad M, Mavko G, Nur A. Seismic velocities of unconsolidated sands—Part

- 1: pressure trend from 0.1 to 20 MPa[J]. *Geophysics*, 2007, **72**(1): E1-E13.
- [8] Bachrach R, Avseth P. Rock physics modeling of unconsolidated sands: accounting for nonuniform contacts and heterogeneous stress fields in the effective media approximation with applications to hydrocarbon exploration[J]. *Geophysics*, 2008, **73**(6): E197-E209.
- [9] Pride S R, Berryman J. Linear dynamics of double-porosity dual-permeability materials— I : governing equations and acoustic attenuation[J]. *Physical Review E*, 2003, **68**(3): 036603.
- [10] Pride S R, Berryman J. Linear dynamics of double-porosity dual-permeability materials— II : fluid transport equations[J]. *Physical Review E*, 2003, **68**(3): 036604.
- [11] Zhang Ch, Achenbach J D. Scattering by multiple crack configurations[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1989, **55**(1): 104-110.
- [12] Achenbach J D, Gautesen A K, McMaken H. *Ray Methods for Waves in Elastic Solids: With Applications to Scattering by Cracks*[M]. Boston, London, Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program, 1982: 33-46.
- [13] 刘永贵, 徐松林, 席道瑛, 李广场, 郑文, 邓向允. 节理玄武岩体弹性波频散效应研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, **29**(S1): 3314-3320. (LIU Yong-gui, XU Song-lin, XI Dao-ying, LI Guang-chang, ZHEN Wen, DENG Xiang-yun. Dispersion effect of elastic wave in jointed basalt[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2010, **29**(S1): 3314-3320. (in Chinese))
- [14] 徐松林, 刘永贵, 席道瑛, 李广场, 谭子翰. 弹性波在含双裂纹岩体中的传播分析[J]. 地球物理学报, 2012, **55**(3): 944-952. (XU Song-lin, LIU Yong-gui, XI Dao-ying, LI Guang-chang, TAN Zi-han. Analysis of the propagation of elastic wave in rocks with a double-crack model [J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2012, **55**(2): 166-176.)
- [15] 邓向允, 徐松林, 李广场, 刘永贵, 郑文, 席道瑛. 缺陷对玄武岩中声波波速影响的试验研究 [J]. 实验力学, 2009, **24**(1): 13-20. (DENG Xiang-yun, XU Song-lin, LI Guang-chang, LIU Yong-gui, ZHENG Wen, XI Dao-ying. Experimental study of defect effect on sonic velocity in basalt[J]. *Chinese Journal of Experimental Mechanics*, 2009, **24**(1): 13-20. (in Chinese))
- [16] Aggelis D G, Polyzos D, Philippidis T P. Wave dispersion and attenuation in fresh mortar: theoretical predictions and experimental results[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2005, **53**(4): 857-883.
- [17] 钟伟芳, 聂国华. 弹性波的散射理论[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1997. (ZHONG Weifang, NIE Guo-hua. *Theory of Elastic Wave Scattering*[M]. Wuhan: Chinese by Huazhong University of Science and Technology Press, 1997. (in Chinese))
- [18] Zhang Ch, Gross D. Wave attenuation and dispersion in randomly cracked solids— I : slit cracks[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1993, **31**(6): 841-858.
- [19] Foldy L L. The multiple scattering of waves [J]. *Physical Review*, 1945, **67**(3/4): 107-119.
- [20] 王元淳. 边界元法基础[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1988. (WANG Yuan-chun. *Foundation of Boundary Element Method*[M]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University Press, 1988. (in Chinese))

Scattering of Elastic Waves by Multi-Size Defects in Rock Mass

TAN Zi-han¹, XU Song-lin^{1,2}, LIU Yong-gui¹, XI Dao-ying³

(1. CAS Key Laboratory of Mechanical Behavior and Design of Materials, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, P. R. China;

2. Ecole Polytechnique Federale De Lausanne (EPFL), School of Architecture, Civil and Environmental Engineering, Laboratory of Rock Mechanics (LMR), 1015 Lausanne, Switzerland;

3. Mengcheng National Geophysical Observatory, School of Earth and Space Science, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, P. R. China)

Abstract: Scattering laws in rock mass which contained flat ellipse crack was researched. The Green function method was presented at mesoscopic scale; linear superposition idea was applied into this model to get wave velocity dispersion and attenuation coefficient at macroscopic scale. The characteristic frequency in frequency dispersion curve is negative correlation with crack size. It had been discovered that a Ladder jump pattern could be presented in frequency dispersion curve if rock mass contains discontinuous size crack, while its characteristic frequency region would be widened if the crack size continues to distribute, such as uniform distribution or Gauss distribution. With two acoustic testsc combined, the rationality and feasibility of this theoretic model is been discussed.

Key words: defected rock mass; frequency dispersion; elastic harmonic wave; multi-size; characteristic frequency; Green function