

基于孔洞分布理论的多孔材料板振动分析*

马宇立^{1,2}, 陈继伟¹, 刘咏泉¹, 苏先樾¹

(1. 北京大学 工学院 力学与空天技术系,
湍流与复杂系统国家重点实验室,北京 100871;
2. 中铝科学技术研究院,北京 100082)

摘要: 主要研究了不规则几何结构多孔材料制备的板材的振动分析. 基于 Gibson-Ashby 等效模量计算, 引入了分布因子加以改进原有的理论. 对于材料的孔洞分布情况, 提出了 Burr 分布的概率密度拟合, 获得了 Burr 分布的 3 个自变量参数并用实际的孔洞几何参数进行了比对与描述. 基于平板振动理论和等效模量理论, 计算出了随着孔洞分布情况变化下的平板固有振动频率, 并分析了孔洞尺寸与频率间的关系. 之后引入了尺度因子来量化描述平均孔洞尺寸对多孔平板的频率影响. 结论证明了改进的等效理论能够有效地体现孔洞的分布对平板力学性能的改变, 论述了孔洞尺寸范围, 孔洞离散度以及平均孔洞尺寸对多孔方板结构固有频率的影响. 这种影响将会对多孔材料结构的优化设计起指导作用.

关键词: 闭孔多孔材料; 平板振动分析; 固有频率; 孔洞尺寸分布; 等效弹性模量; 尺度效应

中图分类号: O113.1;O32 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.12.002

引言

多孔材料是一种新兴的材料, 具有轻质、高吸能性, 以及大跨度的力学性能特征. 这些材料大量被应用于汽车工业、航天航空以及风力发电机中, 提供轻质且高刚度的结构特性. 随着技术的不断进步, 多孔材料在现代工业中正起着越来越重要的作用.

众所周知, 多孔材料的力学性能主要取决于两点, 基础材料以及孔洞的结构分布, 例如孔洞数量、孔洞体积以及孔洞形状等. 在 1997 年, Gibson 和 Ashby^[1] 讨论了多孔固体的结构特性并且导出了等效多孔固体的力学性能方程, 我们称之为普适多孔固体性能方程. 这一系列方程阐述了块体材料与多孔材料之间的性能关系, 并用大量实验做了数据拟合. 对于这个理论以及规则的几何孔洞形态特征, 有着大量的研究文献, 特别是在实验与数值模拟方面取得了许多精细的成果. 并且, 人们也对许多关于闭孔非高分子材料^[2-4] 与开孔高分子材料^[5-7] 的力学性能进行了分析与讨论. 此后, 在一系列的讨论中, Ashby^[8-9] 引入了形状因素的概念, 作为无量纲化的参数, 用于研究一类基于几何参量的梁截面的结构效率. 需要指出的是, 在这一系列的研

* 收稿日期: 2011-03-14; 修订日期: 2012-04-12

基金项目: 国家自然科学基金资助课题(90916007); 国家留学基金委(CSC)的资助(第一作者)课题

作者简介: 马宇立(1983—), 男, 上海人, 工程师, 博士(E-mail: ma_yl@sinr.cn);

苏先樾(联系人. Tel: +86-10-62759378; E-mail: xyswsk@pku.edu.cn).

究中,几何参数都是用 Gibson 和 Ashby 的等效理论得出的,因此,对材料的要求就是宏观相对均匀规则。

然而,在关于闭孔高分子材料的研究中,大量的研究都着重于规则孔洞尺寸与形状,如立方孔、六棱孔等,从而可以通过几何结构的简化来获得力学性能的变化。而对于不规则结构的多孔材料,例如大跨度的孔径分布,以及无规则的形状,研究分析往往着重于对某一固定材料的实验表征以及有限元的模型建立。Jeon 等^[10-11]对不规则泡沫铝进行了有限元的模拟,得出了某种结构的泡沫铝的力学性质。Teixeira 等^[12]应用了一种先进模具工艺来制备泡沫高分子材料并测试了力学性能。在这些研究中,研究者们主要讨论的是对某一特定材料的力学性能进行表征,但对于力学性能与几何结构的关系并没有做理论上的解析,这也是因为在不均匀不规则的孔洞分布下,结构的分析变得异常复杂。在最近的研究中, Ma 等^[13]使用了 X 射线微断层扫描技术对高分子多孔材料的内部结构进行了观察与表征,发现同种材料在密度相差不大的情况下,几何结构的变化对材料的力学性能如弹性模量等有着巨大的影响。基于这种结论, Ma 等人提出了一种基于孔洞尺寸分布的改进的等效力学性能理论,并且得到了实验数据的支持。相对于 Gibson-Ashby 理论,改进理论更好地反映了微观几何结构对于力学性能的影响。然而,这些结果都只是针对微观的材料模型,尚不能直接用于宏观结构的力学分析。因此有待进一步研究如何将微观的材料用于宏观的结构力学分析。Dai 等^[14]对两相材料的梁结构进行了尺度效应的分析,总结出在材料分数相同的情况下,结构的刚度随着分层细化的变化影响。Chen 等^[15]研究了点阵材料的夹心板的自由振动分析并给出了板材振动的理想数值理论。但对于不规则闭孔材料的板结构的振动分析则尚欠缺。

本文基于闭孔多孔材料的孔洞分布等效性能理论,分析研究了多孔材料板结构的自由振动模型。首先,从等效理论着手,根据体积分布因子推导出了板材的等效模量。然后,根据模量的结论,推导出了等效板材的控制方程,并且给出了固有频率的表达式。接着,运用孔洞分布函数表达了孔洞分布效应对于材料宏观结构的影响,并分析了孔洞的具体影响参数,解析地提出了板的固有频率与孔洞分布的表达式关系。最后讨论了孔洞尺寸的尺度效应,并与现有的结果进行了比对,获得了良好的吻合性,量化地分析了多孔材料的孔洞尺寸分布对于板结构的固有频率的影响。

1 不规则闭孔材料等效弹性模量的改进理论

在多孔固体理论中,基于大量的实验数据, Gibson 和 Ashby^[1]推导出了闭孔材料有着如下的等效弹性模量理论:

$$\frac{E^*}{E_s} = C_L \phi^2 \left(\frac{\rho^*}{\rho_s} \right)^2 + C'_L (1 - \phi) \frac{\rho^*}{\rho_s} + \frac{p_0 (1 - 2\nu^*)}{E_s (1 - \rho^*/\rho_s)}, \quad (1)$$

其中,带星号的量表示等效量,下标 s 表示固体量, ϕ 是孔棱占总固体的体积分数,对于不规则的孔洞尺寸与结构来说,这个参数是难以解析求解的。

基于方程(1),我们引入了一项分布系数 λ 来替代原有的常数 C_L 和 C'_L , 表征孔洞体积分布对于等效量的影响,并重新改写了方程

$$\frac{E^*}{E_s} = (\lambda \phi)^2 \left(\frac{\rho^*}{\rho_s} \right)^2 + (1 - \lambda \phi) \frac{\rho^*}{\rho_s}, \quad (2)$$

在这个方程中, λ 不是一个常数,而是和孔洞体积分布相关的函数。在作如此改进之后,我们可以将 $\lambda \phi$ 看做一个整体来求解,于是就可以通过实验图像概略地求得 ϕ 而不影响整体解的

准确性,因为在整个方程中关键系数变成了 λ 。此外需要强调的是,对于不同成分的材料,所求得的 λ 也是不同的,需要进行统计的分析。在本文的研究中,对于聚丙烯-纳米粘土多孔材料, λ 求解出的是一个基于 Burr 分布变量的函数。对于本理论而言,求解 λ 是最重要的步骤。

在上一篇文章中^[13],我们讨论了对于聚丙烯-纳米粘土多孔材料不同制备条件下的孔洞分布情况,得出了一个 Burr 分布的结论并且有着良好的数值拟合依据。Burr 分布的累积密度函数为

$$F(x) = [1 - (1 + (x/\beta)^\alpha)^{-k}] \times 100\%, \quad (3)$$

参数 k, α 和 β 是 Burr 分布的两个形状参数和一个尺度参数,通过这3个参数的变化可以拟合不同孔洞分布的情况。需要指出的是,尽管在理论上3个参数可以取任意正值,但在实际的拟合过程中,由于需要考虑到实际材料的孔洞分布界限,这3个参数的取值是有一定的范围的。如果超出了实际范围,则函数会失真,无法模拟正确的孔洞分布。累积密度函数的意义是,当孔洞的尺寸为 $10^{-3}x \text{ mm}^3$ 时,则有百分之 $F(x)$ 的孔洞体积比该尺寸小。对于描述大量不同的孔洞分布,这是一个精确而又简便的方法。

根据实验的结果以及拟合的参数,运用最小二乘法,分布系数 λ 可以求解得

$$\lambda = \exp(ak + b\alpha + c\beta + d), \quad (4)$$

其中, a, b, c 和 d 都是常数。

在计算得出 λ 之后,我们将 Gibson-Ashby 理论和改进的孔洞分布理论分别与实验值进行了对比,结果反映出在原有的 Gibson-Ashby 理论下,与实际的实验数据误差较大,而改进的理论实验值有着良好的吻合性。

2 不规则多孔材料板的振动分析

假设有如图1所示的有限边界多孔材料方板结构,我们所关注的动态特性主要为其自由振动的固有频率。

2.1 控制方程

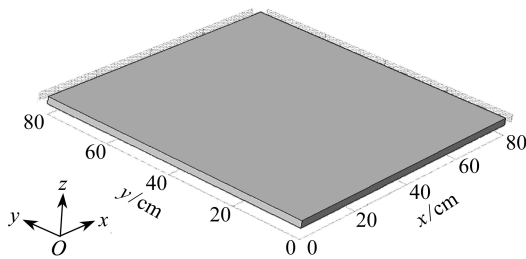


图1 不规则闭孔材料的等效方板结构

Fig.1 3D model of closed-cell polymer foam plate

基于 Mindlin 板理论^[16],一块连续介质板的位移场可写成

$$\begin{cases} u = -z\psi_x(x, y, z, t), \\ v = -z\psi_y(x, y, z, t), \\ w = w_0(x, y, z, t), \end{cases} \quad (5)$$

其中, z 是垂直于板材中心面的坐标值, w_0 是中心面某点的挠度, t 代表时间, ψ_x, ψ_y 是垂直于 x 和 y 轴的转角。

根据厚板的一阶剪切变形理论,板的自由运动微分方程如下:

$$C\left(\frac{\partial w^2}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi_x}{\partial x}\right) + C\left(\frac{\partial w^2}{\partial y^2} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y}\right) = \rho h \frac{\partial w^2}{\partial t^2}, \quad (6)$$

$$C\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x\right) + D\left(\frac{\partial \psi_x^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \psi_y^2}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial \psi_y^2}{\partial x \partial y}\right) = J_x \frac{\partial \psi_x^2}{\partial t^2}, \quad (7)$$

$$C\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y\right) + D\left(\frac{\partial \psi_y^2}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \psi_x^2}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial \psi_x^2}{\partial x \partial y}\right) = J_y \frac{\partial \psi_y^2}{\partial t^2}, \quad (8)$$

其中, C 和 D 是等效的横向剪切刚度和弯曲刚度:

$$C = G^* h = \frac{3}{8} E^* h, \quad (9)$$

$$D = \frac{E^* h^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (10)$$

J_x 和 J_y 是板横截面的单位转动惯量. 由于多孔材料板的相对密度很低. 因此, 在之后的讨论中可以将面板的转动惯量略去.

将方程(7)和方程(8)根据 x 与 y 的微分相加, 可得

$$C\nabla^2 w + D\nabla^2 \psi - C\psi = 0, \quad (11)$$

其中, ∇^2 是 Laplace 算子, ψ 可写作如下形式

$$\psi = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}. \quad (12)$$

将方程(12)代入方程(6)可得

$$C\nabla^2 w - C\psi - \rho h \frac{\partial w^2}{\partial t^2} = 0. \quad (13)$$

从方程(11)和(13)中消去 ψ 后可得

$$\frac{\partial w^4}{\partial x^4} + \frac{\partial w^4}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial w^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial w^2}{\partial x^2} + \frac{\partial w^2}{\partial y^2} - \frac{\rho h}{C} \left(\frac{\partial w^4}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial w^4}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial w^2}{\partial t^2} = 0. \quad (14)$$

2.2 固有频率计算

考虑 4 边固支的一块方形板, 则其位移边界条件可写成

$$\begin{cases} x = 0, a: w = \psi_y = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} = 0, \\ y = 0, b: w = \psi_x = \frac{\partial \psi_y}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (15)$$

其中, a 和 b 是方形板两边的长度. 对于简谐运动, 方板的挠度和转角可写成

$$w = A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin(\omega t + \varphi), \quad (16)$$

$$\psi_x = B_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin(\omega t + \varphi), \quad (17)$$

$$\psi_y = C_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin(\omega t + \varphi), \quad (18)$$

其中, A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} 是未确定的常数, ω 和 φ 是相应的固有频率和初始相位角.

将方程(16)代入方程(14)可得

$$s_1 = \omega_{mn}^2 \rho h s_2, \quad (19)$$

其中

$$s_1 = \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right)^2, \quad s_2 = \frac{1}{C} \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) + \frac{1}{D}, \quad (20)$$

其中, m 和 n 是 x 和 y 方向对应的半波长数.

通过方程(19), 可得规则孔洞方板弯曲振动的固有频率为

$$\omega_{mn} = \left(\frac{s_1}{\rho h s_2} \right)^{1/2}. \quad (21)$$

如果方板的边长 a, b 比板厚 h 大 20 倍以上, 则厚板理论可以退化为薄板理论, 即可忽略剪切刚度的影响, 则方程(21)可以简化为

$$\omega_{mn} = \left(\frac{s_1 D}{\rho h} \right)^{1/2}. \quad (22)$$

3 数值计算与讨论

3.1 Burr 分布参数的几何含义

Burr 分布是一种常见的分布概率, 广泛地应用于统计学、经济学等领域. 然而, 对于材料科学而言, 将概率密度函数对应到多孔材料的孔洞尺寸分布的研究并不常见. 因此, 对于 Burr 分布的孔洞情况的应用来说, 如何确定 Burr 函数的 3 个变量 k, α 与 β 与几何结构的关系成为了重要的研究对象. 本节将通过计算来表达材料的孔洞分布对于 Burr 函数变化的关系.

因为决定 Burr 分布密度的有 3 个参数, 因此我们通过控制变量法来对 3 个参数 k, α 与 β 进行独立地分割比较. 为了使得结果与实际情况更接近, 也为了避免产生对比失真, 我们对 3 个参数的取值范围都做了限制.

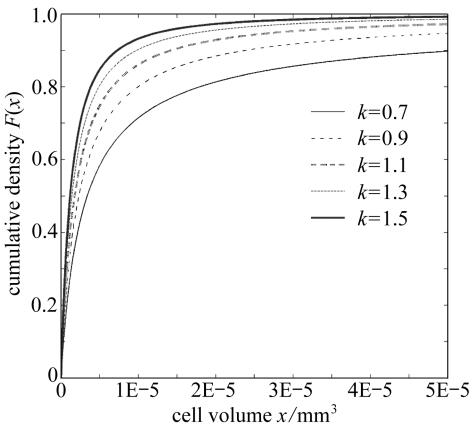


图2 孔洞尺寸密度分布随 k 引起的变化

Fig. 2 Cell volume distribution density by changing k

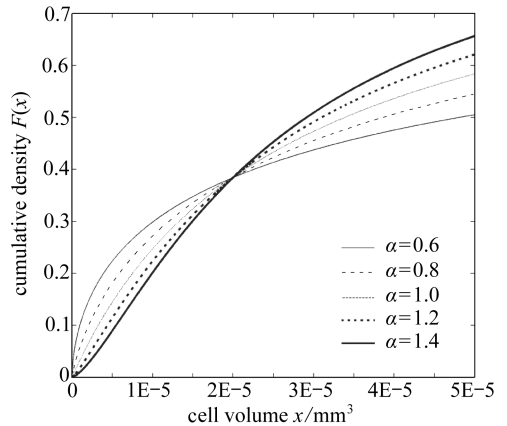


图3 孔洞尺寸密度分布随 α 引起的变化

Fig. 3 Cell volume distribution density by changing α

图2描述了在控制 α 与 β 的情况下, k 的变化对孔洞分布产生的影响. 采用的是累积密度函数图. 如图所示, 随着 k 不断地增大, 底部 ($<20\%$) 分布的差距变化并不大, 而顶部 (80%) 的尺寸差距则越来越大 ($0.005 \sim 0.05$). 这表明当 k 不断增大时, 整体的孔洞尺寸范围在逐渐减小, 并且在 $20\% \sim 80\%$ 这一段密度中有着更集中的尺寸. 这意味着在相同的孔隙率分布情况下, k 的值越大, 则整体孔洞的尺寸越接近, 且孔洞的极大值越小. 当 k 进行变化时, 影响的是孔洞尺寸范围以及分布的斜率.

图3所示是在其它两项不变的情况下, 孔洞尺寸的密度分布随 α 所引起的变化. 从图中我们可以发现, 无论 α 如何变化, 在其他条件相同的情况下, 密度函数都会有一个固定点的密度概率不变, 我们称之为驻点. 驻点的出现说明了在 α 变化的情况下, 整个材料的尺寸分布被分成了上下两部分, 而这两部分的比例是恒定的. 随着 α 的增大, 上下两部分的尺寸分布更倾向于驻点的尺寸, 说明底部的分布更离散而顶部的分布更紧密. 当 α 越小, 则情况正相反, 底部的

分布更紧密,更趋向极小值,而顶部的尺寸分布更离散。基于以上的分析, α 是一个在有驻点的情况下控制分布变化趋势的参数,即所谓的概率分布斜率的加速度值。当 α 值较小时,底部的孔洞更小,顶部的孔洞更大。当 α 取值较大时,底部和顶部的孔洞都更趋近驻点值。

图4所示是在 k, α 不变的情况下,孔洞尺寸的密度分布随 β 所产生的变化。对于 β 我们有着明确的定义,因为根据Burr分布的概率密度公式可知,当其他两项不变而 β 改变时,该系列分布在尺寸等于 β 处有着相等的累积概率密度,我们称之为该材料的孔洞特征尺寸。因此,在孔隙率不变且其他两项参数恒定的情况下,当 β 越小,则表明孔洞的特征尺寸也越小,且体现的是线性的比例关系。假如孔洞分布是均匀的,则特征尺寸就是孔洞的平均尺寸。

3.2 Burr分布单参数变化下的方板固有频率分析

在本小节中我们将讨论多孔材料方板的固有振动频率与材料的孔洞分布之间的关系。

我们所用的材料是聚丙烯+纳米粘土的复合高分子材料,块体材料的物理性质如下:

密度 $\rho_s = 900 \text{ kg/m}^3$,弹性模量 $E_s = 1.8 \text{ GPa}$,Poisson比 $\nu = 0.3$ 。

基于X射线微断层扫描实验的结果,并且在不影响整体分析的情况下,我们设定方板的等效多孔材料的密度为 180 kg/m^3 ,孔棱的固体分数 $\phi = 0.8$ 。方板的尺寸为 $0.8 \times 0.8 \text{ m}^2$,厚度为 0.02 m 。由于方板两边长相等,根据对称性原理,其振动模态 (m, n) 和 (n, m) 有着相同的频率值。

尽管从尺寸上来看,板厚远小于边长的 $1/20$ 。但作为对比,我们同时采用了厚板和薄板的理论对其进行计算,并且同三维有限元模型计算值进行了对比。运用Gibson-Ashby等效理论,前16阶模态的频率值如表1所示。

表1 多孔板的前16阶固有频率理论值与有限元值比较

Table1 The natural frequencies of foam plate by theory and FE model

mode		plate natural frequency ω / Hz		
m	n	thin plate theory	present	3D FE
1	1	24.063	24.038	24.263
1	2	60.156	59.961	60.471
2	1	96.250	95.724	96.414
2	2	120.312	119.464	120.354
1	3	156.406	154.897	155.87
3	1	216.562	213.685	214.626
2	3	384.999	376.043	376.083
3	2			
3	3			
4	4			

通过表1的对比可见,在低阶频率下,薄板理论和厚板理论与三维模型吻合良好。当阶数逐渐增加时,薄板理论逐渐体现出一定的误差,而厚板理论仍然维持良好的误差范围。从理论

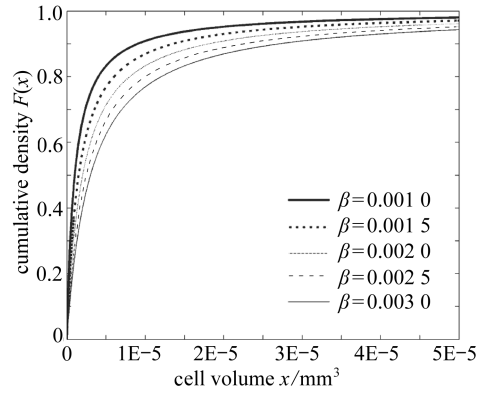


图4 孔洞尺寸密度分布随 β 引起的变化
Fig.4 Cell volume distribution density by changing β

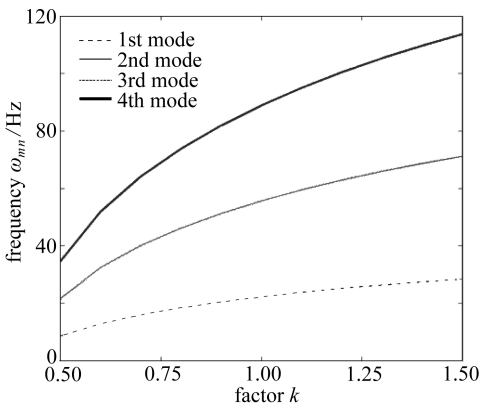


图5 由 k 影响产生的固有频率变化
Fig. 5 Natural frequencies influenced by parameter k

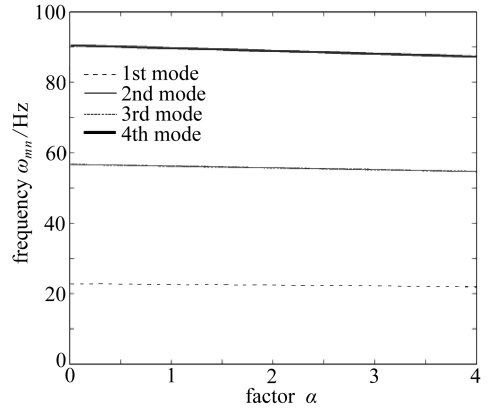


图6 由 α 影响产生的固有频率变化
Fig. 6 Natural frequencies influenced by parameter α

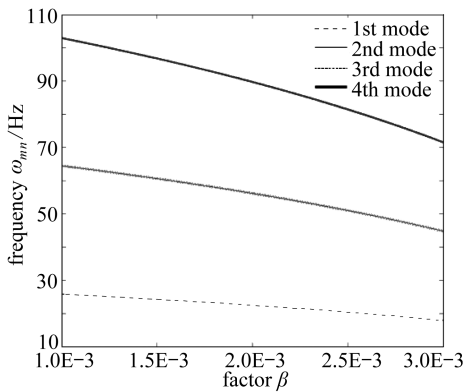


图7 由 β 影响产生的固有频率变化
Fig. 7 Natural frequencies influenced by parameter β

分析角度而言, 不管如何薄的板, 总会有剪切刚度的体现, 因此厚板理论更能符合精确求解的理念. 而对厚板的求解在如今的计算水平下并不会消耗太多的时间, 因此我们仍然采用带有剪切刚度的理论进行以下的计算分析.

图5所示是在 Burr 参数 k 的影响下, 多孔方板的固有振动频率产生的变化. 由图中可知, 当 k 不断增加的情况下, 前4阶频率都有显著的增大, 且阶数越高, 增大的趋势却明显. 与表1的对比可知, 当 k 增加到1.1以上时, 改进的理论值比原先 Gibson-Ashby 理论值更高. 从分析可知, 随着 k 的增大, 孔洞尺寸范围越来越窄, 孔径分布也越来越紧密, 则方板的固有

频率有着显著地提高. 这意味着减小孔洞的离散程度, 尤其是减少大孔洞的数量能够显著影响方板的固有频率, 改变结构的力学性能.

图6所示是在 Burr 参数 α 的影响下, 多孔方板的固有振动频率所产生的变化. 在 α 逐步增大的情况下, 振动频率略有减小, 但是趋势不明显. 在上一小节中对 α 的含义描述是在有相同驻点的情况下, 上下两部分孔洞尺寸的离散程度. 而图6的结果表明了当孔洞尺寸底部趋向极小值, 而顶部趋向极大值时, 固有频率略微增高. 这表明在有驻点且其他条件不变的情况下极大孔对性能减弱的影响要低于大量极小孔对性能增强的影响. 但也可看出, 这种趋势对于整体的结构性质影响不大.

图7所示是在 Burr 参数 β 的影响下, 多孔方板的固有振动频率所产生的变化. 很明显, 随着 β 的不断增大, 振动频率显著地减小. 根据 β 的定义, 它决定了孔洞的特征尺寸. 因此, 特征尺寸越大, 则频率越低. 这也与我们平时的认知相一致. 相对于形状参数 k 和 α 难以用实际模型进行数值计算, β 作为尺度参数, 提供了一个很好的性质可供理论分析与数值验证. 图5至图10中均有4条线段或平面, 由于是方板结构, 其第2阶、第3阶振动模型具有对称性. 因此, 两者的频率数值是一致的, 而在图中就重合在一条线上或一个平面上. 在下面的3.4节中会更进一步地探讨.

3.3 Burr 分布双参数变化下的方板固有频率分析

在上小一节中我们单独讨论了 3 参数对固有频率的影响,而在本小节我们将对 3 个参数对于固有频率影响的程度作研究.基于控制变量法,我们计算了双参数变化的影响来比较参数间的关系.为此我们需要作三维的云图来呈现参数之间的比较.

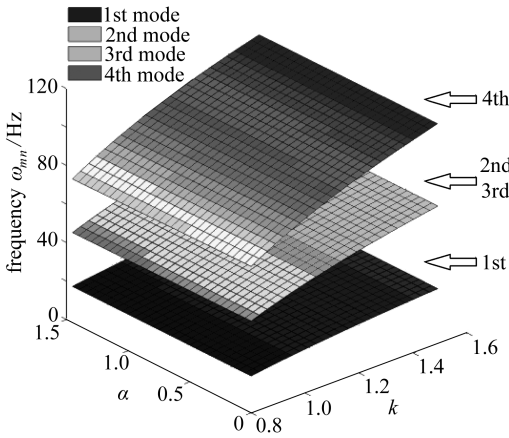


图 8 由 k 和 α 双参数影响下的频率变化
Fig. 8 The frequencies influenced by k and α

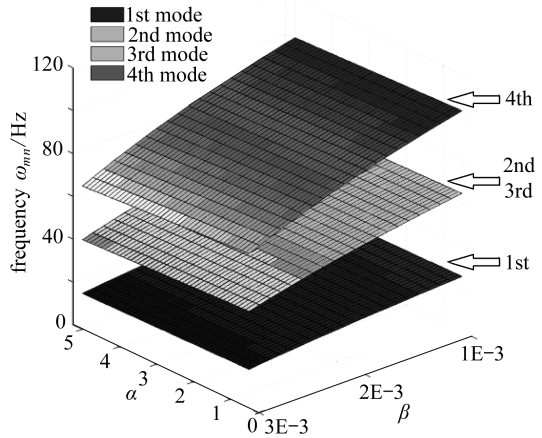


图 9 由 β 和 α 双参数影响下的频率变化
Fig. 9 The frequencies influenced by β and α

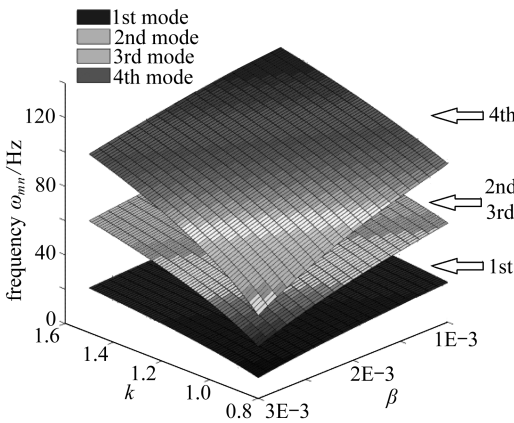


图 10 由 k 和 β 双参数影响下的频率变化
Fig. 10 The frequencies influenced by β and k

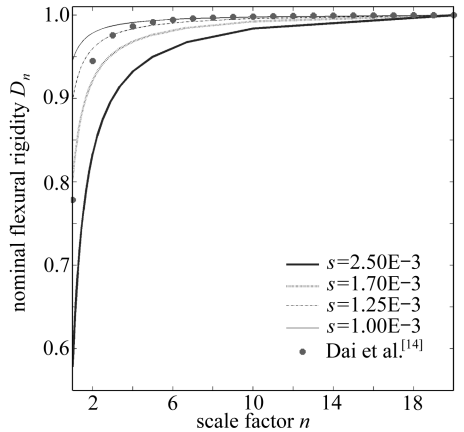


图 11 名义弯曲刚度的尺度效应变化
Fig. 11 The change of nominal flexural rigidity by scale factor

图 8 至图 10 所示是不同情况下的两参数的变化对于方板固有频率的影响.从图 8 和图 9 可以看出,无论是与 k 或者 β 相比, α 的影响都可以忽略不计.这就说明在孔隙率、密度等不变的情况下,相对于孔洞尺寸整体范围,以及孔洞的特征尺寸而言,孔洞尺寸分布的离散程度并不能造成重要的影响.这也从另一方面说明了,在多孔材料的结构中,孔洞尺寸范围与平均孔径这样的宏观参数对于材料的固有频率影响是更为显著的.

对于孔洞尺寸范围与平均孔径这两方面,我们用图 10 来加以比较.随着 k 的增大以及 β 的减小,两者对于固有频率的影响几乎是相同的.这也说明,在考虑多孔结构的设计中,孔洞的总体尺寸范围和平均孔径都是重要的组成部分,它们对于方板的固有振动都有着显著的影响.

3.4 Burr 分布对弹性模量的尺度效应研究

从上一小节中我们得出结论, Burr 参数 α 对于等效的模量和刚度的影响很小, 对比其它两参数可以忽略不计. 而另一方面, 参数 k 是描述孔洞体积范围的, 难以精确地建立模型以进行对模量和刚度的定量的理论分析. 因此, 在 3 个参数中, 尺度参数 β 是最明显也是最有效的分析参数. 通过将其转化尺度效应的函数, 我们就能精确地获取其对振动频率的影响.

从方程(3)中可知, β 越小, 孔洞的特征尺寸也就越小, 且关系为线性的. 基于此, 我们引入一个无量纲的尺度因子

$$n = \frac{\beta^*}{\beta} \quad (23)$$

来表示 β 的影响. 常数 β^* 是 β 取值的右边界. 如 n 越大, 则表明 β 越小, 且是线性关系. 同样地, 我们将等效弹性模量 E^* 转化成与最高等效模量成比例的无量纲量. 在作了如此转换之后, 名义弯曲刚度 D 就可以与尺度效应因子进行关系描述.

图 11 所示是随着尺度因子 n 的增加, 名义弯曲刚度所产生的变化. 不同的曲线表示的是不同的变量 s 的情况, 它等于 β^*/k . 黑点所表示的是 Dai 和 Zhang 在 2008 年的结论. 他们对两相材料的梁模型进行了尺度效应分析, 并得出了当尺度因子增加时, 模量是以 $-1/n^2$ 的比例进行递增的结论. 通过对比可发现我们的结论在 s 取在某个范围内时与其结论是相吻合的. 这意味着当平均孔洞尺寸减小, 弹性模量并不是无限增大, 而是非线性地增加至一个极值. 这验证了改进的孔洞分布理论的正确性, 也意味着在适当的设计方案与制备条件下, 不规则闭孔材料的孔洞分布可以针对不同结构材料的力学性能要求提供相应的优化方案.

4 结 论

本文引入了一种改进的基于孔洞尺寸分布的等效多孔材料力学性能的理论, 并将其用于多孔方板的固有振动分析. 引入了分布因子 λ 用以描述不同孔洞几何结构的多孔材料的等效力学性能. 采用了全新制备的聚丙烯+纳米粘土泡沫材料作为测试样品. 运用 X 射线微断层扫描技术, 我们获取了所有试样的内部几何结构, 并计算获得所有试样的内部孔洞尺寸. 然后, 我们引入了 Burr 分布来模拟试样的内部孔洞尺寸分布概率. 基于 Burr 分布的 3 个参数, 我们计算推导出了分布因子 λ , 并通过分布因子修正了等效弹性模量的算法. 之后, 我们引入了平板振动理论来分析宏观大板的振动频率与微观孔洞结构的关系. 这个分析主要针对板的自由振动下的频率值来表现板材的力学性能, 并用孔洞分布的参数来影响振动频率的变化. 固有频率的计算采用数值算法并与有限元模型做了比较.

从结果上分析, 我们发现 Burr 分布的 3 个参数对于实际的孔洞分布有着各自的物理含义, 并作了详细的分析. 对平板的固有频率做了计算与分析后得知, 孔洞尺寸的范围与平均孔洞尺寸对于板的振动频率有着显著的影响. 孔洞分布的离散程度也会影响方板的振动频率但是其显著程度远低于其他两个方面. 由于孔洞的范围难以用可供比较的量化的模型来描述, 我们对平均孔洞尺寸对频率的影响进行了更进一步的研究. 作为尺度效应的一个分析过程, 平均孔洞尺寸的减小会引起等效模量的增加直至一个极值. 我们也将这个尺度效应与现有的尺度效应理论进行了对比, 其结果是吻合的.

作为结论, 改进的基于孔洞尺寸分布的等效力学性能理论能够满足对于不规则孔洞分布

材料的等效性能计算的需求,并给出了孔洞具体的结构变化与宏观力学性能的关系.尺度效应和孔洞范围对于自由振动性能有着相当重要的作用.研究结果有助于优化不规则闭孔材料的结构设计和性能需求.

致谢 感谢国家自然科学基金(基金 90916007)对本文研究的支持.第一作者感谢国家留学基金委(CSC)的资助,以及丹麦奥尔堡大学机械与制造系以及西班牙瓦拉多利德大学凝聚态物理系的帮助.作者对所有提供过支持与帮助的参与者表示感谢.

参考文献(References):

- [1] Gibson L J, Ashby M F. *Cellular Solids: Structure and Properties*[M]. 2nd ed. Cambridge: Press Syndicate of University of Cambridge, 1997.
- [2] Hausherr J M, Krenkel W, Fischer F, Altstadt V. Nondestructive characterization of high-performance C/SiC-ceramics using X-ray-computed tomography[J]. *International Journal of Applied Ceramic Technology*, 2010, 7(3): 361-368.
- [3] Marmottant A, Salvo L, Martin C L, Mortensen A. Coordination measurements in compacted NaCl irregular powders using X-ray microtomography[J]. *Journal of the European Ceramic Society*, 2008, 28(13): 2441-2449.
- [4] Guo L W, Yu J L. Bending behavior of aluminum foam-filled double cylindrical tubes[J]. *Acta Mechanica*, 2011, 222(3/4): 233-244.
- [5] Elliott J A, Windle A H, Hobdell J R, Eeckhaut G, Oldman R J, Ludwig W, Boller E, Cloetens P, Baruchel J. In-situ deformation of an open-cell flexible polyurethane foam characterised by 3D computed microtomography[J]. *Journal of Materials Science*, 2002, 37(8): 1547-1555.
- [6] Viot P, Plougonven E, Bernard D. Microtomography on polypropylene foam under dynamic loading: 3D analysis of bead morphology evolution[J]. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 2008, 39(8): 1266-1281.
- [7] Van Dommelen J A W, Wismans J G F, Govaert L E. X-ray computed tomography-based modeling of polymeric foams: the effect of finite element model size on the large strain response[J]. *Journal of Polymer Science Part B-Polymer Physics*, 2010, 48(13): 1526-1534.
- [8] Ashby M F. *Materials Selection in Mechanical Design*[M]. 2nd ed. Oxford: Butterworth Heinemann, 1999.
- [9] Ashby M F. Designing hybrid materials[J]. *Acta Materialia*, 2003, 51(19): 5801-5821.
- [10] Jeon I, Asahina T, Kang K J, Im S, Lu T J. Finite element simulation of the plastic collapse of closed-cell aluminum foams with X-ray computed tomography[J]. *Mechanics of Materials*, 2010, 42(3): 227-236.
- [11] Jeon I, Katou K, Sonoda T, Asahina T, Kang K J. Cell wall mechanical properties of closed-cell Al foam[J]. *Mechanics of Materials*, 2009, 41(1): 60-73.
- [12] Teixeira S, Rodriguez M A, Pena P, De Aza A H, De Aza S, Ferraz M P, Monteiro F J. Physical characterization of hydroxyapatite porous scaffolds for tissue engineering[J]. *Materials Science & Engineering C-Biomimetic and Supramolecular Systems*, 2009, 29(5): 1510-1514.
- [13] Ma Y, Pyrz R, Rodriguez-Perez M A, Escudero J, Rauhe J Ch, Su X. X-ray microtomographic study of nanoclay-polypropylene foams[J]. *Cellular Polymers*, 2011, 30(3): 95-110.
- [14] Dai G M, Zhang W H. Size effects of basic cell in static analysis of sandwich beams[J]. *In-*

- ternational Journal of Solids and Structures*, 2008, **45**(9): 2512-2533.
- [15] Chen J W, Liu W, Su X Y. Vibration and buckling of truss core sandwich plates on an elastic foundation subjected to biaxial in-plane loads [J]. *CMC Computers Materials & Continua*, 2011, **24**(2): 163-181.
- [16] Mindlin R D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1951, **18**: 31-38.

Vibration Analysis of Foam Plates Based on Cell Volume Distribution

MA Yu-li^{1,2}, CHEN Ji-wei¹, LIU Yong-quan¹, SU Xian-yue¹
(1. *The State Key Laboratory for Turbulence and Complex Systems (LTCS)* ;
Department of Mechanics and Aerospace Engineering, College of Engineering,
Peking University, Beijing 100871, P. R. China;
2. *Chinalco Research Institute of Science and Technology,*
Beijing 100082, P. R. China)

Abstract: Vibration analysis of irregular-closed-cell foam plates was performed. A cell volume distribution coefficient was introduced to modify the original Gibson-Ashby equations of effective Young's modulus of foam materials. A Burr distribution was imported to describe the cell volume distribution situation. Three Burr distribution parameters were obtained and related to cell volume range and diversity. Based on plate theory and effective modulus theory, natural frequency of foam plates was calculated with the change of cell volume distribution parameters. The relationship between the frequencies and the cell volumes were derived. The scale factor of average cell size was introduced and proved to be an important factor to the performance of the foam plate. The result was proved by the existing theory of size effect. It was determined that the cell volume distribution had an impact on the natural frequency of the plate structure based on cell volume range, diversity and average size, and the impact would lead to optimization of the synthesis procedure.

Key words: closed-cell foam; plate vibration; natural frequency; cell volume distribution; effective Young's modulus; scale factor