

箱式约束变分不等式的一类新光滑 gap 函数*

张丽丽¹, 李兴斯²

(1. 大连理工大学 数学科学学院, 辽宁 大连 116023;

2. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116023)

摘要: 针对箱式约束变分不等式问题, 利用一类积分型全局最优性条件, 提出了一个新光滑 gap 函数. 该光滑 gap 函数形式简单且具有较好的性质. 利用该 gap 函数, 箱式约束变分不等式可转化为等价光滑优化问题进行求解. 进一步地, 讨论了可保证等价光滑优化问题的任意聚点为箱式约束变分不等式问题解的条件. 以一个简单的摩擦接触问题为例阐释了该方法的应用. 最后, 利用标准的变分不等式考题验证了方法的有效性.

关键词: 箱式约束变分不等式问题; 光滑 gap 函数; 积分型全局最优性条件

中图分类号: O224; O302 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.01.004

引言

变分不等式问题(简记为 VIP)即寻找向量 $\mathbf{x} \in S$ 满足如下不等式:

$$\langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle \geq 0, \quad \forall \mathbf{y} \in S, \quad (1)$$

其中, $S \subset \mathbf{R}^n$ 为非空闭凸集, $\mathbf{F}: S \rightarrow \mathbf{R}^n$ 为向量值函数, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 \mathbf{R}^n 上的内积. 记 VIP 的最优解集为 S^* . 本文着重讨论箱式约束变分不等式问题(简记为 $\text{VIP}([l, u], \mathbf{F})$), 即 S 为如下长方体:

$$S := \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid l_i \leq x_i \leq u_i, i = 1, 2, \dots, n \}, \quad (2)$$

其中, $l_i \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $u_i \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 分别表示变量的下界与上界. 若 $l = 0, u = +\infty$, 即 $S = \mathbf{R}_+^n$, 则 VIP 退化为一般的互补问题. 不难验证, $\text{VIP}([l, u], \mathbf{F})$ 等价于混合互补问题^[1]. 在工程领域, 变分不等式与互补问题在诸如摩擦接触力学分析、弹塑性分析及流体弹性动态润滑问题等方面均有广泛应用^[2-4]. 特别是对于不能直接转化为势函数极小化的非关联流动问题, 如摩擦接触问题和非关联流动弹塑性问题, 变分不等式和互补问题被认为是其最恰当的数学表述形式^[5]. 考虑到与变分不等式和互补问题密切联系的最优化领域在算法方面的强大支撑, 近年来关于变分不等式与互补问题的研究也颇受工程计算领域的关注^[6].

通过定义价值函数, 将变分不等式转化为等价优化问题进行求解, 是目前变分不等式问题研究的热点之一^[7]. 其中较重要的一类价值函数则为 gap 函数, 已有的 gap 函数多源于 Aus-

* 收稿日期: 2012-06-20; 修订日期: 2012-09-07

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10902077; 11172209; 10572031)

作者简介: 张丽丽(1982—), 女, 山东人, 博士生(E-mail: jnlilizhang@163.com);

李兴斯(1942—), 男, 教授, 博士生导师(通讯作者. E-mail: xingsi_li@yahoo.com.cn).

lender 提出的如下经典 gap 函数^[8]：

$$g(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{y} \in S} \{ \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \}, \tag{3}$$

显然, $g(\mathbf{x})$ 在集合 S 上非负, 且 $g(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in S$ 当且仅当 \mathbf{x} 为 VIP 的解, 从而 VIP 可转化为如下最优化问题：

$$\min_{\mathbf{x} \in S} g(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{y} \in S} \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle. \tag{4}$$

遗憾的是, 一般情况下, gap 函数 $g(\mathbf{x})$ 不可微. 为克服此点, 一些可微 gap 函数被提出, 如 Fukushima 提出的正则化 gap 函数、Peng 提出的 D-gap 函数等, 具体可参见文献[9-11].

不同于上述已有的这些可微 gap 函数, 本文通过对 Auslender 经典 gap 函数应用一类积分型全局最优性条件, 提出一类新的光滑 gap 函数. 所提出的新光滑 gap 函数具有如下优点: i) 形式简单, 具有显式表达; ii) 若 \mathbf{F} 连续可微, 则该函数亦连续可微; iii) 利用此光滑 gap 函数可将 $\text{VIP}([\mathbf{l}, \mathbf{u}], \mathbf{F})$ 转化为等价可微约束优化问题, 从而可利用已有的可微约束优化算法进行求解; iv) 若 $\nabla \mathbf{F}$ 为 P-矩阵 (见定义 1), 则由此光滑 gap 函数所得到的等价可微优化问题的任意聚点均为 $\text{VIP}([\mathbf{l}, \mathbf{u}], \mathbf{F})$ 的解.

1 预备知识

首先, 给出如下的基本定义及对所应用的积分型全局最优性条件的简单介绍.

定义 1 矩阵 $\mathbf{M} \in R^{n \times n}$ 称为

- i) P_0 -矩阵, 若其每个主子式均非负;
- ii) P-矩阵, 若其每个主子式均为正.

从定义可以看出, 半正定矩阵为 P_0 -矩阵, 正定矩阵为 P-矩阵.

定义 2 函数 $\mathbf{F}: S \rightarrow R^n, S \subseteq R^n$ 称为

- i) 单调的, 若对 S 内的任意 \mathbf{x}, \mathbf{y} , 均有 $(\mathbf{x} - \mathbf{y})^T (\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})) \geq 0$;
- ii) 严格单调的, 若对 S 内的任意 \mathbf{x}, \mathbf{y} 且 $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, 均有 $(\mathbf{x} - \mathbf{y})^T (\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})) > 0$;
- iii) 模为 ξ 的强单调的, 若对 S 内的任意 \mathbf{x}, \mathbf{y} , 均有 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})^T (\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})) \geq \xi \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$, 其中 $\xi > 0$ 为常数;

iv) P_0 -函数, 若对 S 内的任意 \mathbf{x}, \mathbf{y} 且 $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, 存在至少一个指标 i 使得

$$x_i \neq y_i, (x_i - y_i)(F_i(\mathbf{x}) - F_i(\mathbf{y})) \geq 0; \tag{5}$$

v) P-函数, 若对 S 内的任意 \mathbf{x}, \mathbf{y} 且 $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, 存在至少一个指标 i 使得

$$x_i \neq y_i, (x_i - y_i)(F_i(\mathbf{x}) - F_i(\mathbf{y})) > 0; \tag{6}$$

vi) Uniform P-函数, 若存在正常数 $\mu > 0$, 使对 S 内的任意 \mathbf{x}, \mathbf{y} , 存在至少一个指标 i 使得

$$(x_i - y_i)(F_i(\mathbf{x}) - F_i(\mathbf{y})) \geq \mu \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2. \tag{7}$$

从定义可以看出, 严格单调函数必单调, 单调函数均为 P_0 -函数, 强单调函数为 uniform P-函数. 若 \mathbf{F} 可微, 则 \mathbf{F} 为单调函数等价于, 对于所有的 $\mathbf{x} \in S$, 均有 $\nabla \mathbf{F}(\mathbf{x})$ 为半正定矩阵, 进而为 P_0 -矩阵; \mathbf{F} 为严格单调函数等价于, 对于所有的 $\mathbf{x} \in S$, 均有 $\nabla \mathbf{F}(\mathbf{x})$ 为正定矩阵, 进而为 P-矩阵. 若 \mathbf{F} 为 uniform P-函数, 则 $\nabla \mathbf{F}(\mathbf{x})$ 为 P-矩阵.

Hiriart-Urruty 在文献[12]中介绍了一类积分型全局最优性条件, 该条件以积分的形式刻画了优化问题的全局最优值: 给定连续函数 $f: R^n \rightarrow R$ 及非空有界开集的闭包 $\Omega \subset R^n$, 则 f 在 Ω 上的全局极大值有如下刻画:

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} f(\mathbf{x}) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \ln \int_{\Omega} \exp(pf(\mathbf{x})) d\mathbf{x}. \tag{8}$$

事实上,该积分型全局最优性条件可以理解为是 Laplace 对于形如

$$\int_{\mathbf{R}} \exp(pf(\mathbf{x})) d\mathbf{x}$$

的实积分在 $p \rightarrow \infty$ 时的渐近行为的研究结果^[13-14]. 而 Laplace 指出的这个结果对于大偏差理论尤其是大偏差中的率函数理论的发展起到了相当大的促进作用^[15]. 相应地, f 在 Ω 上的全局最优解则有如下定理结果(文献[12]定理 4.1).

定理 1 若 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 为某非空有界开集的闭包, 函数 $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ 连续, 且 f 在 Ω 上的全局极大值点 \mathbf{x}^* 唯一. 则点列

$$\mathbf{x}^k = \frac{\int_{\Omega} \mathbf{x} \exp(kf(\mathbf{x})) d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} \exp(kf(\mathbf{x})) d\mathbf{x}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (9)$$

在 $k \rightarrow \infty$ 时收敛到 \mathbf{x}^* .

2 箱式约束变分不等式的新光滑 gap 函数

对经典 gap 函数 $g(\mathbf{x})$ 应用积分型全局最优性条件, 得到

$$g(\mathbf{x}) = \lim_{p \rightarrow \infty} g_p(\mathbf{x}) := \frac{1}{p} \ln \int_S \exp(p \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle) d\mathbf{y}. \quad (10)$$

对于 VIP($[l, u], \mathbf{F}$) 有

$$g_p(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle + \frac{1}{p} \ln \int_S \exp(p \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), -\mathbf{y} \rangle) d\mathbf{y} = \\ \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle + \frac{1}{p} \ln \int_l^u \exp(p \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), -\mathbf{y} \rangle) d\mathbf{y}.$$

令集合 $I(\mathbf{x}) = \{i \mid F_i(\mathbf{x}) = 0\}$, 则

$$g_p(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle + \frac{1}{p} \ln \int_l^u \exp(p \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), -\mathbf{y} \rangle) d\mathbf{y} = \\ \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle + \frac{1}{p} \ln \left(\prod_{i \notin I(\mathbf{x})} \frac{\exp(-pF_i(\mathbf{x})l_i) - \exp(-pF_i(\mathbf{x})u_i)}{pF_i(\mathbf{x})} \prod_{i \in I(\mathbf{x})} (u_i - l_i) \right) = \\ \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle + \frac{1}{p} \sum_{i \notin I(\mathbf{x})} \ln \left(\frac{\exp(-pF_i(\mathbf{x})l_i) - \exp(-pF_i(\mathbf{x})u_i)}{pF_i(\mathbf{x})} \right) + \\ \frac{1}{p} \sum_{i \in I(\mathbf{x})} \ln(u_i - l_i). \quad (11)$$

下面的定理结果表明, 若 \mathbf{F} 是连续可微的, 则函数 $g_p(\mathbf{x})$ 亦是连续可微的, 从而函数 $g_p(\mathbf{x})$ 可看作是对经典 gap 函数 $g(\mathbf{x})$ 的光滑化, 故称其为新光滑 gap 函数.

定理 2 若 \mathbf{F} 是连续的, 则函数 $g_p(\mathbf{x})$ 亦是连续的. 进一步地, 若 \mathbf{F} 是连续可微的, 则 $g_p(\mathbf{x})$ 亦是连续可微的, 且其一阶导数为

$$[\nabla g_p(\mathbf{x})]_i = \begin{cases} F_i(\mathbf{x}) + \nabla F_i(\mathbf{x}) \left[x_i - \frac{l_i \exp(-pF_i(\mathbf{x})l_i) - u_i \exp(-pF_i(\mathbf{x})u_i)}{\exp(-pF_i(\mathbf{x})l_i) - \exp(-pF_i(\mathbf{x})u_i)} - \frac{1}{pF_i(\mathbf{x})} \right], & i \notin I(\mathbf{x}), \\ F_i(\mathbf{x}) + \nabla F_i(\mathbf{x}) \left(x_i - \frac{u_i + l_i}{2} \right), & i \in I(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (12)$$

其中, $[\nabla g_p(\mathbf{x})]_i$ 表示向量 $\nabla g_p(\mathbf{x})$ 的第 i 个元素.

证明 对于函数

$$g_p(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle + \frac{1}{p} \ln \int_S \exp(p \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), -\mathbf{y} \rangle) d\mathbf{y},$$

则由含参变量积分的性质^[16]可以得到

$$\nabla g_p(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{x} - \frac{\int_S \nabla \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{y} \exp(p \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle) d\mathbf{y}}{\int_S \exp(p \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle) d\mathbf{y}}.$$

所以,对于 $\text{VIP}([l, u], \mathbf{F})$, 有

$$\begin{aligned} \nabla g_p(\mathbf{x}) &= \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{x} - \frac{\int_S \nabla \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{y} \exp(p \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle) d\mathbf{y}}{\int_S \exp(p \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle) d\mathbf{y}} = \\ &\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{x} - \frac{\int_l^u \nabla \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{y} \exp(p \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle) d\mathbf{y}}{\int_l^u \exp(p \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle) d\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

经简单运算即可得到式(12)的结果. □

利用新光滑 gap 函数,可得到 $\text{VIP}([l, u], \mathbf{F})$ 的如下等价光滑优化问题:

$$\begin{aligned} \min g_p(\mathbf{x}) &= \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle + \frac{1}{p} \sum_{i \in I(\mathbf{x})} \ln \left(\frac{\exp(-pF_i(\mathbf{x})l_i) - \exp(-pF_i(\mathbf{x})u_i)}{pF_i(\mathbf{x})} \right) + \\ &\frac{1}{p} \sum_{i \in I(\mathbf{x})} \ln(u_i - l_i), \quad \text{s. t. } l_i \leq x_i \leq u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (13)$$

鉴于目前已有的优化求解方法多数仅能得到问题的稳定点,下面分析优化问题(13)的稳定点可保证为 $\text{VIP}([l, u], \mathbf{F})$ 解的条件. 首先,给出关于经典 gap 函数 $g(\mathbf{x})$ 的关于最优解集 S^* 的稳定点特征,可参见文献[17].

引理 1 对于任意的 $\mathbf{x} \in S$, 令 $Y(\mathbf{x})$ 表示优化问题(4)的最优解集, 则

$$\mathbf{x} \in S^* \Leftrightarrow \mathbf{x} \in Y(\mathbf{x}).$$

令

$$[y_p(\mathbf{x})]_i = \begin{cases} \frac{l_i \exp(-pF_i(\mathbf{x})l_i) - u_i \exp(-pF_i(\mathbf{x})u_i)}{\exp(-pF_i(\mathbf{x})l_i) - \exp(-pF_i(\mathbf{x})u_i)} + \frac{1}{pF_i(\mathbf{x})}, & i \notin I(\mathbf{x}), \\ \frac{u_i + l_i}{2}, & i \in I(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (14)$$

则由定理 1, 若 $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$, 即 Auslender 所提出的 gap 函数 $g(\mathbf{x})$ 有唯一最优解 $\mathbf{y}^*(\mathbf{x})$, 则有

$$\mathbf{y}^*(\mathbf{x}) = \lim_{p \rightarrow \infty} \mathbf{y}_p(\mathbf{x}). \quad (15)$$

而若 $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, 则式(15)仍然成立, 得到的是 gap 函数 $g(\mathbf{x})$ 的某个最优解 $\mathbf{y}^*(\mathbf{x})$.

定理 3 假设 \mathbf{F} 连续可微, $\nabla \mathbf{F}(\mathbf{x})$ 为 P-矩阵. 若 $\{\mathbf{x}^p\}$ 为优化问题(13)的稳定点列, \mathbf{x}^* 为 $\{\mathbf{x}^p\}$ 的聚点, 则 \mathbf{x}^* 为箱式约束变分不等式的解.

证明 由定理 2 可知, \mathbf{F} 连续从而 $g_p(\mathbf{x})$ 连续. 若 $\{\mathbf{x}^p\}$ 为优化问题(13)的稳定点列, \mathbf{x}^* 为 $\{\mathbf{x}^p\}$ 的聚点, 则有

$$\begin{aligned} \nabla g_p(\mathbf{x}^*) &= \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) + \sum_{i \notin I(\mathbf{x}^*)} \nabla F_i(\mathbf{x}^*) \times \\ &\left(x_i^* - \frac{l_i \exp(-pF_i(\mathbf{x}^*)l_i) - u_i \exp(-pF_i(\mathbf{x}^*)u_i)}{\exp(-pF_i(\mathbf{x}^*)l_i) - \exp(-pF_i(\mathbf{x}^*)u_i)} - \frac{1}{pF_i(\mathbf{x}^*)} \right) + \\ &\sum_{i \in I(\mathbf{x}^*)} \nabla F_i(\mathbf{x}^*) \left(x_i^* - \frac{u_i + l_i}{2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

即

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) + \langle \nabla \mathbf{F}(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}^* - \mathbf{y}(\mathbf{x}^*) \rangle = 0.$$

由 $\nabla \mathbf{F}(\mathbf{x})$ 为 P-矩阵, 从而存在指标 i 使得

$$(x_i^* - y_i(\mathbf{x}^*)) [\langle \nabla \mathbf{F}(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}^* - \mathbf{y}(\mathbf{x}^*) \rangle]_i > 0. \quad (17)$$

对式(16)的第 i 项乘以 $x_i^* - y_i(\mathbf{x}^*)$, 得到

$$(x_i^* - y_i(\mathbf{x}^*)) F_i(\mathbf{x}^*) + (x_i^* - y_i(\mathbf{x}^*)) [\langle \nabla \mathbf{F}(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}^* - \mathbf{y}(\mathbf{x}^*) \rangle]_i = 0. \quad (18)$$

由 $\mathbf{y}(\mathbf{x}^*) \in Y(\mathbf{x}^*)$, 从而

$$(x_i^* - y_i(\mathbf{x}^*)) F_i(\mathbf{x}^*) \geq 0. \quad (19)$$

将式(17)与式(19)相加, 得到

$$(x_i^* - y_i(\mathbf{x}^*)) F_i(\mathbf{x}^*) + (x_i^* - y_i(\mathbf{x}^*)) [\langle \nabla \mathbf{F}(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}^* - \mathbf{y}(\mathbf{x}^*) \rangle]_i > 0$$

与式(18)矛盾. 从而必有 $\mathbf{y}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$, 由引理 1, \mathbf{x}^* 箱式约束变分不等式的解. \square

定理 3 表明, 若 \mathbf{F} 连续可微且为 uniform P-函数, 则优化问题(13)的解收敛到 $\text{VIP}([\mathbf{l}, \mathbf{u}], \mathbf{F})$ 的唯一最优解. 从而, 可利用已有的约束可微优化问题求解算法对问题(13)进行求解, 以得到 $\text{VIP}([\mathbf{l}, \mathbf{u}], \mathbf{F})$ 的唯一最优解. 下面的下降性质则表明, 若 \mathbf{F} 为严格单调函数, 则可以得到优化问题(13)的下降方向, 从而亦可构造下降类算法进行求解.

定理 4 假设 \mathbf{F} 连续可微, 且对所有的 $\mathbf{x} \in S$ 其 Jacob 阵 $\nabla \mathbf{F}(\mathbf{x})$ 正定, 则对任意的 $\mathbf{x} \in S$, 向量 \mathbf{d}_p 满足下述下降条件:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \langle \nabla g_p(\mathbf{x}), \mathbf{d}_p \rangle \leq 0, \quad \mathbf{d}_p \neq 0, \quad (20)$$

其中, $\mathbf{d}_p = ([\mathbf{d}_p]_1, [\mathbf{d}_p]_2, \dots, [\mathbf{d}_p]_n)$ 为

$$[\mathbf{d}_p]_i = \begin{cases} \frac{l_i \exp(-pF_i(\mathbf{x})l_i) - u_i \exp(-pF_i(\mathbf{x})u_i)}{\exp(-pF_i(\mathbf{x})l_i) - \exp(-pF_i(\mathbf{x})u_i)} + \frac{1}{pF_i(\mathbf{x})} - x_i, & i \notin I(\mathbf{x}), \\ \frac{l_i + u_i}{2} - x_i, & i \in I(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (21)$$

进一步地, 若 \mathbf{F} 为 S 上模为常数 $\xi > 0$ 的强单调函数, 则对任意的 $\mathbf{x} \in S$, 有

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \langle \nabla g_p(\mathbf{x}), \mathbf{d}_p \rangle \leq \xi \|\mathbf{d}\|^2, \quad (22)$$

其中, $\mathbf{d} = \mathbf{y}^*(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = \lim_{p \rightarrow \infty} \mathbf{d}_p$, $\mathbf{y}^*(\mathbf{x}) \in Y^*(\mathbf{x})$.

证明 由式(13)和式(14)与式(12)得到

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} \langle \nabla g_p(\mathbf{x}), \mathbf{d}_p \rangle &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i \in I(\mathbf{x})} \left[F_i(\mathbf{x}) + \nabla F_i(\mathbf{x}) \left(x_i - \frac{u_i + l_i}{2} \right) \right] [\mathbf{d}_p]_i + \right. \\ &\sum_{i \notin I(\mathbf{x})} \left[F_i(\mathbf{x}) + \nabla F_i(\mathbf{x}) \left(x_i - \frac{l_i \exp(-pF_i(\mathbf{x})l_i) - u_i \exp(-pF_i(\mathbf{x})u_i)}{\exp(-pF_i(\mathbf{x})l_i) - \exp(-pF_i(\mathbf{x})u_i)} - \right. \right. \\ &\left. \left. \frac{1}{pF_i(\mathbf{x})} \right) \right] [\mathbf{d}_p]_i \left. \right\} = \end{aligned}$$

$$\left\{ \sum_{i \in I(\mathbf{x})} [F_i(\mathbf{x}) - \nabla F_i(\mathbf{x})d_i]d_i + \sum_{i \notin I(\mathbf{x})} [F_i(\mathbf{x}) - \nabla F_i(\mathbf{x})d_i]d_i \right\} = \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{d} \rangle - \langle \nabla \mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{d}, \mathbf{d} \rangle. \tag{23}$$

由 $\nabla \mathbf{F}(\mathbf{x})$ 正定, 可得

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \langle \nabla g_p(\mathbf{x}), \mathbf{d}_p \rangle \leq \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{d} \rangle = \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{y}^*(\mathbf{x}) - \mathbf{x} \rangle = -g(\mathbf{x}) \leq 0, \tag{24}$$

即得到了不等式(20).

若 \mathbf{F} 在 S 上强单调, 则由式(23)和(24)可得

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} \langle \nabla g_p(\mathbf{x}), \mathbf{d}_p \rangle &\leq \lim_{p \rightarrow \infty} (\langle \mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{d}_p \rangle - \langle \nabla \mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{d}_p, \mathbf{d}_p \rangle) \leq \\ &- \langle \nabla \mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{d}, \mathbf{d} \rangle \leq -\xi \|\mathbf{d}\|^2. \end{aligned} \tag{25}$$

定理证毕. □

3 新光滑 gap 函数在摩擦接触问题中的应用

将变分不等式转化为光滑最优化问题, 在算法方面, 可以借鉴大量已经成熟的光滑优化算法求解变分不等式问题, 在理论分析方面, 可以将光滑优化的相关分析方法引入到变分不等式的研究中, 如解的性质的研究.

下面以一个单点摩擦接触问题为例, 阐述本文所提光滑 gap 函数的应用. 众所周知, 不同于无摩擦接触分析可以等价转化为势能极小化问题, 摩擦接触问题不存在相应的势函数. 而利用本文所提 gap 函数, 我们给出了一个与摩擦接触分析等价的极小化模型. 此外, 与一般的基于最小势能原理或最小余能原理建立的数学模型所不同的是, gap 函数的最优值总是已知的, 若问题有解, 则必为 0, 这对于估计解的误差是有利的.

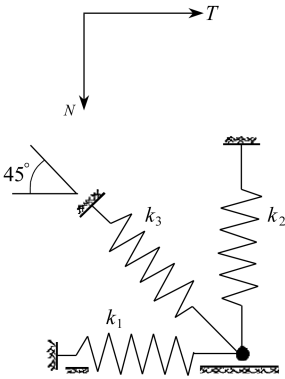


图 1 弹簧模型

Fig. 1 A spring model

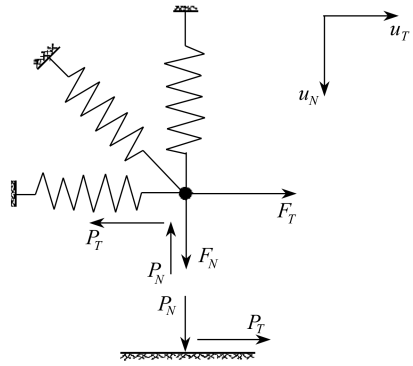


图 2 力与位移示意图

Fig. 2 Forces and displacements

考虑如图 1 和 2 所示两自由度摩擦接触问题. 记接触点位移为 $[u_T, u_N]$, 外力 $[F_T, F_N]$, 接触力 $[P_T, P_N]$. 则接触点的平衡方程为

$$\begin{pmatrix} F_T \\ F_N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_T \\ P_N \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_T \\ u_N \end{pmatrix};$$

刚度矩阵取为

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2k_1 + k_3 & k_3 \\ k_3 & 2k_2 + k_3 \end{bmatrix};$$

接触点满足单侧接触条件和 Coulomb 摩擦接触定律为

$$\begin{cases} P_N \geq 0, u_N \leq 0, P_N u_N = 0, \\ |P_T| \leq \mu P_N, & \text{若 } u_T = 0, \\ P_T = \mu P_N \operatorname{sgn}(u_T), & \text{若 } u_T \neq 0, \end{cases}$$

摩擦因数记为 μ . 利用参变量变分原理^[4], 问题可以表述为如下线性互补问题(LCP)的形式:

$$\mathbf{v} = \mathbf{M}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{q}, \mathbf{v}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0},$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{M} = \begin{bmatrix} K_{11} + \mu K_{21} & -(K_{11} + \mu K_{21}) & K_{12} + \mu K_{22} \\ -(K_{11} - \mu K_{21}) & K_{11} - \mu K_{21} & -K_{12} + \mu K_{22} \\ K_{21} & -K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{q} = \begin{Bmatrix} F_T + \mu F_N \\ -F_T + \mu F_N \\ F_N \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\lambda} = \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{Bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}, \end{cases} \quad (26)$$

其中, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 分别表示接触点的正切向滑动、负切向滑动和法向滑动.

基于本文所提光滑 gap 函数, 该线性互补问题(LCP)可等价于光滑优化问题:

$$\begin{cases} \min g_p(\boldsymbol{\lambda}) = \langle \mathbf{M}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda} \rangle + \\ \frac{1}{p} \sum_{i \notin I(\boldsymbol{\lambda})} \ln \left(\frac{\exp(-p[\mathbf{M}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{q}]_i l_i) - \exp(-p[\mathbf{M}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{q}]_i u_i)}{p[\mathbf{M}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{q}]_i} \right) + \\ \frac{1}{p} \sum_{i \in I(\boldsymbol{\lambda})} \ln(u_i - l_i), \\ \text{s. t. } \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

其中, $\mathbf{M}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{q}$ 如式(26)所定义, $[\mathbf{M}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{q}]_i$ 仍然表示向量 $\mathbf{M}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{q}$ 的第 i 个元素, $l_i = 0, i = 1, 2, \dots, n, u_i = +\infty, i = 1, 2, \dots, n$. 在实际计算中, 考虑到参数 $p \rightarrow \infty$, 上式中的上界 \mathbf{u} 可利用参数 p 替代, 从而得到线性互补问题的如下近似光滑优化问题:

$$\begin{cases} \min g_p(\boldsymbol{\lambda}) = \langle \mathbf{M}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda} \rangle + \\ \frac{1}{p} \sum_{i \notin I(\boldsymbol{\lambda})} \ln \left(\frac{1 - \exp(-p^2[\mathbf{M}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{q}]_i)}{p[\mathbf{M}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{q}]_i} \right) + \frac{1}{p} \sum_{i \in I(\boldsymbol{\lambda})} \ln p, \\ \text{s. t. } \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (27)$$

其中, 参数 p 起到控制解的逼近精度的作用.

大量成熟的光滑优化算法可用于问题(27)的求解, 例如 MATLAB 中的优化工具箱等. 下面, 具体测试几种简单的情形, 计算中统一取 $p = 10^8$, 并采用 MATLAB 优化工具箱中的 `fmincon` 求解. 计算结果列于表 1, 其中, $\det(H)$ 表示光滑 gap 函数的 Hessian 阵的行列式值.

情况 1 令 $k_1 = k_2 = 1, k_3 = 0, \mu = 0.3, F_T = 1, F_N = 1$. 接触点处于切向滑动状态, $u_T = 0.7, P_T = 0.3, P_N = 1$, 与解析解一致. 检验目标函数的 Hessian 阵的行列式值大于 0, 问题的解唯一.

情况 2 令 $k_1 = k_2 = 1, k_3 = 0, \mu = 0.8, F_T = 1, F_N = 1$. 接触点处于滑动状态, 发生正向滑动 $u_T = 0.2, P_T = 0.8, P_N = 1$, 与解析解一致. 检验目标函数的 Hessian 阵的行列式值大于 0, 问题的解唯一.

情况3 令 $k_1 = k_2 = 1, k_3 = 0, \mu = 1.1, F_T = 1, F_N = 1$. 接触点处于粘着状态, $P_T = 1, P_N = 1$, 与解析解一致. 检验目标函数的 Hessian 阵的行列式值为负, 问题的解不稳定.

情况4 令 $k_1 = k_3 = 0, k_2 = 1, \mu = 0.1, F_T = 0.1, F_N = 1$. 接触点处于任意滑动状态, $P_T = 0.1, P_N = 1$. 与解析解一致. 检验目标函数的 Hessian 阵的行列式值为 0, 说明问题的解不唯一.

表 1 两自由度摩擦接触问题中不同情形下的计算结果

Table 1 Numerical results for different cases of two degree-of-freedom frictional contact problem

case	contact state	displacement u_T, u_N	contact force p_N, p_T	gap function	det (H)
1	slip	$u_T = 0.7, u_N = 0$	$P_N = 1, P_T = 0.3$	3.022 6E-7	2.306 6E+3
2	slip	$u_T = 0.2, u_N = 0$	$P_N = 1, P_T = 0.8$	-1.252 2E-7	1.327 4E+6
3	stick	$u_T = 0, u_N = 0$	$P_N = 1, P_T = 1$	-5.370 1E-7	-9.68
4	slip	$u_T = \text{arbitrary value}, u_N = 0$	$P_N = 1, P_T = 0.1$	-3.210 5E-7	0

4 数值试验

进一步以标准箱式约束变分不等式考题检验本文方法的有效性. 算例选自混合互补问题标准考题库 MCPLIB^[18]. 可微优化问题 (13) 或 (27) 采用 MATLAB 中的 fmincon 求解器求解, 除特殊说明外, 参数 p 统一取为 10^8 .

例 1 Kojima-Shindo 问题 (MCPLIB 库文件 kojshin. gms)

设函数 $F: R^4 \rightarrow R^4$:

$$F(x) = \begin{cases} 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3 + 3x_4 - 6 \\ 2x_1^2 + x_1 + x_2^2 + 10x_3 + 2x_4 - 2 \\ 3x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_3 + 9x_4 - 9 \\ x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3 + 3x_4 - 3 \end{cases}.$$

当可行域为 $S := \{x \mid -0.5 \leq x_i \leq 0.5, i = 1, 2, 3, 4\}$, 问题的解为 $x^* = \{1/2, -1/2, 1/2, 1/3\}$, $F^* = \{-15/4, 2\sqrt{6}, -4, 0\}$; 当可行域为 $S := \{x \in R_+^4\}$, 问题有两个解: 退化解 $x^* = \{\sqrt{6}/2, 0, 0, 1/2\}$, $F^* = \{0, 2 + \sqrt{6}/2, 0, 0\}$; 非退化解 $x^* = \{1, 0, 3, 0\}$, $F^* = \{0, 31, 0, 4\}$. 计算结果列于表 2, 其中当参数 p 取固定的大数 10^8 时, 可得到非退化解. 而在计算迭代过程中通过调整参数 p , 如取迭代序列 $p^k = 0.1 \times 1.2^k$ 时, 则可以得到退化解 $x^* = \{\sqrt{6}/2, 0, 0, 1/2\}$.

表 2 Kojima-Shindo 问题的计算结果

Table. 2 Numerical results for Kojima-Shindo problem

domain	initial x	p	computational solution x^*	$g_p(x^*)$
$[-0.5, 0.5]$	(1, 1, 1, 1)	1.0E+8	(0.500 0, -0.500 0, 0.500 0, 0.333 3)	2.338 9E-9
$[0, +\infty]$	(1, 1, 1, 1)	1.0E+8	(1, 0, 3, 0)	3.305 6E-7
$[0, +\infty]$	(1, 1, 1, 1)	0.1×1.2^k	(1.224 7, 0, 0, 0.5)	2.427 1E-8

例 2 Nash 平衡问题 (MCPLIB 库中文件 nash. gms)

将 Nash 平衡模型表述为如下非线性互补问题:

$$\begin{aligned} x_i(\nabla C_i(x_i) - p(\xi) - x_i \nabla p(\xi)) &= 0, \\ \nabla C_i(x_i) - p(\xi) - x_i \nabla p(\xi) &\geq 0, \quad x_i \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, 10, \end{aligned}$$

其中, $p(\xi) = 5\,000^{1/\gamma} \xi^{-1/\gamma}$, $C_i(x_i) = c_i(x_i) + \frac{\beta_i}{1 + \beta_i} L_i^{1/\beta_i} x_i^{(\beta_i+1)/\beta_i}$, $c_i, L_i, \beta_i, \gamma > 1$ 为参数,

$\beta = [1.2, 1, 0.9, 0.6, 1.5, 1, 0.7, 1.1, 0.95, 0.75]$, $L = [10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10]$, $\gamma = 1.2$, $c = [5, 3, 8, 5, 1, 3, 7, 4, 6, 3]$.

这里考虑一个 10 维 Nash 平衡问题, MCPLIB 中给出的解为

$$x^* = (7.44, 4.09, 2.59, 0.93, 17.93, 4.09, 1.3, 5.59, 3.22, 1.67).$$

本文计算结果列于表 3.

表 3 Nash 平衡问题的计算结果

Table 3 Numerical results for Nash equilibrium problem

initial x	computational solution x^*	$g_p(x^*)$
$(1, 1, \dots, 1)$	$(7.4415, 4.0978, 2.5906, 0.9354, 17.9490, 4.0978, 1.3047, 5.5901, 3.2222, 1.6771)$	$5.5026E-5$

例 3 交通平衡问题(MCPLIB 库中文件 gafni. gms)

这是一个 5 维盒式约束变分不等式模型. 其中 MCPLIB 中给出的解为 $x^* = (0, 0, 0.014, 0.144, 0.1033)$. 本文计算结果列于表 4.

表 4 交通平衡问题的计算结果

Table 4 Numerical results for a traffic assignment model

initial x	computational solution x^*	$g_p(x^*)$
$(0, 0, 0, 0, 0)$	$(0, 0, 0.0137, 0.1451, 0.1033)$	$1.8225E-6$

例 4 Colville 问题(MCPLIB 库中文件 colvnlp. gms)

这是一个 15 维非线性互补问题. 问题为非线性规划标准考题 Colville 问题的 KKT 条件, MCPLIB 中给出的解为 $x^* = (0.300, 0.333, 0.400, 0.428, 0.224, 0, 0, 5.174, 0, 3.061, 11.840, 0, 0, 0.104, 0)$. 本文计算结果列于表 5.

表 5 Colville 问题的计算结果

Table 5 Numerical results for Colville problem

initial x	computational solution x^*	$g_p(x^*)$
$(0, 0, \dots, 0)$	$(0.3000, 0.3334, 0.4000, 0.4284, 0.2241, 0, 0, 5.1742, 0, 3.0611, 11.8410, 0, 0, 0.1044, 0)$	$1.8982E-4$

从计算结果可以看出, 本文所提方法可得到各考题的解. 此外, 我们注意到一个有趣的现象, 当参数 p 选为一固定的大数时, 不能获得例 1 中 Kojima-Shindo 考题的退化解, 但在迭代过程中通过不断调整 p 的取值, 如按 $p^k = 0.1 \times 1.2^k$ 调整, 则迭代结果收敛到退化解. 造成这种结果的一种可能的原因是参数 p 起到了某种延拓的作用, 迭代过程中通过调整 p 的取值, 可以控制迭代沿着某个特定路径进行, 但其具体的延拓机理尚不明确, 需要进一步的研究.

5 结束语

最后, 对所提出的光滑 gap 函数作两点说明以结束本文. 首先, 虽然出于便于数值计算并使理论结果与数值计算相对应的目的, 本文的研究重点放于盒式约束的变分不等式问题, 事实上, 对于一般的变分不等式与互补问题, 亦可得到与本文相类似的理论结果; 其次, 如本文第 4 节所指出的, 参数 p 不仅起到控制解的逼近精度的作用, 还可能起到某种延拓作用, 而其具体的延拓机理尚需进一步地研究.

参考文献 (References):

[1] Billups S C, Dirkse S P, Ferris M C. A comparison of algorithms for large scale mixed com-

- plementarity problems[J]. *Computational Optimization and Applications*, 1997, **7**(1): 3-25.
- [2] Harker P T, Pang J S. Finite-dimensional inequality and nonlinear complementarity problems: a survey of theory, algorithms and applications[J]. *Mathematical Programming*, 1990, **48**(1/3): 161-220.
- [3] Facchinei F, Pang J S. *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*[M]. New York:Springer, 2003.
- [4] 钟万勰, 张洪武, 吴承伟. 变量变分原理及其在工程中的应用[M]. 北京:科学出版社,1997. (ZHONG Wan-xie, ZHANG Hong-wu, WU Cheng-wei. *Parametric Variational Principle and Its Applications in Engineering*[M]. Beijing: Science Press, 1997. (in Chinese))
- [5] 何素艳, 李建宇, 李兴斯, 张洪武. 工程力学中的互补问题: 模型[J]. 计算力学学报, 2004, **21**(2): 185-190. (HE Su-yan, LI Jian-yu, LI Xing-si, ZHANG Hong-wu. Complementarity problems in engineering mechanics: models[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2004, **21**(2): 185-190. (in Chinese))
- [6] 张培爱, 何素艳, 李建宇, 李兴斯. 工程力学中的互补问题(II): 算法[J]. 计算力学学报, 2006, **23**(6): 696-705. (ZHANG Pei-ai, HE Su-yan, LI Jian-yu, LI Xing-si. Complementarity problems in engineering mechanics (II): algorithms[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2006, **23**(6): 696-705. (in Chinese))
- [7] SUN De-feng, Womersley R S. A new unconstrained differentiable merit function for box constrained variational inequality problems and a damped Gauss-Newton method[J]. *SIAM Journal of Optimization*, 1999, **9**(2): 388-413.
- [8] Auslender A. *Optimisation: Methodes Numeriques*[M]. Paris: Masson, 1976.
- [9] Fukushima M. Equivalent differentiable optimization problems and descent methods for asymmetric variational inequality problems[J]. *Mathematical Programming*, 1992, **53**(3): 99-110.
- [10] PENG Ji-ming. Equivalence of variational inequality problems to unconstrained minimization[J]. *Mathematical Programming*, 1997, **78**(3): 347-356.
- [11] 乌力吉, 陈国庆. 箱约束变分不等式的一个简单光滑价值函数和阻尼牛顿法[J]. 应用数学和力学, 2005, **26**(8):988-996. (Ulji, CHEN Guo-qing. New simple smooth merit function for box constrained variational inequalities and damped Newton type method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2005, **26**(8): 1083-1092.)
- [12] Hiriart-Urruty J B. Conditions for global optimality[C]//Horst R, Pardalos P M. *Handbook of Global Optimization*, Dordrecht: Kluwer, 1994: 1-25.
- [13] Erdelyi A. *Asymptotic Expansions*[M]. New York: Dover, 1965.
- [14] Henrici P. *Applied and Computational Complex Analysis*[M]. Vol 2. New York: Wiley, 1977.
- [15] Ellis R S. *Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics*[M]. New York: Springer-Verlag, 1985.
- [16] Bonnaus J F, Shapiro A. *Perturbation Analysis of Optimization Problems*[M]. Springer, 2000.
- [17] Marcotte P. A new algorithm for solving variational inequalities with applications to the traffic assignment problem[J]. *Mathematical Programming*, 1985, **33**(3): 339-351.
- [18] Dirkse S P, Ferris M C. MCPLIB: a collection of nonlinear mixed complementarity problem [Z]. Computer Science Department, University of Wisconsin, 1994.

New Smooth Gap Function for Box Constrained Variational Inequalities

ZHANG Li-li¹, LI Xing-si²

(1. *School of Mathematical Science, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116023, P. R. China;*

2. *State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116023, P. R. China*)

Abstract: A new smooth gap function for box constrained variational inequality problem was proposed based on an integral global optimality condition. The smooth gap function was simple and had some good differentiable properties. The box constrained variational inequality problem could be reformulated as a differentiable optimization problem by using the proposed smooth gap function. Conditions under which any stationary point of the optimization problem was the solution to box constrained variational inequality problem were discussed. A simple frictional contact problem was analyzed to illustrate the application of this smooth gap function. Finally, numerical experiments confirmed the good theoretical properties of the method.

Key words: box constrained variational inequality problem; smooth gap function; integral global optimality condition