

不可压缩材料分析的界带有限元*

吴 锋¹, 孙 雁², 钟万勰¹

(1. 大连理工大学 工程力学系, 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024;

2. 上海交通大学 船舶海洋与建筑工程学院 工程力学系, 上海 200240)

(我刊编委钟万勰来稿)

摘要: 针对完全不可压缩材料系统($\nu = 0.5$), 提出流函数的概念, 给出相应的变分原理, 并进行数值分析. 流函数的引入涉及到高阶微分, 为此提出界带有限单元. 该单元基于界带理论, 能够很好地解决具有高阶微商的变分原理所带来的高阶近似问题.

关键词: 不可压缩; 有限元; 高次插值; 界带; 流函数

中图分类号: O343.1 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.01.001

引 言

不可压缩材料系统的分析, 对于有限元法是一种挑战. 通常用 Poisson 比 $\nu = 0.49, 0.499, \dots$ 来代替进行有限元分析^[1]. 然而当 Poisson 比取得很大时, 常常造成单元的体积闭锁, 过去常用的有限元法包括减缩积分^[2], 非协调元^[1,3-6], 混合法^[7]等. 这些方法虽然能够比较好地避免体积闭锁, 但都不能真正解决 Poisson 比 $\nu = 0.5$ 的情况.

如果从基本理论上进行探讨可以发现, 有限元法用在弹性平面分析时, 不采用重调和方程的应力函数, 而采用位移法和最小总势能原理求解, 因为此时插值函数只要求函数本身连续(即所谓 C_0 连续性即可), 即取得很大成功. 而对于板弯曲问题, 有限元位移法直接插值发生了所谓 C_1 连续性要求的问题. 人们费了许多力气探讨, 也提出许多解决方法, 例如离散 Kirchhoff 有限元^[1], 可得到比较满意的近似结果. 文献[8]建立了板弯曲和平面应力问题的模拟理论, 从这一理论出发, 可以采用平面应力的单元求解板弯曲问题, 从而避免了板弯曲 C_1 连续性要求所带来的问题. 如果从板与平面问题的模拟理论出发, 板弯曲单元也应可以用于平面问题, 平面问题中有应力函数, 借用平面问题中应力函数的做法, 对于 Poisson 比 $\nu = 0.5$ 的完全不可压缩材料, 本文引入流函数的概念, 从根本上消除体积变形, 从而避免了体积闭锁. 流函数是位移的积分, 因此需要高阶插值. 对高阶微分方程的有限元求解是一个基本问题, 本文予以探讨.

本文针对不可压缩材料系统($\nu = 0.5$), 提出流函数的概念, 并给出相应的变分原理. 由

* 收稿日期: 2012-11-28; 修订日期: 2012-12-17

作者简介: 吴锋(1985—), 男, 江苏人, 博士生(E-mail: wufeng.chn@163.com);

孙雁(1965—), 女, 上海人, 副教授(E-mail: sunyan@sju.edu.cn);

钟万勰(1934—), 男, 浙江人, 院士(通讯作者. E-mail: zwoffice@dlut.edu.cn).

于流函数涉及到高阶微分,为此设计了界带有限单元.该单元基于界带理论^[9-12],能够很好地解决高阶近似的要求.

1 流函数

1.1 平面应变问题

对于平面应变问题,应变向量为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy})^T, \quad (1)$$

弹性矩阵的表达式为^[8]

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 + \lambda \mathbf{D}_2, \quad (2)$$

其中

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (3)$$

$$\mathbf{D}_1 = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

对于不可压缩材料的平面应变问题,有体积不变的要求,即

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (6)$$

上式中, θ 表示体应变.为使体积不变,本文引入流函数 $\psi(x,y)$,令

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{Q}\psi, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

此时 $\theta = 0$ 自动满足.根据式(7)可以求得平面应变问题的应变为

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \mathbf{B}\psi, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

引入流函数后,基本变量不再是位移,而是流函数 ψ .以 ψ 为变量,在处理边界条件时需要注意,对 ψ 求导才能得到位移,因此 ψ 中必然包含一个积分常数,在有限元计算时需要添加一个人工边界,可在计算域 Ω 内任给一点 \mathbf{x}^* ,要求 $\psi(\mathbf{x}^*) = c$, c 为任意常数,可令为0.对于位移边界条件,可以用Lagrange乘子法,罚函数法等手段处理,本文采用罚函数.引入位移边界条件的势能泛函为

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dx dy - \int_{\Gamma} \mathbf{f}^T \mathbf{u} d\Gamma + \frac{\alpha}{2} \int_S (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})^T (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) dS + \frac{\alpha}{2} [\psi(\mathbf{x}^*)]^2, \quad (9)$$

式中, Ω 求解域, S 为位移边界, Γ 为力边界, α 取为 $10^5 E$, $\bar{\mathbf{u}}$ 为边界上给定的位移, \mathbf{f} 为边界上的

外力.把式(4)、(5)、(7)、(8)代入式(9)可得

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\psi} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_1 \mathbf{B} \boldsymbol{\psi} \, dx dy - \int_{\Gamma} \mathbf{f}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\psi} \, d\Gamma + \\ & \frac{\alpha}{2} \int_S (\mathbf{Q} \boldsymbol{\psi} - \bar{\mathbf{u}})^T (\mathbf{Q} \boldsymbol{\psi} - \bar{\mathbf{u}}) \, dS + \frac{\alpha}{2} [\mathbf{Q} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}^*)]^2. \end{aligned} \quad (10)$$

1.2 轴对称问题

对于轴对称问题,应变向量为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_r \quad \varepsilon_{\theta} \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{rz})^T. \quad (11)$$

弹性矩阵也可写成式(2)形式^[8],其中

$$\mathbf{D}_1 = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

对于不可压缩材料的轴对称问题,如有体积不变的要求,即

$$\theta = \varepsilon_r + \varepsilon_{\theta} + \varepsilon_z = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial r u_r}{r \partial r} + \frac{\partial r w}{r \partial z} = 0, \quad (14)$$

可引入流函数 $\psi(r, z)$, 使得

$$\begin{pmatrix} u_r \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\psi}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{r \partial z} \\ -\frac{\partial}{r \partial r} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

此时 $\theta = 0$ 自动满足.于是,轴对称问题的应变为

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_{\theta} \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{pmatrix} = \mathbf{B} \boldsymbol{\psi}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial z \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

采用罚函数,引入位移边界条件的势能泛函为

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \, r \, d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{f}^T \mathbf{u} \, r \, d\Gamma + \frac{\alpha}{2} \int_S (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})^T (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \, r \, dS + \frac{\alpha}{2} [\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}^*)]^2, \quad (17)$$

式中, Ω 为求解域, S 为位移边界, Γ 为力边界, α 取为 $10^5 E$, $\bar{\mathbf{u}}$ 为边界上给定的位移, \mathbf{f} 为边界上的外力.把式(12)、(13)、(15)、(16)代入式(17)可得

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\psi} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_1 \mathbf{B} \boldsymbol{\psi} \, r \, d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{f}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\psi} \, r \, d\Gamma +$$

$$\frac{\alpha}{2} \int_S (\mathbf{Q}\psi - \bar{\mathbf{u}})^T (\mathbf{Q}\psi - \bar{\mathbf{u}}) r dS + \frac{\alpha}{2} [\mathbf{Q}\psi(\mathbf{x}^*)]^2. \quad (18)$$

2 界带有限元

比较式(9)和(10)或者式(17)和(18)可以发现,当取位移为变量时,只要求插值函数有一阶微商,而当引入流函数后要求插值函数至少有二阶微商,为此本文给出一种新的单元,界带有限元。

2.1 一维问题

有限元法是通过函数的节点插值来近似的,一般要求单元内部的插值通过全部边界点;而 Gauss 提出的最小二乘法是拟合,并不要求函数通过给定点而要求函数与给定点非常接近。无网格法常常采用拟合,而有限元法则通常运用插值。

对于一维 Euler-Bernoulli 梁,只要在离散节点处引入转角变量,每个节点有位移与转角 2 个自由度,就可以处理得很好。但对于二维问题(例如板弯曲)就出现 C_1 连续性的问题了。本文以一维 Euler-Bernoulli 梁为例,介绍界带有限元的基本理论。

界带有限元也可运用插值法。设将一维梁划分节点

$$x_0 = 0, \eta, \dots, k\eta = x_k, \dots,$$

将 $k^\#$ 单元取为区段 $(k-1, k)$ 。采用界带理论可以只用位移来描述(见图 1)。 $k^\#$ 单元的两端可看成为由左 $k-2, k-1$ 与右 $k, k+1$ 的界带所构成。

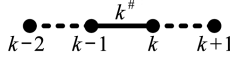


图 1 $k^\#$ 单元

Fig. 1 The $k^\#$ th element

于是在 $k^\#$ 单元 $(k-1, k)$ 内部任意点 $x (x_{k-1} \leq x \leq x_k)$ 的位移 $w_{k^\#}(x)$ 可用节点 $k-2, k-1, k$ 和 $k+1$ 的位移插值而得到,此时插值给出的位移 3 次多项式,而曲率则是线性分布,可用于计算单元的变形能。显然,这样的插值符合梁理论的需要,所以界带理论可用于梁弯曲的有限元分析。现在有 4 点 $(x_{k-2}, w_{k-2}), (x_{k-1}, w_{k-1}), (x_k, w_k), (x_{k+1}, w_{k+1})$ 插值 3 次多项式,插值函数在一维条件下比较容易,可用 Lagrange 多项式插值

$$w_{k^\#}(x) = w_{k-2}L_{k-2}(x) + w_{k-1}L_{k-1}(x) + w_kL_k(x) + w_{k+1}L_{k+1}(x), \quad (19)$$

全部是 3 次多项式,计算曲率时就容易了。对于 $(k+1)^\#$ 单元 $(k, k+1)$, 根据 $(x_{k-1}, w_{k-1}), (x_k, w_k), (x_{k+1}, w_{k+1}), (x_{k+2}, w_{k+2})$, 可以用 Lagrange 多项式插值求出 $w_{(k+1)^\#}(x)$ 。

2.2 二维问题

对于二维不可压缩材料,以流函数为变量,分别构造 3 种二维界带单元,如图 2~4 所示。

图 2 和图 3 是矩形界带单元,图中,实线所围阴影部分为单元本体,虚线所围为单元的界带。图 2 是 12 节点矩形界带单元(BE12),其中,4 个角点: $(k_x - 1, k_y - 1), (k_x, k_y - 1), (k_x, k_y), (k_x - 1, k_y)$ 表示一个单元,向外拓展节点 $(k_x - 1, k_y - 2), (k_x, k_y - 2), (k_x + 1, k_y - 1), (k_x + 1, k_y), (k_x, k_y + 1), (k_x - 1, k_y + 1), (k_x - 2, k_y)$ 和 $(k_x - 2, k_y - 1)$, 共 8 个点。这样,周围界带节点有 12 个,即 12 个条件。单元区域内的函数 $\psi(x, y)$ 可用多项式插值

$$\begin{aligned} \psi(x, y) = & a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7x^2y + \\ & a_8xy^2 + a_9y^3 + a_{10}xy^3 + a_{11}x^3y, \end{aligned} \quad (20)$$

然后在这 12 个节点上插值,即可求出这些常数。二阶偏微商后,具有完全线性分布以计算变形

能,还有二次变形但不完全.注意到外层拓展的有 8 点,如果愿意还可加上角点方向的外拓,即增加 $(k_x - 2, k_y - 2)$, $(k_x + 1, k_y + 1)$, $(k_x - 2, k_y + 1)$ 和 $(k_x + 1, k_y - 2)$ 这 4 点,这样共 16 个节点,即为图 3 所示 16 节点矩形界带单元(BE16),此时可以直接通过 Lagrange 多项式插值.

$$\psi(x, y) = \sum_{i=k_x-2}^{k_x+1} \sum_{j=k_y-2}^{k_y+1} L_i(x)L_j(y)\psi(x_i, y_j), \tag{21}$$

式中, $L_i(x)$, $L_j(y)$ 分别为 x 和 y 方向的 Lagrange 多项式.

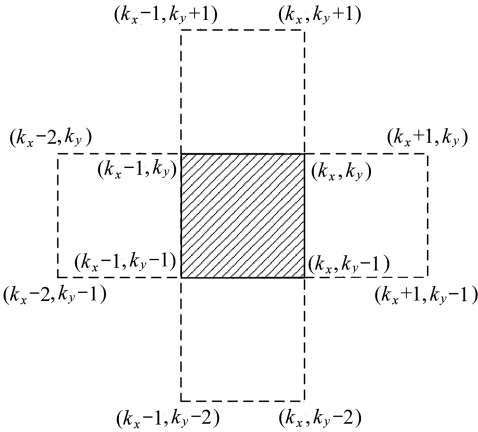


图 2 12 节点界带单元

Fig. 2 Rectangular inter-belt element with 12 nodes

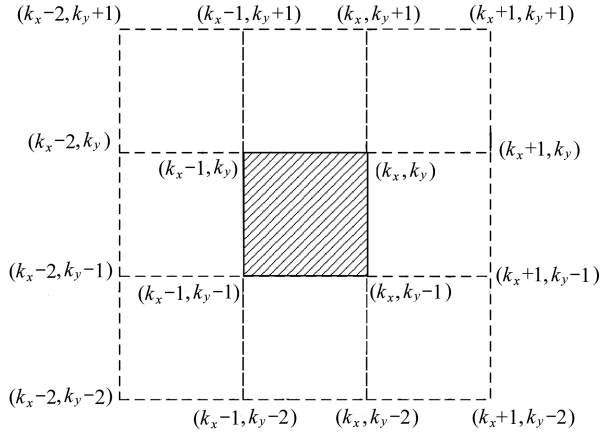


图 3 16 节点界带单元

Fig. 3 Rectangular inter-belt element with 16 nodes

图 4 为 6 节点三角形界带单元(TBE6),实线所画为单元本体,虚线所画为单元的界带.图 4 所示单元区域内的函数 $\psi(x, y)$ 可用多项式插值为 2 次完全多项式

$$\psi(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2. \tag{22}$$

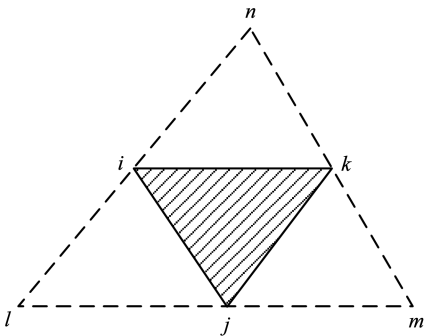


图 4 6 节点三角形界带单元

Fig. 4 Triangular inter-belt element with 6 nodes

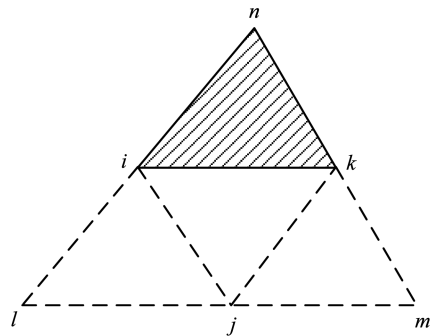


图 5 6 节点三角形界带单元

Fig. 5 Triangular inter-belt element with 6 nodes

2.3 边界处理

这里以三角形界带单元为例,分析界带单元在边界处的处理.当采用三角形界带单元剖分结构,在结构的边或角处时,可以对三角形界带单元变形为如图 5 所示.

图中实线所围阴影部分为单元本体,虚线所围为单元的界带.图 5 所示界带单元中,把单元本体移到角处,从而可以方便地对结构的边和角处进行剖分.单元的插值函数不变,仍然取式(22).关于矩形界带单元做法类似,不再介绍.

必须注意,界带单元是一种新类型的单元,关于其边界的处理,本文也只是给出一种简单的处理方法,因此还有更为简单和巧妙的方法值得进一步研究。

3 数值试验

算例 1 左端固定,右端自由,右端加弯矩,相当于纯弯曲梁的平面应变问题,已知 Poisson 比 $\nu = 0.5$, 弹性模量为 $E = 1.2 \times 10^9$ Pa, 荷载 $F = 1\ 000$ N, 梁尺寸为 $h = 1$ m, $L = 4$ m(图 6)。本文方法分别采用三角形界带单元,12 节点矩形界带单元和 16 节点界带单元计算该题,其中,三角形界带单元共采用 128 个单元,85 个节点,12 节点矩形界带单元共采用 36 个单元,52 个节点,矩形剖分。16 节点矩形界带单元也采用 52 个节点,36 个单元,但是其剖分为不规则四边形,剖分如图 7 所示。同时采用 ANSYS 软件计算,单元选 PLANE182 单元和 PLANE183 单元,Poisson 比取 $\nu = 0.499\ 99$ 。PLANE182 单元为 4 节点矩形单元,采用减缩积分,网格剖分后共 104 个自由度。PLANE183 单元为 8 节点矩形单元,采用减缩积分,网格剖分后共 278 个自由度。经计算,结果列于表 1。

表 1 算例 1 的计算结果
Table 1 The result of the test 1

单位:m
unit: m

solution	$y = 0.5$			
	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$
u (analytical solution)	-0.000 037 500 0	-0.000 075 000 0	-0.000 112 500 0	-0.000 150 000 0
u (TBE6)	-0.000 036 014 1	-0.000 069 665 2	-0.000 103 776 1	-0.000 143 281 3
u (BE12)	-0.000 037 500 3	-0.000 075 000 2	-0.000 112 500 2	-0.000 150 000 3
u (BE16)	-0.000 036 915 4	-0.000 079 758 6	-0.000 115 833 3	-0.000 156 446 1
u (PLANE182)	-0.000 039 533 5	-0.000 079 240 7	-0.000 118 955 4	-0.000 169 224 3
u (PLANE183)	-0.000 037 499 8	-0.000 074 999 0	-0.000 112 585 7	-0.000 170 506 1
v (analytical solution)	0.000 046 875 0	0.000 159 375 0	0.000 346 875 0	0.000 609 375 0
v (TBE6)	0.000 050 901 0	0.000 161 801 1	0.000 340 253 4	0.000 582 721 4
v (BE12)	0.000 046 875 5	0.000 159 376 0	0.000 346 876 5	0.000 609 377 0
v (BE16)	0.000 045 926 4	0.000 165 427 6	0.000 341 988 1	0.000 619 736 1
v (PLANE182)	0.000 049 115 4	0.000 167 886 2	0.000 365 782 0	0.000 648 995 8
v (PLANE183)	0.000 046 861 2	0.000 159 346 7	0.000 346 863 2	0.000 627 818 4

从表 1 可以看出,对于平面应变问题,引入流函数后,无论是采用 6 节点三角形界带单元、12 节点矩形界带单元还是 16 节点界带单元,都没有体积闭锁。6 节点三角形界带单元对流函数 2 次插值,关于位移只有 1 次插值,因此精度不如 12 节点矩形界带单元好,BE16 是不规则四边形剖分,精度虽然不如规则剖分的 12 节点界带单元,但是仍然比 6 节点三角形界带单元精度高。ANSYS 无法计算 $\nu = 0.5$ 的情况,只能用 0.499 99 近似,当选用 PLANE182 单元计算时,对位移插值能够保证一次完全插值,但是当自由度数大于 TBE6 的自由度数时,精度仍然不如 TBE6 的精度,这说明其计算效率不如 TBE6,当然也不如 BE12 和 BE16。PLANE183 单元的精度高好于 TBE6,与 BE12 的精度相当,同时其自由度数为 278 个,而 BE12 单元的自由度数只有 52 个,远小于 PLANE183 的自由度数。

算例 2 本例为轴对称问题,具体模型为一个无限长厚壁圆筒,为方便计算,截出一段圆筒,截出长度为 2 m,在截面要求沿圆筒厚壁 z 方向位移 $w = 0$ m,沿 r 方向自由移动。因为考虑的是轴对称问题,沿轴线对称,所以可沿轴线剖圆筒,取出其剖面计算,如图 8 所示。其中,已

知:单位面积的法向荷载 $p = 230 \text{ Pa}$,弹性模量 $E = 2 \times 10^6 \text{ Pa}$,Poisson 比 $\nu = 0.5$. 采用 16 节点矩形界带元计算,单元剖分为 3×15 ,共 64 个节点,同时采用 ANSYS 软件计算,单元选 PLANE183 单元,Poisson 比取 $\nu = 0.49999$. PLANE183 单元为 8 节点矩形单元,采用减缩积分,网格剖分后共 344 个自由度. 经计算, r 方向位移的计算结果列于表 2,并与解析解比较.

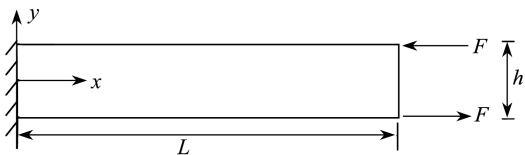


图6 算例 1 的模型

Fig.6 The model of the test 1

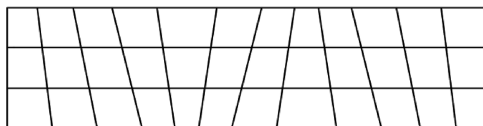


图7 16 节点界带单元模型

Fig.7 The model of inter-belt element with 16 nodes

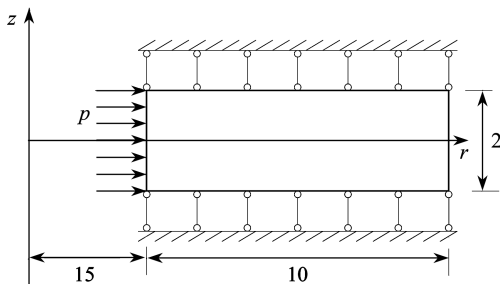


图8 算例 2 的模型

Fig.8 The model of the test 2

表 2 算例 2 的计算结果

单位:m

Table 2 The result of the test 2

unit: m

solution and residual	$z = 0$	
	$r = 15$	$r = 25$
analytical solution	0.004 042 972 3	0.002 425 787 3
BE16	0.004 042 968 8	0.002 425 781 3
PLANE183	0.004 042 970 9	0.002 425 813 6
BE16 relative error $R/\%$	0.000 088	0.000 25
PLANE183 relative error $R/\%$	0.000 035	0.001 10

从表 2 可以看出,对于轴对称材料不可压缩问题,引入流函数后,消除了体积闭锁. 并且 16 节点矩形界带单元的精度十分高,与解析解相比相对误差很小. ANSYS 无法计算 $\nu = 0.5$ 的情况,只能用 0.49999 近似,选用 PLANE183 单元计算时,其精度与本文 BE16 的精度相当,同时其自由度数为 344 个,而 BE16 单元的自由度数只有 64 个,远小于 PLANE183 的自由度数. 这说明本文方法和程序是正确的.

4 结 论

本文的工作包含两个部分:1) 针对不可压缩材料系统,提出流函数的概念,给出相应的变分原理. 基于流函数,可以处理完全不可压缩材料系统 ($\nu = 0.5$),这是之前的研究很少涉及的. 2) 流函数的引入涉及到高阶微分,为此本文提出界带有限单元,该单元基于界带理论,能够很好地解决高阶近似的要求. 关于界带有限单元,有许多问题值得研究,例如边界的处理、三

维的界带单元、考虑时间域时的界带单元、界带单元的积分等等。采用界带单元的显著优势是可以通过少量节点进行高次插值,从而提高计算精度和计算效率。

参考文献(References):

- [1] Zienkiewicz O C, Taylor R L. *The Finite Element Method*[M]. 5th ed. Elsevier, 2005.
- [2] 史守峡, 白若阳. 非线性不可压缩橡胶柱体的大变形有限元分析[J]. 世界地震工程, 1998, **14**(1): 51-58. (SHI Shou-xia, BAI Ruo-yang. A penalty finite element approach for large strains of nearly incompressible rubber cylinder[J]. *World Information on Earthquake Engineering*, 1998, **14**(1): 51-58. (in Chinese))
- [3] Brenner S C. A nonconforming mixed multigrid method for the pur traction problem in planar linear elasticity[J]. *Math Comp*, 1994, **63**: 435-460.)
- [4] Falk R S. Nonconforming finite element methods for the equations of linear elasticity[J]. *Math Comp*, 1991, **57**: 529-550.
- [5] Falk R S, Morley M E. Equivalence of finite element methods for problems in elasticity[J]. *SIAM J Numer Anal*, 1990, **27**(6): 1486-1505.
- [6] Kouhia R, Stenberg R. A linear nonconforming finite element method for nearly incompressible elasticity and Stokes flow[J]. *Comput Meths Appl Mech Engrg*, 1995, **124**(3): 195-212.
- [7] 党发宁, 荣廷玉, 孙训方. 用有限元广义混合法分析不可压缩或几乎不可压缩弹性体[J]. 力学季刊, 2000, **21**(3): 299-304. (DANG Fa-ning, RONG Ting-yu, SUN Xun-fang. Application of generalized mixed finite element method to research on incompressible and nearly incompressible elasticity[J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2000, **21**(3): 299-304. (in Chinese))
- [8] 姚伟岸, 钟万颢. 辛弹性力学[M]. 高等教育出版社, 2003. (YAO Wei-an, ZHONG Wan-xie. *Symplectic Elasticity*[M]. Singapore: World Scientific, 2009.)
- [9] 张洪武, 姚征, 钟万颢. 界带分析的基本理论和计算方法[J]. 计算力学学报, 2006, **23**(3): 257-263. (ZHANG Hong-wu, YAO Zheng, ZHONG Wan-xie. Basic theory and algorithm for Inter-Belt analysis[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2006, **23**(3): 257-263. (in Chinese))
- [10] 姚征, 张洪武, 王晋宝, 钟万颢. 基于界带模型的碳纳米管声子谱的辛分析[J]. 固体力学学报, 2008, **29**(1): 13-22. (YAO Zheng, ZHANG Hong-wu, WANG Jin-bao, ZHONG Wan-xie. A new method for tensile creep compliance of composite solid propellant[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2008, **29**(1): 13-22. (in Chinese))
- [11] 姚征. 辛体系算法在波的传播与振动问题中的应用[D]. 博士论文. 大连: 大连理工大学, 2007. (YAO Zheng. Applications of symplectic algorithm in wave propagation and vibration problems[D]. Ph D thesis. Dalian: Dalian University of Technology, 2007. (in Chinese))
- [12] 钟万颢, 高强. 辛破茧[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2011. (ZHONG Wan-xie, GAO Qiang. *Break the Limitations of Symplecticity*[M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2011. (in Chinese))

Inter-Belt Finite Element for the Analysis of Incompressible Material Problems

WU Feng¹, SUN Yan², ZHONG Wan-xie¹

(1. *State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment, Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P. R. China;*

2. *Department of Engineering Mechanics, School of Naval Architecture, Ocean and Civil Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, P. R. China*)

Abstract: A concept of the flow function and the corresponding variational principle were developed to deal with the absolute incompressible material system, and the numerical analysis was also presented. When the flow function was introduced, the higher order differential system was involved, which led to a new type of element, the inter-belt finite element, based on the belt theory. The belt finite element can overcome well the problem derived by the variational principle with the higher order differential.

Key words: incompressible; finite element method; higher order interpolation; inter-belt; flow function