

# 单自由度干摩擦振子 1:4 强共振时的 N-S 分岔\*

郭 勇, 谢建华

(西南交通大学 力学与工程学院, 成都 610031)

(我刊编委陈立群推荐)

**摘要:** 研究一个单自由度干摩擦系统的受迫振动行为. 在 1:4 共振条件下, 根据平衡点附近级数形式的解建立系统的 Poincaré 映射. 运用范式理论将映射简化成标准形式. 结果显示, 系统会发生 NS(Neimark-Sacker) 分岔. 数值模拟验证了理论结果.

**关键词:** 干摩擦; Poincaré 映射; 共振; 范式; 周期解; 环面

**中图分类号:** O322 **文献标识码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.01.003

## 引 言

在工程中,普遍存在着干摩擦现象.干摩擦力可以使系统产生复杂的动力学效应,例如在轴承传动和刹车制动系统中的颤振.此外,系统总是在一定的激励下作我们所期望的运动,因此干摩擦和激励的成对出现是常见的现象.研究在存在干摩擦力时系统受激振动的动力学行为,有利于我们准确地对系统施加控制,使其运动符合我们的要求.

各种非线性动力系统周期解问题和环面解问题越来越多地被人们研究. Chatterjee 和 Mallik 在文献[1]中研究了一族具有一个碰撞阻尼的单自由度自激振子的拟周期运动; Budd 等在文献[2]中证明了在单自由度碰撞振动系统中如果回复系数小于 1, 拟周期运动不可能发生; 文献[3]研究了没有阻尼的两自由度碰撞振动系统,并分别在非共振、弱共振和强共振情形下分析了单碰周期运动的 Hopf 分岔; 谢建华<sup>[4]</sup>, Wen<sup>[5]</sup>研究了单面碰撞约束的碰撞振动系统具有两个-1 特征值时的余维 2 分岔,发现了周期 2 两碰轨道的 Hopf 分岔; 文献[6-7]中分别研究了映射的 Hopf-Hopf 分岔和 Hopf-flip 分岔.

本文介绍一种在平衡点附近通过微分方程的级数解形式建立系统 Poincaré 映射的方法. 将其具体应用于 1:4 共振情形,我们可以得出 Poincaré 映射. 运用平面映射的范式理论对所建立的映射进行简化. 最后结合相关定理得出结论:在一定范围内取值的参数,其取某些值时,系统具有稳定的周期解;其取另一些值时,系统具有稳定的环面解.

\* 收稿日期: 2012-03-30; 修订日期: 2012-05-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11172246); 中央高校基本科研业务费专题资助项目(SWJTU11ZT15)

作者简介: 郭勇(1985—),男,贵州安顺人,博士生(E-mail:gy-gates@163.com);  
谢建华(1957—),男,教授(通讯作者.E-mail:jhxie2000@126.com).

# 1 力学模型与运动方程

如图 1 所示的单自由度力学模型,质量为  $m$  的物块置于速度为  $v$  的皮带上,左端连接有刚度系数为  $k$  的弹簧,在小激励力  $\varepsilon f(\theta)$  和皮带干摩擦力的作用下作小幅振动。

根据 Newton 第二定律可以建立系统的运动微分方程为

$$m\ddot{z} = -kz + F(\dot{z} - v) + \varepsilon f(\theta), \quad (1)$$

其中,  $\varepsilon$  为小参数,  $f(\theta)$  为关于  $\theta$  的  $2\pi$  周期函数,且  $\theta$  线性依赖于时间  $t$ .  $F(\dot{z} - v)$  为干摩擦力,当相对速度不为 0 时,其表达式为

$$F(v_r) = -\text{sign}(v_r)m \left[ \frac{0.2}{1 + 1.42|v_r|} + 0.25 + 0.05v_r^2 \right], \quad (2)$$

其中  $v_r$  为物块相对于摩擦面(即皮带)的速度. 表达式中的系数: 0.2, 0.25, 0.05, 1.42 是取决于材料的,不同的材料具有不同的数值. 因此,在纯理论研究,我们对这些值的取法具有一定的随意性,可分别设为  $\alpha, \beta, \gamma, \eta$ . 在这里,我们假设轮的转速很大,而物块的速度在运动过程中始终小于皮带的速度. 作这样的假设以后,将式(2)中的具体系数以  $\alpha, \beta, \gamma, \eta$  表示,式(2)最后可以写成:

$$F(v_r) = \left[ \frac{\alpha}{1 - \eta v_r} + \beta + \gamma v_r^2 \right] m. \quad (3)$$

将方程(1)写成一阶微分方程组的形式,并

将其坐标原点平移至系统没有受外激励时的平衡位置,我们可以得到

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 + \frac{F(x_2 - v)}{m} - \frac{F(-v)}{m} + \varepsilon f(\theta). \end{cases} \quad (4)$$

因为我们考虑的是系统在平衡位置附近作小幅振动,因此  $x_2$  较小,且在运动过程中始终小于皮带的速度  $v$ . 可对式(4)按照  $x_2$  进行 Taylor 展开,得到如下的形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 + \frac{F'(-v)}{m}x_2 + \\ \frac{F''(-v)}{2m}x_2^2 + \frac{F'''(-v)}{6m}x_2^3 + \frac{F^{(4)}(-v)}{24m}x_2^4 + \varepsilon f(\theta) + o(x_2^4). \end{cases} \quad (5)$$

令  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ . 取变换  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ , 其中  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\omega_0 \end{bmatrix}$ , 可以把原方程变为以  $y_1, y_2$  为新变

量的如下形式:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\omega_0 y_2, \\ \dot{y}_2 = \omega_0 y_1 + \left( -\frac{1}{\omega_0} \right) \left[ \frac{F'(-v)}{m} (-\omega_0 y_2) + \frac{F''(-v)}{m} (-\omega_0 y_2)^2 + \right. \\ \left. \frac{F'''(-v)}{m} (-\omega_0 y_2)^3 + \frac{F^{(4)}(-v)}{m} (-\omega_0 y_2)^4 + \varepsilon f(\theta) + o(y_2^4) \right]. \end{cases} \quad (6)$$

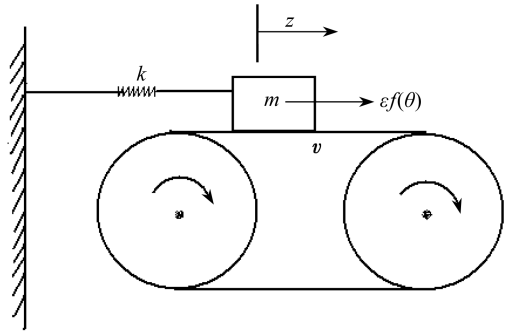


图 1 力学模型

Fig. 1 The mechanical model

本文研究 1:4 共振下系统的 Poincaré 映射的建立,因此  $\theta$  关于时间  $t$  的变化关系为  $\dot{\theta} = 4\omega_0$ . 作时间尺度变换,令  $\omega_0 t = \tau$ ,即  $t = \tau/\omega_0$ ,则  $y_1, y_2, \theta$  关于  $\tau$  的微分方程为

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{d\tau} = -y_2, \\ \frac{dy_2}{d\tau} = y_1 + \frac{F'(-v)}{\omega_0 m} y_2 - \frac{F''(-v)}{2m} y_2^2 + \frac{F'''(-v)\omega_0}{6m} y_2^3 - \\ \quad \frac{F^{(4)}(-v)\omega_0^2}{24m} y_2^4 - \frac{1}{\omega_0^2} \varepsilon f(\theta) + o(y_2^4), \\ \frac{d\theta}{d\tau} = 4. \end{cases} \quad (7)$$

为了书写方便,我们仍然将上式中的  $-\varepsilon/\omega_0^2$  写为  $\varepsilon$ , 并且作如下记号:

$$\begin{aligned} a(\mu) &= \frac{F'(-v_c - \mu)}{\omega_0 m}, \quad b(\mu) = -\frac{F''(-v_c - \mu)}{2m}, \\ c(\mu) &= \frac{F'''(-v_c - \mu)\omega_0}{6m}, \quad d(\mu) = -\frac{F^{(4)}(-v_c - \mu)\omega_0^2}{24m}, \end{aligned}$$

其中,  $v_c$  是无激励系统平衡点发生 Hopf 分岔时的参数值,通过  $a(0)=0$  确定,且满足  $a'(0) \neq 0$ . 在实际处理中,我们只需要用到  $a(\mu)$  关于  $\mu$  的一次导数项,以及  $b(\mu), c(\mu), d(\mu)$  在  $\mu=0$  处的取值. 令  $a'(0) = a_1, b(0) = b, c(0) = c, d(0) = d$ . 仍然以  $(\cdot)$  表示对  $\tau$  的导数. 引入这些记号以后,对原方程的处理也即是对如下方程的处理:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_2, \\ \dot{y}_2 = y_1 + a_1 \mu y_2 + b y_2^2 + c y_2^3 + d y_2^4 + \varepsilon f(\theta) + o(\cdots), \\ \dot{\theta} = 4. \end{cases} \quad (8)$$

令  $z = y_1 + i y_2$ , 上式可化为

$$\begin{aligned} \dot{z} &= iz + \frac{a_1 \mu}{2} (z - \bar{z}) - \frac{ib}{4} (z - \bar{z})^2 - \frac{c}{8} (z - \bar{z})^3 + \\ &\quad \frac{id}{16} (z - \bar{z})^4 + i\varepsilon f(\theta) + o(\cdots). \end{aligned} \quad (9)$$

## 2 建立 Poincaré 映射的方法

根据微分方程解对参数的依赖性,可以将方程(9)的解写成关于  $\mu, \varepsilon$  的级数(仍然以  $t$  表示新的时间变量  $\tau$ ):

$$z(\eta, t, \mu, \varepsilon) = z_0(\eta, t) + \mu z_{10}(\eta, t) + \varepsilon z_{01}(\eta, t) + \mu \varepsilon z_{11}(\eta, t) + \cdots \quad (10)$$

满足初值条件  $z(\eta, 0, \mu, \varepsilon) = \eta$ .

将式(10)代入式(9)中,比较两边  $\mu, \varepsilon$  的系数可以得到

$$\dot{z}_0(\eta, t) = iz_0(\eta, t) - \frac{ib}{4} (z_0 - \bar{z}_0)^2 - \frac{c}{8} (z_0 - \bar{z}_0)^3 + \frac{id}{16} (z_0 - \bar{z}_0)^4 + \cdots, \quad (11)$$

$$\dot{z}_{10}(\eta, t) = iz_{10}(\eta, t) + \frac{a_1}{2} (z_0 - \bar{z}_0), \quad (12)$$

$$\dot{z}_{01}(\eta, t) = iz_{01}(\eta, t) + i f(\theta), \quad (13)$$

$$\dot{z}_{11}(\eta, t) = iz_{11}(\eta, t) + \frac{a_1}{2} (z_{01} - \bar{z}_{01}) - \frac{ib}{2} (z_{10} z_{01} + \bar{z}_{10} \bar{z}_{01} - z_{10} \bar{z}_{01} - \bar{z}_{10} z_{01}). \quad (14)$$

再根据微分方程解对初值的连续依赖性,可以将式(10)中的  $z_0(t), z_{10}(t), z_{01}(t)$  以及  $z_{11}(t)$  写成按照初值  $\eta, \bar{\eta}$  展开的 Taylor 级数形式:

$$z_0(\eta, t) = L_{10}\eta + L_{01}\bar{\eta} + L_{20}\eta^2 + L_{11}\eta\bar{\eta} + L_{02}\bar{\eta}^2 + L_{30}\eta^3 + L_{21}\eta^2\bar{\eta} + L_{12}\eta\bar{\eta}^2 + L_{03}\bar{\eta}^3 + L_{40}\eta^4 + L_{31}\eta^3\bar{\eta} + L_{22}\eta^2\bar{\eta}^2 + L_{13}\eta\bar{\eta}^3 + L_{04}\bar{\eta}^4 + o(\cdots), \quad (15)$$

$$z_{10}(\eta, t) = A_{10}\eta + A_{01}\bar{\eta} + o(\cdots), \quad (16)$$

$$z_{01}(\eta, t) = B_{10}\eta + B_{01}\bar{\eta} + o(\cdots), \quad (17)$$

$$z_{11}(\eta, t) = C_{10}\eta + C_{01}\bar{\eta} + o(\cdots), \quad (18)$$

其中,  $L_{ij}, A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}$  分别是  $L_{ij}(t), A_{ij}(t), B_{ij}(t), C_{ij}(t)$  的简写. 在分岔问题的研究中,当研究 4 次共振时,对于  $z_0(\eta, t)$  而言,只需要考虑到它的级数形式解中初值的三次项;对于  $z_{10}(\eta, t), z_{01}(\eta, t), z_{11}(\eta, t)$  而言,因为它们均与小参数作乘积运算,因此我们只需要考虑它们级数解的初值的 1 次项即可. 将式(15)代入式(11)中,比较两边  $\eta, \bar{\eta}$  的同类项,可以得到如下一组微分方程:

$$\begin{aligned} \dot{L}_{10} &= iL_{10}, \quad \dot{L}_{01} = iL_{01}, \quad \dot{L}_{20} = iL_{20} - \frac{ib}{4} [L_{10}^2 + \bar{L}_{01}^2 - 2L_{10}\bar{L}_{01}], \\ \dot{L}_{11} &= iL_{11} - \frac{ib}{4} [2L_{10}L_{01} + 2\bar{L}_{10}\bar{L}_{01} - 2(L_{10}\bar{L}_{10} + L_{01}\bar{L}_{01})], \\ \dot{L}_{02} &= iL_{02} - \frac{ib}{4} [L_{01}^2 + \bar{L}_{10}^2 - 2L_{01}\bar{L}_{10}], \\ \dot{L}_{30} &= iL_{30} - \frac{ib}{4} [2L_{10}L_{20} + 2\bar{L}_{01}\bar{L}_{02} - 2(L_{10}\bar{L}_{02} + L_{20}\bar{L}_{01})] - \\ &\quad \frac{c}{8} [L_{10}^3 - \bar{L}_{01}^3 - 3L_{10}^2\bar{L}_{01} + 3L_{10}\bar{L}_{01}^2], \\ \dot{L}_{21} &= iL_{21} - \frac{ib}{4} [2L_{20}L_{01} + 2L_{11}L_{10} + 2\bar{L}_{02}\bar{L}_{10} + 2\bar{L}_{11}\bar{L}_{01} - \\ &\quad 2(L_{10}\bar{L}_{11} + L_{01}\bar{L}_{02} + L_{20}\bar{L}_{10} + L_{11}\bar{L}_{01})] - \frac{c}{8} [3L_{10}^2L_{01} - 3\bar{L}_{01}^2\bar{L}_{10} - \\ &\quad 3(L_{10}^2\bar{L}_{10} + 2L_{10}L_{01}\bar{L}_{01}) + 3(\bar{L}_{01}^2L_{01} + 2\bar{L}_{10}\bar{L}_{01}L_{10})], \\ \dot{L}_{12} &= iL_{12} - \frac{ib}{4} [2L_{02}L_{10} + 2L_{01}L_{11} + 2\bar{L}_{10}\bar{L}_{11} + 2\bar{L}_{20}\bar{L}_{01} - \\ &\quad 2(L_{10}\bar{L}_{20} + L_{01}\bar{L}_{11} + L_{11}\bar{L}_{10} + L_{02}\bar{L}_{01})] - \frac{c}{8} [3L_{01}^2L_{10} - 3\bar{L}_{10}^2\bar{L}_{01} - \\ &\quad 3(L_{01}^2\bar{L}_{01} + 2L_{10}L_{01}\bar{L}_{10}) + 3(\bar{L}_{10}^2L_{10} + 2\bar{L}_{10}\bar{L}_{01}L_{01})], \\ \dot{L}_{03} &= iL_{03} - \frac{ib}{4} [2L_{01}L_{02} + 2\bar{L}_{10}\bar{L}_{20} - 2(L_{01}\bar{L}_{20} + L_{02}\bar{L}_{10})] - \\ &\quad \frac{c}{8} [L_{01}^3 - \bar{L}_{10}^3 - 3L_{01}^2\bar{L}_{10} + 3L_{01}\bar{L}_{10}^2]. \end{aligned}$$

根据初值条件

$$\begin{aligned} L_{10}(0) &= 1, \quad L_{01}(0) = 0, \quad L_{20}(0) = 0, \quad L_{11}(0) = 0, \quad L_{02}(0) = 0, \\ L_{30}(0) &= 0, \quad L_{21}(0) = 0, \quad L_{12}(0) = 0, \quad L_{03}(0) = 0. \end{aligned}$$

可以逐步解出以上微分方程. 省去计算过程不写,其结果为

$$L_{10}(t) = e^{it}, \quad L_{01}(t) = 0, \quad L_{20}(t) = \frac{b}{4} e^{it}(1 - e^{it}),$$

$$\begin{aligned}
L_{11}(t) &= \frac{b}{2} (e^{it} - 1), \quad L_{02}(t) = \frac{b}{12} e^{it} (e^{-3it} - 1), \\
L_{30}(t) &= \frac{b^2}{8} (e^{it} - e^{2it}) + \frac{b^2}{12} (e^{3it} - e^{it}) + \frac{b^2}{24} (1 - e^{it}) + \frac{ic}{16} (e^{3it} - e^{it}), \\
L_{21}(t) &= \frac{b^2}{4} (e^{it} - e^{2it}) + \frac{b^2}{72} (e^{it} - e^{-2it}) + \frac{3b^2}{8} (e^{it} - 1) + \left(\frac{3c}{8} - \frac{ib^2}{6}\right) te^{it}, \\
L_{12}(t) &= \left(\frac{7b^2}{24} + \frac{3ic}{16}\right) (e^{it} - e^{-it}) + \frac{b^2}{24} (e^{2it} - e^{it}) + \frac{b^2}{12} (e^{-2it} - e^{it}) - \frac{3b^2}{8} (1 - e^{it}), \\
L_{03}(t) &= \frac{b^2}{24} (e^{-2it} - e^{it}) + \left(\frac{ic}{32} - \frac{b^2}{24}\right) (e^{-3it} - e^{it}) + \frac{b^2}{24} (1 - e^{it}).
\end{aligned}$$

根据  $z_0(\eta, t)$  的上述级数解, 将其代入式(12)、(13)、(14), 可以解出  $z_{10}(t), z_{01}(t), z_{11}(t)$  分别为

$$\begin{aligned}
z_{10}(\eta, t) &= \frac{a_1}{2} e^{it} \left[ \eta t + \frac{i\bar{\eta}}{2} (1 - e^{-2it}) \right], \quad z_{01}(\eta, t) = ie^{it} \int_0^t e^{-i\tau} f(4\tau) d\tau, \\
z_{11}(\eta, t) &= ie^{it} \int_0^t e^{-i\tau} \left[ a_1 \operatorname{Re}(e^{it} g) + \frac{a_1 b}{2} \operatorname{Im}(\eta g e^{2i\tau} + \eta \bar{g}) \tau + \frac{a_1 b}{2} \operatorname{Im} \eta \operatorname{Im}(g(e^{2i\tau} - 1)) \right] d\tau,
\end{aligned}$$

其中  $g(t) = \int_0^t e^{-i\tau} f(4\tau) d\tau$ .

将以上的结果代入式(10), 就可以得到方程(9)的级数解. 取  $\theta = 2\pi$  作为 Poincaré 截面. 当我们考虑 1:4 共振的时候, 因为  $\dot{\theta} = 4$ , 也即是取  $t = \pi/2$  作为 Poincaré 截面. 建立  $t = 0$  时初值点和其按照解的路径经过时间  $\pi/2$  后所到达的点之间的关系, 即为 1:4 共振情形下系统平衡点附近的 Poincaré 映射.

### 3 理论结果与数值模拟

下面我们具体地取  $f(4t) = \sin(4t)$ , 在此基础上对系统作一个具体的分析, 得出环面解和周期解存在的理论结果, 并进行数值验证.

如上文所说, 对解  $z(\eta, t, \mu, \varepsilon) = z_0(\eta, t) + \mu z_{10}(\eta, t) + \varepsilon z_{01}(\eta, t) + \mu \varepsilon z_{11}(\eta, t) + \dots$  中的  $t$ , 将其取为  $\pi/2$ , 便可以得到系统的 Poincaré 映射. 当  $f(4t) = \sin(4t)$  时, 通过计算可以得到

$$\begin{aligned}
z\left(\eta, \frac{\pi}{2}, \mu, \varepsilon\right) &= z_0\left(\eta, \frac{\pi}{2}\right) + \mu z_{10}\left(\eta, \frac{\pi}{2}\right) + \varepsilon z_{01}\left(\eta, \frac{\pi}{2}\right) + \mu \varepsilon z_{11}\left(\eta, \frac{\pi}{2}\right) + o(\dots) = \\
&= i\eta + \mu i \left( \frac{a_1 \pi}{4} \eta + \frac{ia_1}{2} \bar{\eta} \right) - \varepsilon \frac{4}{15} (1+i) + \mu \varepsilon \left( -\frac{4a_1 b}{45} + i \frac{a_1 b}{15} \right) \eta + \\
&= c_1 \bar{\eta} + \frac{g_{20}}{2} \eta^2 + g_{11} \eta \bar{\eta} + \frac{g_{02}}{2} \bar{\eta}^2 + \frac{g_{30}}{6} \eta^3 + \frac{g_{21}}{2} \eta^2 \bar{\eta} + \\
&= \frac{g_{12}}{2} \eta \bar{\eta}^2 + \frac{g_{03}}{6} \bar{\eta}^3 + o(\dots). \tag{19}
\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}
\left[ z\left(\eta, \frac{\pi}{2}, \mu, \varepsilon\right) - \eta \right] \Big|_{\eta=0, \varepsilon=0} &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial \eta} \left[ z\left(\eta, \frac{\pi}{2}, \mu, \varepsilon\right) - \eta \right] \Big|_{\eta=0, \varepsilon=0} &= -1 + i \neq 0,
\end{aligned}$$

根据隐函数定理,  $z(\eta, \pi/2, \mu, \varepsilon)$  有连续依赖于  $\varepsilon$  和  $\mu$  的不动点, 设为  $F_\varepsilon$ . 作坐标平移:  $\omega = \eta - F_\varepsilon$ , 则在  $\omega$  坐标下, 映射式(19)变为

$$\begin{aligned} \omega' = & i\omega + i\mu \left( \frac{a_1\pi}{4} \omega + \frac{ia_1}{2} \bar{\omega} \right) + \mu\varepsilon \left( -\frac{4a_1b}{45} + i\frac{a_1b}{15} \right) \omega + c_1\bar{\omega} + \frac{g_{20}}{2} \omega^2 + \\ & g_{11}\omega\bar{\omega} + \frac{g_{02}}{2} \bar{\omega}^2 + \frac{g_{30}}{6} \omega^3 + \frac{g_{21}}{2} \omega^2\bar{\omega} + \frac{g_{12}}{2} \omega\bar{\omega}^2 + \frac{g_{03}}{6} \bar{\omega}^3 + o(\dots), \end{aligned} \quad (20)$$

式中,  $g_{20}, g_{11}, g_{02}, g_{21}, g_{03}$  在临界参数值时取值如下:

$$\begin{aligned} \frac{g_{20}}{2} &= \frac{b}{4} (1 + i), \quad g_{11} = \frac{b}{2} (i - 1), \quad \frac{g_{02}}{2} = -\frac{b}{12} (1 + i), \\ \frac{g_{21}}{2} &= \left( \frac{b^2\pi}{12} - \frac{b^2}{9} \right) + i \left( \frac{23b^2}{36} + \frac{3c\pi}{16} \right), \\ \frac{g_{03}}{6} &= -i\frac{b^2}{12}, \quad z_{11} \left( \frac{\pi}{2} \right) = \left( -\frac{4a_1b}{45} + i\frac{a_1b}{15} \right) \eta + c_1\bar{\eta}, \\ z_{10} \left( \frac{\pi}{2} \right) &= i \left( \frac{a_1\pi}{4} \eta + \frac{ia_1}{2} \bar{\eta} \right), \quad z_{01} \left( \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{4}{15} (1 + i), \quad g_{30}, g_{12}. \end{aligned}$$

式(20)可以通过变换:  $\xi = (1 + o(\mu))\omega$ , 消去其中的  $\bar{\omega}$  的线性项, 而不改变式中其它项的系数, 得到

$$\begin{aligned} \xi' = & i\xi + i\mu \frac{a_1\pi}{4} \xi + \mu\varepsilon \left( -\frac{4a_1b}{45} + i\frac{a_1b}{15} \right) \xi + \frac{g_{20}}{2} \xi^2 + g_{11}\xi\bar{\xi} + \frac{g_{02}}{2} \bar{\xi}^2 + \\ & \frac{g_{30}}{6} \xi^3 + \frac{g_{21}}{2} \xi^2\bar{\xi} + \frac{g_{12}}{2} \xi\bar{\xi}^2 + \frac{g_{03}}{6} \bar{\xi}^3 + o(\dots). \end{aligned} \quad (21)$$

在 1:4 共振下,  $\lambda_0^4 = 1$ . ( $\lambda_0$  是映射(21)的 Jacobi 矩阵在  $\mu = 0$  处的复共轭特征值). 根据映射的范式理论, 可以通过坐标的可逆变换消去所有二次项, 变成如下形式 (仍然以  $\xi$  表示新坐标):

$$\begin{aligned} \xi' = & i\xi + i\mu \frac{a_1\pi}{4} \xi + \mu\varepsilon \left( -\frac{4a_1b}{45} + i\frac{a_1b}{15} \right) \xi + \\ & \frac{g_{30}'}{6} \xi^3 + \frac{g_{21}'}{2} \xi^2\bar{\xi} + \frac{g_{12}'}{2} \xi\bar{\xi}^2 + \frac{g_{03}'}{6} \bar{\xi}^3 + o(\dots), \end{aligned} \quad (22)$$

其中消去二次项的同时引起的三次项的系数的改变由下式确定:

$$\begin{aligned} \frac{g_{21}'}{2} &= \frac{g_{21}}{2} + \frac{|g_{11}|^2}{1 - \bar{\lambda}_0} + \frac{|g_{02}|^2}{2(\lambda_0^2 - \bar{\lambda}_0)} + \frac{2\lambda_0 - 1}{2\lambda_0(1 - \lambda_0)} g_{11}g_{20}, \\ \frac{g_{03}'}{6} &= \frac{g_{03}}{6} + \frac{g_{02}g_{11}}{2(\lambda_0^2 - \lambda_0)} + \frac{g_{02}g_{20}}{2(\lambda_0^2 - \bar{\lambda}_0)}. \end{aligned}$$

同样地再经过一次坐标的可逆变换, 可以消去三次项中的非共振项,  $g_{30}'/6, g_{12}'/2$ , 同时这一次变换不会改变线性项和三次项中其它项的系数, 得到 (仍然以  $\xi$  表示新坐标)

$$\xi' = i\xi + i\mu \frac{a_1\pi}{4} \xi + \mu\varepsilon \left( -\frac{4a_1b}{45} + i\frac{a_1b}{15} \right) \xi + \frac{g_{21}'}{2} \xi^2\bar{\xi} + \frac{g_{03}'}{6} \bar{\xi}^3 + o(\dots). \quad (23)$$

将  $g_{20}, g_{11}, g_{02}, g_{21}, g_{03}$  以及  $\lambda_0 = i$  代入  $g_{21}'/2, g_{03}'/6$  的表达式, 可以计算出

$$\frac{g_{21}'}{2} = \left( \frac{b^2\pi}{12} - \frac{b^2}{8} \right) + i \left( \frac{3c\pi}{16} - \frac{3b^2}{8} \right),$$

记其为  $\lambda_2$ ;

$$\frac{g'_{03}}{6} = \frac{b^2}{12},$$

记其为  $\lambda_3$ .

由映射的推导过程易知,不动点处的特征值为

$$\lambda = i \left( 1 + \mu \frac{a_1 \pi}{4} + \mu \varepsilon \left( \frac{a_1 b}{15} + i \frac{4a_1 b}{45} \right) + o(\dots) \right),$$

简写为  $\lambda = i(1 + \mu \tilde{\lambda}_1 + o(\dots))$ .

**引理 1**<sup>[8]</sup> 1) 如果  $|\operatorname{Im}(\lambda_2/\tilde{\lambda}_1)| > |\lambda_3/\tilde{\lambda}_1|$ , 则映射(23)不存在由不动点分岔出的周期 4 轨道; 2) 如果  $|\operatorname{Im}(\lambda_2/\tilde{\lambda}_1)| < |\lambda_3/\tilde{\lambda}_1|$ , 则映射(23)从不动点处分岔出不同的周期 4 轨道: 如果  $|\lambda_2| > |\lambda_3|$ , 那么周期 4 轨道在参数的同一侧存在, 并且至少有一条是不稳定的; 如果  $|\lambda_2| < |\lambda_3|$ , 那么周期 4 轨道在参数的两侧均存在, 且均为不稳定的.

**引理 2**<sup>[8]</sup> 对于引理 1 的情形 1), 如果  $\operatorname{Re}(\lambda_2) \neq 0$ ,  $|\lambda_3| < |\tilde{\lambda}_1| |\operatorname{Im}(\lambda_2/\tilde{\lambda}_1)|$ , 映射(23)可以从不动点分岔出不变圈.

**引理 3**<sup>[9]</sup> 映射式(23)中的虚数单位  $i$  提出以后, 其可以变为如下形式:

$$\xi' = i \{ [1 + \sigma(\mu)] \xi + \alpha_1(\mu) \xi^2 \bar{\xi} + \beta_1(\mu) \bar{\xi}^3 + o(\dots) \}. \quad (24)$$

如果存在  $\varepsilon_1$  使得  $|\operatorname{Im}(\bar{\sigma}(\mu)\alpha_1(0))| \geq |\bar{\sigma}(\mu)\beta_1(0)| + \varepsilon_1 |\sigma(\mu)|$  成立. 则在条件  $\operatorname{Re}(\alpha_1(0)) < 0$  和  $\operatorname{Re}(\sigma(\mu)) \neq 0$  下, 如果  $\operatorname{Re}(\sigma(\mu)) > 0$ , 那么映射(24)能够从不动点分岔出稳定的不变圈; 如果  $\operatorname{Re}(\sigma(\mu)) < 0$ , 则不动点为稳定的.

根据式(23), 经过计算可以得到

$$\left\{ \begin{aligned} \left| \operatorname{Im} \frac{\lambda_2}{\tilde{\lambda}_1} \right| &= \left| \operatorname{Im} \frac{\left( \frac{b^2 \pi}{12} - \frac{b^2}{8} \right) + i \left( \frac{3c\pi}{16} - \frac{3b^2}{8} \right)}{\mu \frac{a_1 \pi}{4} + \mu \varepsilon \left( \frac{a_1 b}{15} + i \frac{4a_1 b}{45} \right)} \right|, \\ \left| \frac{\lambda_3}{\tilde{\lambda}_1} \right| &= \left| \frac{\frac{b^2}{12}}{\mu \frac{a_1 \pi}{4} + \mu \varepsilon \left( \frac{a_1 b}{15} + i \frac{4a_1 b}{45} \right)} \right|, \\ \left| \operatorname{Im} \frac{\lambda_2}{\tilde{\lambda}_1} \right| / \left| \frac{\lambda_3}{\tilde{\lambda}_1} \right| &= \frac{\left| \left( \frac{b^2}{8} - \frac{b^2 \pi}{12} \right) \left( \frac{a_1 \pi}{4} + \frac{\varepsilon a_1 b}{15} \right) + \left( \frac{3b^2}{8} - \frac{3c\pi}{16} \right) \frac{4a_1 b \varepsilon}{45} \right|}{\frac{b^2}{12} \sqrt{\left( \frac{\varepsilon 4a_1 b}{45} \right)^2 + \left( \frac{a_1 \pi}{4} + \frac{a_1 b \varepsilon}{15} \right)^2}}. \end{aligned} \right. \quad (25)$$

因为干摩擦函数的各个参数取决于材料, 由于材料的多样性, 因此我们可以比较随意地对  $a_1, b, c$  取值, 在这里, 我们取  $a_1 = 1, b = -1, c = -3$ , 同时取  $\varepsilon = 0.5$ . 可以代入式(25)计算出

$$\left| \operatorname{Im} \frac{\lambda_2}{\tilde{\lambda}_1} \right| / \left| \frac{\lambda_3}{\tilde{\lambda}_1} \right| = 3.153782300 > 1$$

为引理 1 中的情形 1), 且

$$\operatorname{Re}(\lambda_2) = \frac{b^2 \pi}{12} - \frac{b^2}{8} \neq 0,$$

根据引理 2, 可知映射(23)可以从不动点分岔出不变圈.

比较引理 2 和引理 3,可以得到

若  $|\lambda_3| < |\tilde{\lambda}_1| |\operatorname{Im}(\lambda_2/\tilde{\lambda}_1)|$  成立,则

$$|\operatorname{Im}(\bar{\sigma}(\mu)\alpha_1(0))| \geq |\bar{\sigma}(\mu)\beta_1(0)| + \varepsilon_1 |\sigma(\mu)|$$

对充分小的  $\varepsilon_1$  成立.

根据引理 3,比较式(23)和式(24),易知  $\operatorname{Re}(\alpha_1(0)) = 3c\pi/16 - 3b^2/8 < 0$ ,我们可以限制  $\mu$  的取值,使得  $\operatorname{Re}(\sigma(\mu)) > 0$ ,那么映射(24)存在从不动点分岔出的稳定不变圈,对应于原微分方程的不变环面;若取  $\mu$  使得  $\operatorname{Re}(\sigma(\mu)) < 0$ ,则映射(24)的不动点为稳定的,对应原微分方程的稳定周期解.数值验证如下:

取  $\mu = 0.2$ ,得到  $\operatorname{Re}(\sigma(\mu)) > 0$ ,引理 3 断言该映射(24)存在稳定的不变圈,即原来系统的环面解.数值结果如图 2 所示.

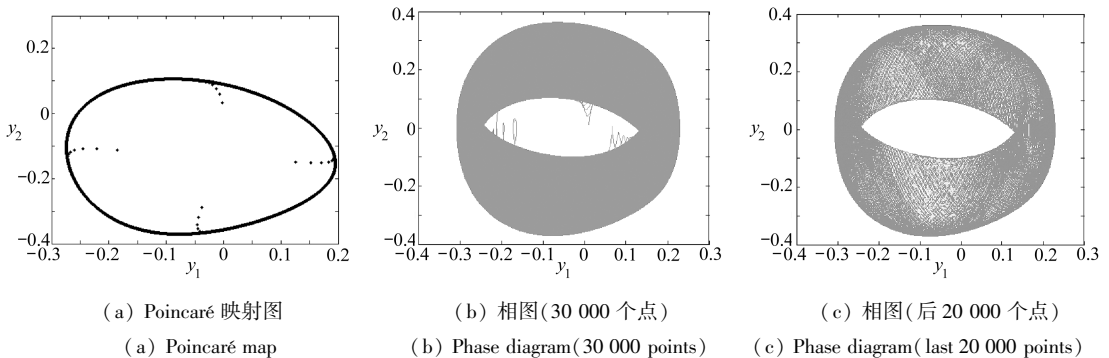


图 2  $\mu = 0.2$  时的数值结果

Fig.2 Numerical results when  $\mu = 0.2$

取  $\mu = -0.2$ ,得到  $\operatorname{Re}(\sigma(\mu)) < 0$ ,引理 3 断言该映射(24)存在稳定的不动点,即原来系统的周期解.数值结果如图 3 所示.

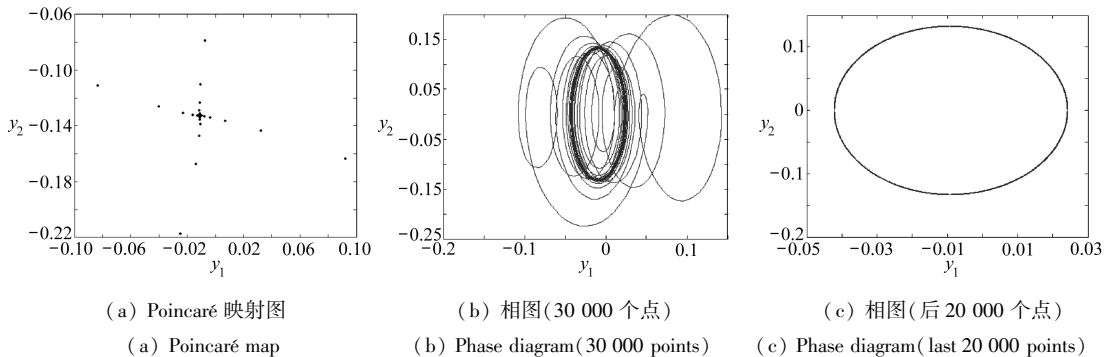


图 3  $\mu = -0.2$  时的数值结果

Fig.3 Numerical results when  $\mu = -0.2$

## 4 结 论

本文研究了单自由度干摩擦系统 Poincaré 映射的建立方法,并对 1:4 共振情形作了具体的分析,得到了映射的稳定不动点和稳定不变圈(即原系统的稳定周期解和稳定环面解)存在的条件,并通过数值模拟进行了验证.这说明了本文建立映射、处理映射的方法是有效的.



## 参考文献 (References) :

- [1] Chatterjee S, Mallik A K. Bifurcations and chaos in autonomous self-excited oscillators with impact damping[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, **191**(4): 539-562.
- [2] Budd C, Dux F, Cliffe A. The effect of frequency and clearance variations on single-degree-of-freedom impact oscillators[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, **184**(3): 475-502.
- [3] Luo G W, Xie J H. Hopf bifurcations and chaos of a two-degree-of-freedom vibro-impact system in two strong resonance cases [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2002, **37**(1): 19-34.
- [4] 谢建华. 一类碰撞振动系统的余维二分叉和 Hopf 分叉[J]. *应用数学和力学*, 1996, **17**(1): 63-73. (XIE Jian-hua. Codimension two bifurcations and Hopf bifurcations of an impacting vibrating system[J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 1996, **17**(1): 65-75.)
- [5] Wen G L. Codimension-2 Hopf bifurcation of a two-degree-of-freedom vibro-impact system [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, **242**(3): 475-485.
- [6] XIE Jian-hua, DING Wang-cai. Hopf-Hopf bifurcation and invariant torus  $T^2$  of a vibro-impact systems[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2005, **40**(4): 531-543.
- [7] XIE Jian-hua, DING Wang-cai, Dowell E H, Virgin L N. Hopf-flip bifurcation of high dimensional maps and application to vibro-impact systems[J]. *Acta Mech Sinica*, 2005, **21**(4): 402-410.
- [8] Iooss G. *Bifurcation of Maps and Applications*[M]. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland Publishing Company, 1979.
- [9] Wan Y H. Bifurcation into invariant tori at points of resonance[J]. *Archive for Rational Mechanics Analysis*, 1978, **68**(4): 343-357.

## N-S Bifurcation of an Oscillator With Dry Friction in 1:4 Strong Resonance

GUO Yong, XIE Jian-hua

(School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University,  
Chengdu 610031, P. R. China)

**Abstract:** An oscillator with dry friction under external excitation was considered. The Poincaré map was established according to the series solution near equilibrium in the 1:4 resonance case. By theory of normal forms, the map was reduced into its normal form. It is shown that there exist phenomena of N-S bifurcations. The theoretical results are verified by numerical simulations.

**Key words:** dry friction; Poincaré map; resonant; normal form; periodic solution; torus