

# 正则化 $\delta$ 函数对浸入边界法精度的影响\*

宫兆新<sup>1,2</sup>, 鲁传敬<sup>1,2</sup>, 黄华雄<sup>3</sup>

- (1. 上海交通大学 力学系, 上海 200240;
2. 水动力学教育部重点实验室, 上海 200240;
3. 多伦多约克大学 数学统计系, 加拿大 M3J 1P3)

(本刊编委鲁传敬来稿)

**摘要:** 浸入边界法是对流固耦合系统进行数学建模和数值模拟的有效工具, 在生物力学领域的应用尤为广泛. 正则化  $\delta$  函数对精度的影响是研究浸入边界法本身性质的一个重要课题. 采用虚拟解法对此展开分析. 首先使用光滑虚拟解证明程序的正确性, 然后使用压力存在跳跃的虚拟解研究浸入边界法的精度. 通过分析使用 4 种不同的正则化  $\delta$  函数时整个流场的离散误差, 得到以下结论: 浸入边界法只具有 1 阶精度; 选用不同的正则化  $\delta$  函数, 不能提高浸入边界法的精度, 但会影响整个流场的离散误差值.

**关键词:** 浸入边界法; 虚拟解法; 正则化  $\delta$  函数; 精度阶

**中图分类号:** O368; O241.82      **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.11.010

## 引 言

在科学与工程中经常会遇到一个形状复杂的弹性结构在粘性、不可压缩流场中运动的问题. 由 Peskin 和 McQueen<sup>[1-2]</sup> 提出的用于模拟人类心脏中血液流动的浸入边界法, 是解决此类问题的一种有效方法. 浸入边界法的应用十分广泛, 尤其是在生物力学领域, 例如细胞、精子和细菌的游泳<sup>[3-5]</sup>、变形虫的蠕动<sup>[6]</sup>、血小板的凝聚<sup>[7-8]</sup> 和红血球运动<sup>[9]</sup> 等等. 浸入边界法中, 将复杂结构作为内边界处理, 将其模化成 Navier-Stokes 动量方程中的一种奇性力源项. 此种处理方法有效地避开了使用传统的贴体网格时会遇到的各种困难.

为了更好地使用浸入边界法, 人们开始越来越多地研究浸入边界法本身的性质. Tu 等<sup>[10]</sup> 使用包括浸入边界法在内的 3 种不同方法研究动边界问题的稳定性; Stockie 等<sup>[11-12]</sup> 和 Gong 等<sup>[13]</sup> 通过研究纤维在流场中的运动, 给出了连续和离散形式的浸入边界问题的线性稳定性分析. 除了上述有关稳定性分析方面的工作外, 还有一些有关精度分析方面的工作, 这部分也是本文的研究重点.

精度阶验证最精确的方法是误差分析. 鉴于此, Beyer 等<sup>[14]</sup> 使用带有奇性力源项的一维热

\* 收稿日期: 2011-09-13; 修订日期: 2012-07-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11102108); 上海市重点学科建设基金资助项目(B206)

作者简介: 宫兆新(1982—), 女, 黑龙江人, 工程师(E-mail: jackyff@sjtu.edu.cn);

鲁传敬(1946—), 男, 教授(联系人. E-mail: cjlu@mail.sjtu.edu.cn).

传导模型代替 Navier-Stokes 方程,研究浸入边界问题的收敛性.因为在特定边界条件下可以得到此方程的理论解.然而对于大多数流体问题来说,精确解是无法得到的.因此,人们经常使用一系列网格中最密网格上求得的数值解作为精确解展开误差分析.Griffith 等<sup>[15]</sup>提出 1 种新型的浸入边界法,并证明其对一个光滑理论解问题具有 2 阶精度;但对不连续解问题则不具有此阶精度.事实上对于大量的浸入边界法处理的问题,控制方程为 Navier-Stokes 方程,问题的解在压强、速度梯度等方面都存在不连续性.所以 Lai 等<sup>[16]</sup>对浸入边界法精度的研究过程中,排除了跳跃区域,得出了浸入边界法具有形式上的 2 阶的结论.而整个流场中的精度并未检验.很明显对于跳跃问题的精度分析所面临的最大困难就是缺少理论解.如何找到理论解是研究浸入边界法精度的核心问题.虚拟解法在一定意义上提供了理论解.Gong 等<sup>[17]</sup>使用虚拟解法证明了当使用余弦形式的正则化  $\delta$  函数时只具有 1 阶精度.

目前已有的大部分结论<sup>[14-18]</sup>都证明当正则化  $\delta$  函数应用到一个 0 厚度的边界上时,边界和流体之间的各个物理量间的信息传递会被光滑化,导致了浸入边界法无法达到更高的精度.然而正则化  $\delta$  函数如何影响精度阶仍然在讨论中.本文的工作是在前期工作<sup>[17]</sup>的基础上,使用虚拟解法研究正则化  $\delta$  函数对浸入边界法精度的影响.第 1 节描述虚拟解法;第 2 节简单介绍浸入边界法和正则化  $\delta$  函数;第 3 节验证使用不同正则化  $\delta$  函数时的浸入边界法精度;第 4 节给出本文的主要结论.

## 1 虚拟解法

程序验证最严谨的方法是精度阶验证,而进行精度阶验证最精确的方法是比较数值解与精确解.然而对于大多数流体问题来说,精确解是无法得到的.因此人们考虑构造一个解析解,将其带入控制方程生成相应的源项,再使用这些源项对控制方程进行修正.此时,这些解析解就是修改后的控制方程的精确解,也称之为虚拟解.而使用虚拟解验证数值解的方法就是虚拟解法.虚拟解只是从数学角度出发假设的一个精确解,不具有任何物理意义.

虚拟解法最初由 Steinberg 等<sup>[19]</sup>于 1985 年提出,并由 Roache<sup>[20-21]</sup>和 Oberkampf 等<sup>[22-23]</sup>将其发展用于程序验证.随着最近十几年的发展,虚拟解法成为了一种有效的程序验证工具.Roy 等<sup>[24]</sup>使用虚拟解法验证 Euler 方程和 Navier-Stokes 方程求解程序的正确性;Bond 等<sup>[25]</sup>扩展虚拟解法验证 CFD 边界条件;Brunner<sup>[26]</sup>采用虚拟解法解决热传递验证问题;Eca 等<sup>[27]</sup>构造涡粘性模型的虚拟解;Tremblay 等<sup>[28]</sup>将其应用于流固耦合问题.

使用虚拟解法验证计算程序时一般包含以下几个步骤:

### 步骤 1 列出控制方程

控制方程一般是一组连续偏微分方程.与这组方程对应的解称为物理精确解.在流体动力学领域,控制方程大多数为 Navier-Stokes 方程或 Euler 方程,而这些方程没有办法得到物理精确解.

### 步骤 2 构造虚拟解

虚拟解在理论上没有任何限制的,但一般提出的虚拟解是光滑的、无限可导的、不违背现实的(例如压强、密度不能为负数).为了测试控制方程中的所有项,虚拟解的形式需要具有一般性,经常采用三角函数表达如正弦函数、余弦函数和双曲正切函数等.

### 步骤 3 生成解析源项

将步骤 2 中的虚拟解带入步骤 1 中的控制方程得到的表达式就是所需的源项. 对于复杂的方程例如 Navier-Stokes 方程, 源项表达式可能非常冗长, 所以需要符号处理工具(如 Maple, Mathematica)来生成源项.

#### 步骤 4 计算数值解

数值解是指离散方程的解. 为了得到精度阶, 方程需要在一系列网格上离散, 数值计算所使用的程序的离散格式的精度阶是给定的. 此精度阶就是理论阶, 在下一个步骤中会作为判别准则. 数值计算时边界条件由虚拟解直接导出.

#### 步骤 5 评估计算精度阶

虚拟解法是通过计算离散误差得出数值解的精度, 离散误差是离散方程的数值解与偏微分方程的解析解之差. 定义  $r$  是网格加密系数,  $p_r$  为计算精度阶. 由于离散误差一般按  $1/r^{p_r}$  的速度递减, 可得到计算精度阶的计算公式:

$$p_r = \frac{1}{\ln r} \ln \left( \frac{E_{g1}}{E_{g2}} \right), \quad (1)$$

其中,  $E_{g1}$  和  $E_{g2}$  是两套连续加密网格的全局离散误差,  $r = h_{g1}/h_{g2}$ . 全局误差的  $L_1$  范数可以由下式计算得到:

$$E(\varphi) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |\varphi_{\text{numer}}^n - \varphi_{\text{exact}}^n|. \quad (2)$$

#### 步骤 6 验证计算程序

如果计算精度阶和理论精度阶吻合, 则证明程序是正确的. 否则, 需要重新检验调试程序, 再返回步骤 4.

从上面的程序验证过程可以看出, 虚拟解法的基本判断准则是对于一个 0 错误的程序, 理论精度阶与计算精度阶必定是一致的. 即对于一个已知正确的程序, 计算精度阶一定与其理论精度阶相同. 基于上述理论, 虚拟解法可用于分析浸入边界法的精度. 而且进行精度分析的过程与程序验证的步骤基本相同, 只有步骤 6 由于程序是正确的已变成前提条件所以略去.

## 2 数学模型

### 2.1 浸入边界法

浸入边界法既是一种数学建模方法又是一种数值方法. 作为数学模型, 采用 Euler 变量和 Lagrange 变量分别描述流场信息和浸入边界上的信息, 两种变量之间通过  $\delta$  函数进行信息传递. 作为数值方法的主要特点表现在以下两个方面: 一是 Euler 变量定义在固定的 Cartesian 网格上, 而 Lagrange 变量定义在可以自由移动的曲线网格上面; 二是  $\delta$  函数在数值计算中需要在满足一定的条件下进行正则化处理.

假设流体是不可压缩的, 密度和压力为常数. 浸入边界法的数学模型可以描述如下:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (3)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad (4)$$

$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  是浸入边界产生的体积力. 由于浸入边界与周围流体运动的速度相同, 所以有

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(q, r, s, t) = \mathbf{U}(\mathbf{X}(q, r, s, t), t) = \int \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(q, r, s, t)) d\mathbf{x}, \quad (5)$$

其中,  $X(q,r,s,t)$  代表浸入边界法的运动.  $F(x,t)$  可以表示为

$$F(x,t) = \int f(q,r,s,t) \delta(x - X(q,r,s,t)) dqdrds, \tag{6}$$

其中,  $f(q,r,s,t)$  是浸入边界产生的单位力,  $\delta$  是 Dirac Delta 函数. 在数值求解过程中, 方程(3)和(4)在固定的 Euler 网格上离散, 方程(5)由膜上的 Lagrange 标志点显示追踪. 方程(5)和(6)中的  $\delta$  函数可以在满足一定条件下用不同方法正则化.

### 2.2 正则化 $\delta$ 函数

假定三维  $\delta$  函数的正则化形式  $\delta_h(x)$  为 3 个方向变量函数的乘积, 具体表达形式如下:

$$\delta_h(x) = \frac{1}{h^3} \psi\left(\frac{x}{h}\right) \cdot \psi\left(\frac{y}{h}\right) \cdot \psi\left(\frac{z}{h}\right), \tag{7}$$

其中,  $(x,y,z) \in x, h$  是网格步长. 记  $r = x/h(y/h, z/h)$ , 则  $\psi(r)$  应满足如下的离散条件<sup>[29-30]</sup>:

- (I) 对于所有的  $r$  满足  $\psi(r)$  连续. 此项条件是为了避免计算节点上的物理量的跳跃.
- (II)  $\psi(r) = 0, |r| \geq 2$ . 此项条件仅仅是为了节省计算量, 提高计算效率. 两个网格节点间的距离  $|r| \leq 2$  是可以满足其他条件的  $\delta$  函数的最小支撑半径.

(III) 对于所有的  $r$  满足  $\sum_j \psi(r-j) = 1$ . 此项条件也称为 0 次离散动量条件, 它确保常数可以通过  $\delta_h$  准确插值. 这个条件是耦合方程离散计算的必要条件, 它的存在是质量和力等变量可以等量传递的前提条件. 而对于某些离散格式(如 Chorin 投影格式), 需要额外增加限定条件: 要求奇数网格点和偶数网格点的作用相同, 即对于所有的  $r$  满足

$$\sum_{j=2,4,6,\dots} \psi(r-j) = \sum_{j=1,3,5,\dots} \psi(r-j) = \frac{1}{2}.$$

(IV) 对于所有的  $r$  满足  $\sum_j (\psi(r-j))^2 = C$ , 其中  $C$  是与  $r$  无关的常数. 此项条件保证, 对于所有的  $r_1$  和  $r_2$  满足  $\sum_j \psi(r_1-j) \cdot \psi(r_2-j) \leq C$ . 这个不等式的物理意义在于两个 Lagrange 节点通过 Euler 网格相互作用时, 两个节点重合时相互作用最大.

(V) 对于所有的  $r$  满足  $\sum_j (r-j)\psi(r-j) = 0$ . 此项条件也称为 1 次离散动量条件. 它保证线性函数可以通过  $\delta_h$  准确插值, 光滑函数可以具有 2 阶精度.

(VI) 对于所有的  $r$  满足  $\sum_j (r-j)^2 \psi(r-j) = 0$ . 此项条件也称为 2 次动量条件, 它保证 2 次函数可以通过  $\delta_h$  准确插值. 满足条件(V)和(VI)可以使光滑函数插值具有 3 阶精度.

由于要满足以上所有条件得到的  $\delta_h$  函数过于复杂, 所以目前提出的  $\delta_h$  函数可能只满足上述部分条件. 下面给出 3 种  $\delta_h$  函数形式:

(i) 如下形式的  $\psi_1(r)$  满足条件(I)~(IV):

$$\psi_1(r) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left( 1 + \cos\left(\frac{\pi r}{2}\right) \right), & |r| \leq 2, \\ 0, & |r| > 2, \end{cases} \tag{8}$$

$\psi_1$  一般称为余弦形式的  $\delta_h$  函数, 它是 Peskin 最早提出的一种  $\delta$  函数正则化的形式, 目前仍然被广泛使用. 本文在上面的精度分析部分也是采用此形式.

(ii) 如下形式的  $\psi_2(r)$  满足条件(I)~(V):

$$\psi_2(r) = \begin{cases} \frac{1}{8}(3 - 3|r| + \sqrt{1 + 4|r| - 4r^2}), & |r| \leq 1, \\ \frac{1}{2}\psi_2(2 - |r|), & 1 < |r| \leq 2, \\ 0, & |r| > 2. \end{cases} \quad (9)$$

图 1 给出了  $\psi_1$  和  $\psi_2$  的对比图. 由图中可以看出  $\psi_1$  和  $\psi_2$  基本相同. 因此, 使用两者进行数值计算时, 计算结果之间的差别几乎可以忽略.

(iii) 如下形式的  $\psi_3(r)$  满足(I)与(III)~(VI):

$$\psi_3(r) = \begin{cases} \frac{1}{12}|r|^3 - \frac{11}{56}r^2 - \frac{11}{42}|r| + \frac{61}{112} + \frac{\sqrt{3}}{336}(243 + 1584|r| - 748r^2 - 1560|r|^3 + 500r^4 + 336|r|^5 - 112r^6)^{1/2}, & |r| \leq 1, \\ \frac{1}{6}|r|^3 - \frac{7}{8}r^2 + \frac{7}{12}|r| + \frac{21}{16} - \frac{3}{2}\psi_3(|r| - 1), & 1 < |r| \leq 2, \\ -\frac{1}{12}|r|^3 + \frac{3}{4}r^2 - \frac{23}{12}|r| + \frac{9}{8} + \frac{1}{2}\psi_3(|r| - 2), & 2 < |r| \leq 3, \\ 0, & |r| > 3. \end{cases} \quad (10)$$

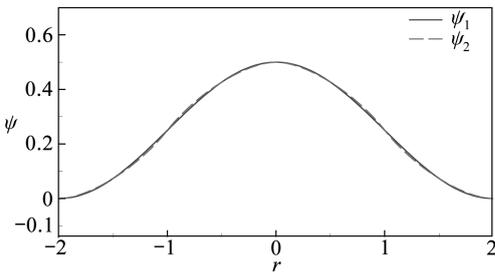


图 1  $\psi_1$  和  $\psi_2$  对比图

Fig. 1 The comparison between  $\psi_1$  and  $\psi_2$

图 2 给出  $\psi_3$  的示意图. 从图 2 中可以看出  $\psi_3$  的整体曲线变化不同于其他两种形式, 它的最小值为负值. 尽管  $\psi_3$  相对于  $\psi_1$  和  $\psi_2$  满足更多的离散条件, 但由于其形式过于复杂, 所以一般在数值计算中不采用这种形式.

以上 3 种形式是各种文献中经常出现的  $\delta_n$  函数形式. 为了验证  $\delta_n$  函数对浸入边界法的精度的影响, 本文根据 3 阶 Lagrange 插值提出一种新的正则化形式.

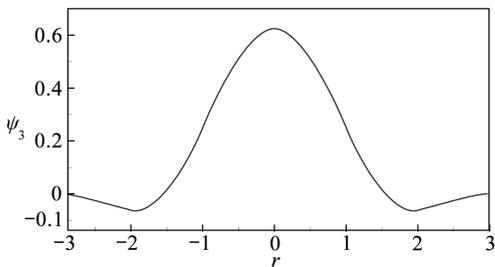


图 2 正则化形式  $\psi_3$  示意图

Fig. 2 Sketch for the regularized delta function  $\psi_3$

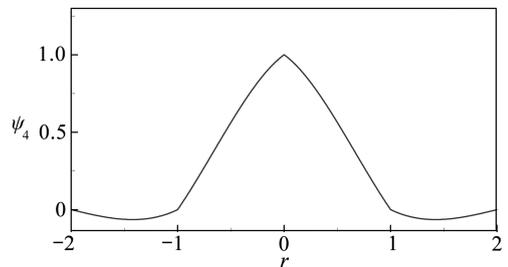


图 3 正则化形式  $\psi_4$  示意图

Fig. 3 Sketch for the regularized delta function  $\psi_4$

(iv) 除了上述条件(II), (V), (VI)外, 新的形式满足 3 次动量条件, 即对于所有的  $r$  满足

$$\sum_j (r - j)^3 \psi(r - j) = 0;$$

$$\psi_4(r) = \begin{cases} \frac{1}{2}(|r|+1) \cdot (|r|-1) \cdot (|r|-2), & |r| \leq 1, \\ -\frac{1}{6}(|r|-1) \cdot (|r|-2) \cdot (|r|-3), & 1 < |r| \leq 2, \\ 0, & |r| > 2, \end{cases} \quad (11)$$

此项条件保证3次函数可以通过 $\psi_4$ 准确插值.其形状如图3所示.

### 3 浸入边界法的精度分析

浸入边界法是一种将浸入边界用奇性力源项数学模化的追踪方法.采用Lagrange方式追踪浸入边界上的信息,而流场信息则使用Euler方式计算求解.浸入边界法使用的Cartesian网格单元一般为正方体(三维)或正方形(二维),此特性决定了可以方便地应用虚拟解法分析浸入边界法的精度.

#### 3.1 程序验证

程序0错误是使用虚拟解法分析精度的前提条件.因此,首先进行程序验证.

本程序采用有限体积法求解Navier-Stokes方程,其中动量方程的对流项和粘性项分别采用2阶对流格式和中心差分格式,压力修正方程应用2阶差分格式.因此,所用程序的理论精度阶为2阶.

控制方程是二维定常Navier-Stokes方程,其守恒形式的表达式如下所示:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = S_m, \quad (12)$$

$$\rho \left( \frac{\partial(u \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(u \cdot v)}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\mu}{3} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) = S_u, \quad (13)$$

$$\rho \left( \frac{\partial(u \cdot v)}{\partial x} + \frac{\partial(v \cdot v)}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} - \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\mu}{3} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = S_v, \quad (14)$$

其中, $\rho$ 是密度, $\mu$ 是粘度, $u$ 和 $v$ 分别代表 $x$ 和 $y$ 方向的速度. $S_m, S_u$ 和 $S_v$ 是守恒方程的解析源项.假定流体的密度和粘度是常数,方程中只有速度和压力为变量.接下来需要对所有变量构造虚拟解,假定整个流场中速度和压力的形式为

$$u(x, y) = u_0 + u_1 \sin\left(\frac{1.75\pi x}{L_1}\right) + u_2 \cos\left(\frac{1.5\pi y}{L_2}\right) + u_3 \cos\left(\frac{0.6\pi xy}{L_1 \cdot L_2}\right), \quad (15)$$

$$v(x, y) = v_0 + v_1 \cos\left(\frac{1.5\pi x}{L_1}\right) + v_2 \sin\left(\frac{\pi y}{L_2}\right) + v_3 \cos\left(\frac{0.9\pi xy}{L_1 \cdot L_2}\right), \quad (16)$$

$$p(x, y) = p_0 + p_1 \cos\left(\frac{\pi x}{L_1}\right) + p_2 \sin\left(\frac{1.25\pi y}{L_2}\right) + p_3 \sin\left(\frac{0.75\pi xy}{L_1 \cdot L_2}\right), \quad (17)$$

其中, $\phi_i (= u, v, p), i = 0, 1, 2, 3$ 是虚拟解常数, $L_1, L_2$ 是参考长度.将式(15)至式(17)代入式(12)至式(14)可以得到解析源项的表达式.

在数值计算过程中,计算域选用正方形.控制方程在不同尺度的网格上离散.在每一套网格上,均匀分布着 $(N+1) \times (N+1)$ 个网格节点,记 $h_N$ 为节点间距.计算中使用6套网格,网格加密系数 $r = 2$ .网格加密过程如图4所示.

为了保证可以验证控制方程的所有项,虚构一种密度  $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ , 粘度  $\mu = 10 \text{ N}\cdot\text{s/m}^2$  的材料作为流场中的介质. 表 1 给出虚拟解常数, 由此得到的整个流场的虚拟解和相关解析源项如图 5 所示. 所有的边界条件都设为速度边界, 速度大小由虚拟解得到.

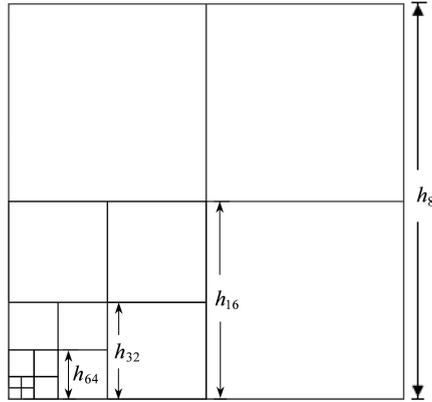
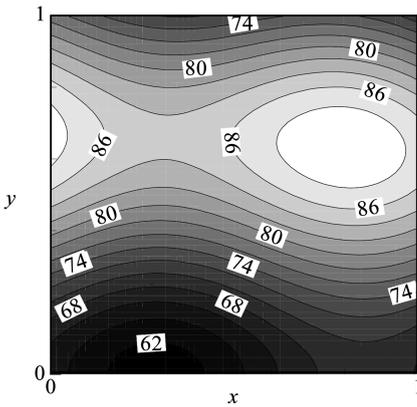
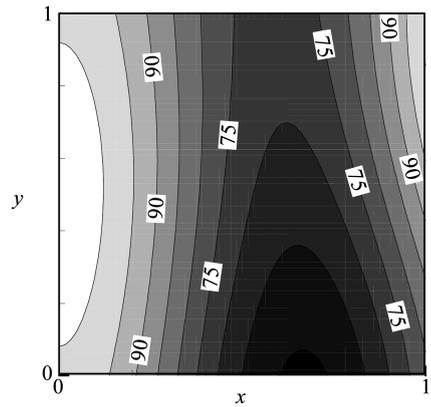


图 4 网格加密示意图

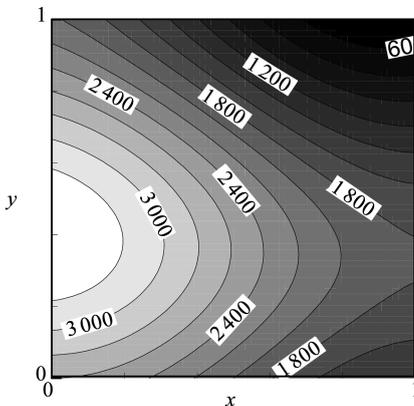
Fig. 4 Illumination of the grid refinement



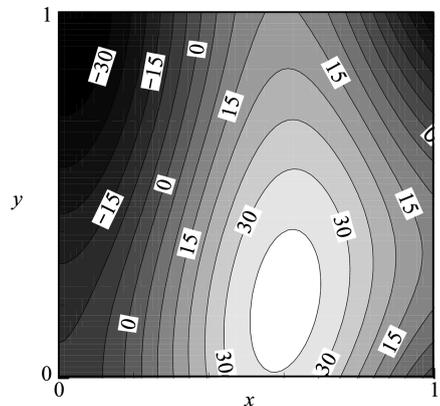
(a)  $u / (\text{m/s})$



(b)  $v / (\text{m/s})$



(c)  $p / (\text{N/m}^2)$



(d)  $S_m / (\text{kg}/(\text{m}^3 \cdot \text{s}))$

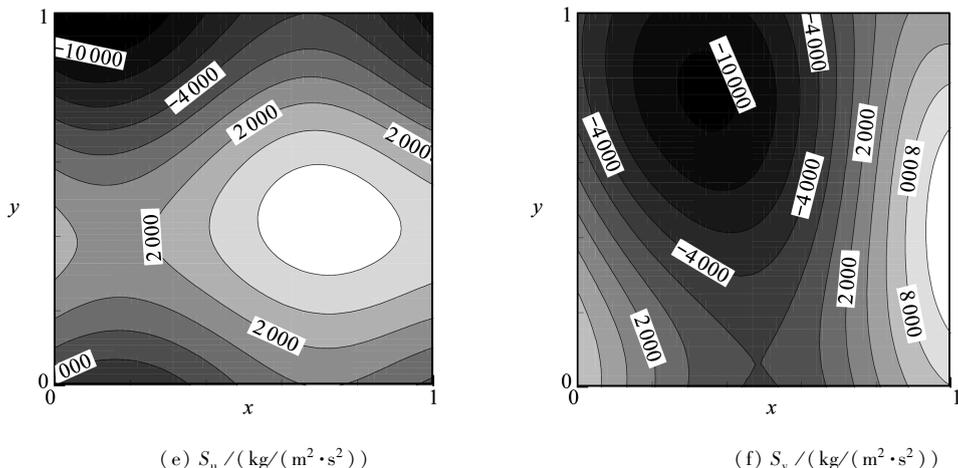


图5 虚拟解和相应的 Navier-Stokes 方程解析源项示意图

Fig. 5 Manufactured solutions and relevant analytical sources for the Navier-Stokes equations

表1 虚拟解常数

Table 1 Constants for manufactured solutions

	$\phi_0$	$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_3$
$u / (\text{m}/\text{s})$	70	-4	-12	7
$v / (\text{m}/\text{s})$	90	20	4	-11
$p / (\text{N}/\text{m}^2)$	2 000	600	800	-500

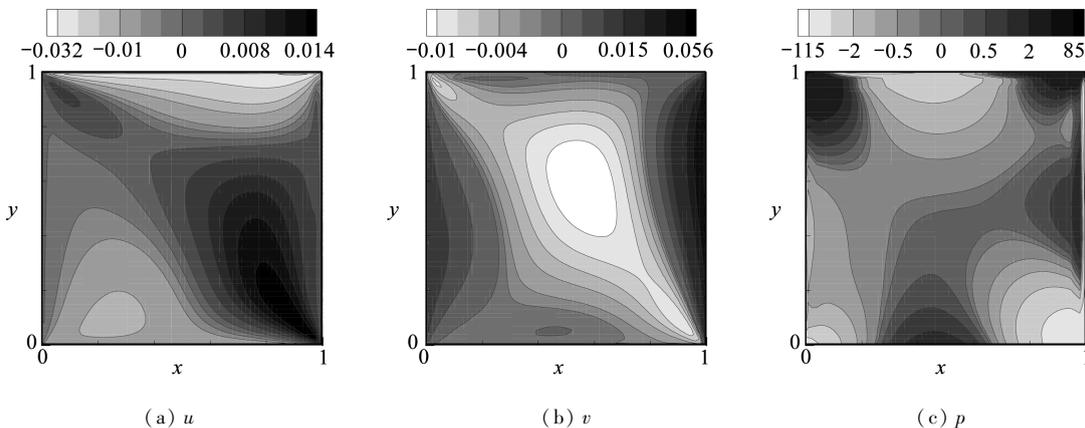


图6 程序验证时密网格上速度和压强的离散误差 ( $N = 128$ )

Fig. 6 Discretization error of velocity and pressure for code verification on finer mesh ( $N = 128$ )

在一系列网格上数值求解控制方程,可以得到相应的数值解.速度离散误差和压强离散误差分别如图6(a)至图6(c)所示.从图中可以看出,速度  $u$  和  $v$  的最大误差分别在计算域的上边界和右边界,压强的最大误差在边界角点附近.图7给出  $u, v, p$  的离散误差并计算了相邻网格的计算精度阶.其中虚线  $k = 1$  和  $k = 2$  分别为1阶精度和2阶精度的参考线.从中可以看出,随着网格的加密,全局离散误差一直在减少,所有变量精度阶均近似保持在2阶.

上述数值计算结果表明:程序的计算精度阶为2阶,与理论精度阶一致.由此证明了程序的正确性.基于这个结果分析浸入边界法的精度.

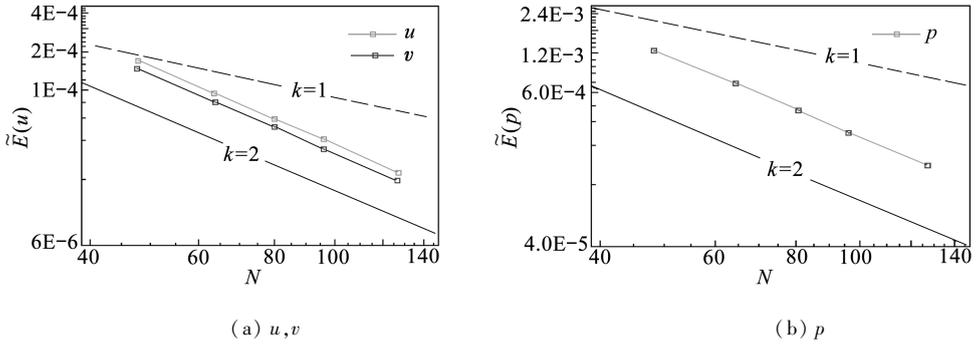


图7 光滑流场的速度误差和压强的相对全局误差图

Fig. 7 Global velocity and pressure error in smooth field

### 3.2 精度分析

浸入边界法用于解决有结构和流体相互作用的问题。在这些问题中,结构边界两侧一般存在速度梯度和压强的跳跃。在接下来的分析过程中,我们将问题简化,假定界面两侧速度连续,只考虑压强的跳跃。则速度  $u$  和  $v$  的虚拟解形式与程序验证部分相同,而压强  $p$  的虚拟解需要引入一个跳跃,其形式可由下式表述:

$$\tilde{p}(x, y) = p(x, y) + P_j \cdot H, \quad (18)$$

其中,  $H$  是单位阶跃函数,  $P_j$  是跳跃幅值。将虚拟解代入控制方程(3)至方程(5)得到下列方程组:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = S_m, \quad (19)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\mu}{3} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) = S_{u1} = S_u + F_x, \quad (20)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} - \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\mu}{3} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = S_{v1} = S_v + F_y, \quad (21)$$

其中,  $F_x$  和  $F_y$  满足下面的方程:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \int (P_j \mathbf{n}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)) ds, \quad (22)$$

其中,  $\mathbf{n}$  是跳跃界面的单位法向量。观测上述方程可以发现,动量方程中加入了奇性源项。奇性力代表了跳跃的压强场的影响。对比方程(19)至方程(22)和方程(3)至方程(6)可以发现对于定常流动,两组方程一致。因此,上述方程组可以用于检测浸入边界法的精度。跳跃界面可被视为浸入边界。

选取圆  $\Gamma$  作为压强跳跃发生边界,其圆心坐标为  $(0.5, 0.5)$ , 半径  $r$  为  $0.2$ 。假定圆  $\Gamma$  上均匀分布有  $N_s$  个 Lagrange 标志点,相邻标志点间距为  $S$ 。图 8 给出数值计算的 Euler 网格和 Lagrange 标志点的示意图。方程(19)至方程(21)中常数取值与表 1 相同。因此,除了压强跳跃界面附近,方程(20)和(21)中的源项分别与方程(16)和(17)中的源项相同。选取  $q = 2.5$ ,  $P_j = 800$  Pa。图 9 给出了压强和动量方程源项的全局分布图,从中可以清楚地看到压强的跳跃以及相应源项的跳跃。

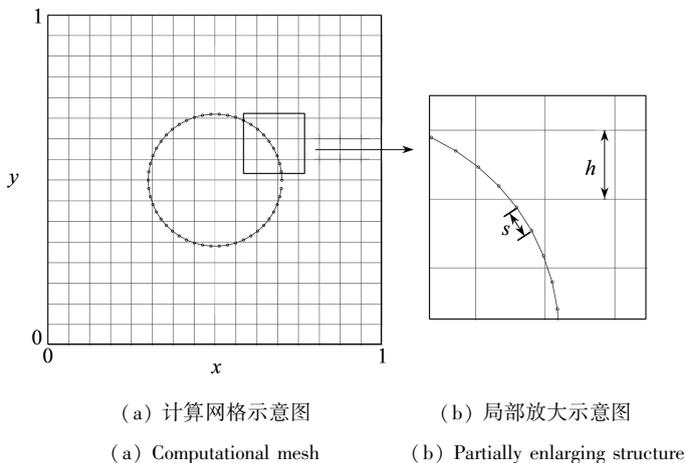


图8 Euler 网格和 Lagrange 标志点的示意图

Fig. 8 Sketch map for the Eulerian mesh and Lagrangian markers

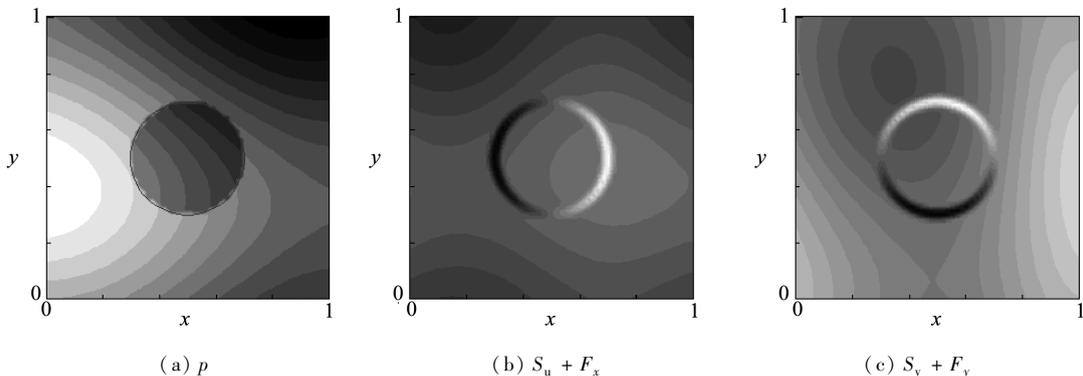


图9 精度分析时压强和动量方程源项示意图

Fig. 9 Plots of pressure and analytical sources for the momentum equations

为了研究不同的正则化  $\delta$  函数对浸入边界法精度的影响,选用前文提到的 4 种不同类型的函数形式,对压强存在跳跃的流场分别进行计算.图 10 给出了使用 4 种不同的  $\delta_h$  函数得到的压强场.图 10(a) 给出在  $128 \times 128$  的网格上得到的跳跃压强场;图 10(b) 至图 10(d) 分别给出使用  $\psi_1(\psi_2), \psi_3$  和  $\psi_4$  在  $64 \times 64$  的网格上得到的压强图,图中白线标志表示图 10(a) 中发生压强跳跃的区域.从图中可以看出,使用  $\delta_h$  函数光滑后,压强的跳跃区域变成了一段由过渡层构成的连续压强场.

速度和压力的全局误差如图 11 所示.从图中可以看出:全局离散误差随着网格的加密而减小;用  $\psi_1$  和  $\psi_2$  计算得到的误差几乎完全一致;而使用  $\psi_3$  或  $\psi_4$  时,得到的速度误差变大而压强误差变小,但无论使用何种  $\delta_h$  函数,速度都具有 2 阶精度,而压强只有 1 阶精度.虽然  $\psi_3$  对光滑函数的插值具有高阶精度,但由于压强场的不连续性使得其只具有 1 阶精度.因为已经证明过程序的正确性,所以计算精度阶等于理论精度阶.因为只有压强场存在不连续性,而且由此产生的奇性力源只与压强有关,所以速度  $u$  和  $v$  的计算精度阶与数值方法的理论精度阶一致,而压强  $p$  的计算精度阶就是浸入边界法的理论精度阶.上述分析结果表明,浸入边界法只

具有 1 阶精度.

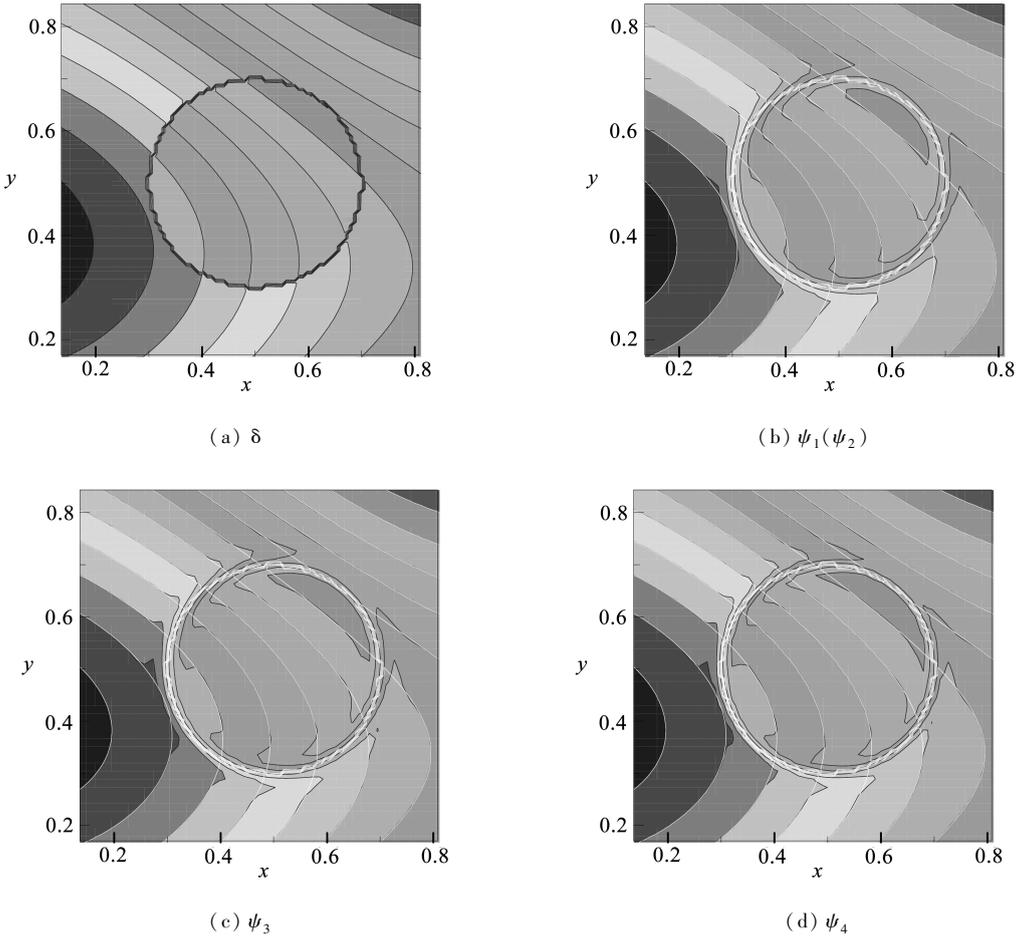
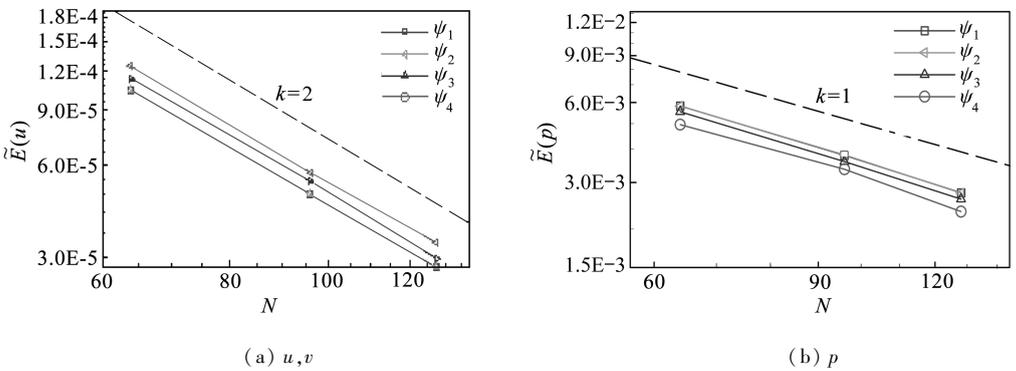


图 10 不同的  $\delta_h$  函数计算得到的压强场

Fig. 10 Pressure field calculated using various  $\delta_h$  functions



(a)  $u, v$

(b)  $p$

图 11 不同的  $\delta_h$  函数对速度误差和压强全局影响图

Fig. 11 Global velocity and pressure error for various  $\delta_h$  function

综上所述,正则化  $\delta$  函数并不会改变浸入边界法的 1 阶精度,但会影响不连续物理量的全局误差.

## 4 结 论

本文使用虚拟解法分析浸入边界法的精度。虚拟解法作为研究工具,不仅验证了程序的正确性,而且提供了算法的精度阶。虚拟解法的主要判别准则是理论精度阶与计算精度阶是否一致决定程序的正确与否。

计算程序采用 2 阶离散格式。光滑虚拟解用来证明程序的正确性。压强存在跳跃的虚拟解用来研究浸入边界法的精度。通过分析离散误差,证明即使采用 2 阶离散格式,浸入边界法也只具有 1 阶精度。本文采用 4 种不同的正则化  $\delta$  函数研究其对浸入边界法精度的影响,研究结果表明正则化  $\delta$  函数并不会改变浸入边界法的精度,但会影响不连续物理量的全局误差。

虚拟解法是一种很好的精度分析工具。该方法的最大优点是可以提供精确解,这对于用数值方法研究不连续问题的精度是必不可少的。除此之外,虚拟解法数学原理简单明了,易应用于各种不同领域。

### 参考文献(References):

- [1] Peskin C S. Numerical analysis of blood flow in the heart[J]. *Journal of Computational Physics*, 1977, **25** (3): 220-252.
- [2] Peskin C S, McQueen D M. A three-dimensional computational method for blood flow in the heart I: immersed elastic fibers in a viscous incompressible fluid[J]. *Journal of Computational Physics*, 1989, **81** (2): 372-405.
- [3] Dillion R, Fauci L J, Gaver D A. Microscale model of bacteria swimming, chemotaxis, and substrate transport[J]. *Journal of Theoretical Biology*, 1995, **177**(4): 325-340.
- [4] Fauci L J, McDonald A. Sperm motility in the presence of boundaries[J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 1995, **57** (5): 679-699.
- [5] Fauci L J, Peskin C S. A computational model of aquatic animal locomotion[J]. *Journal of Computational Physics*, 1988, **77** (1): 85-108.
- [6] Bottino D C. Modeling viscoelastic networks and cell deformation in the context of the immersed boundary method[J]. *Journal of Computational Physics*, 1998, **147**(1):86-113.
- [7] Fogelson A L. Continuum models of platelet aggregation: formulation and mechanical properties[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1992, **52** (4): 1089-1110.
- [8] Fauci L J, Fogelson A L. Truncated Newton's methods and the modeling of complex immersed elastic structures[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1993, **46** (6): 787-818.
- [9] Eggleton C D, Popel A S. Large deformation of red blood cell ghosts in a simple shear flow [J]. *Physics of Fluids*, 1998, **10**(8): 1834-1845.
- [10] Tu C, Peskin C S. Stability and instability in the computation of flows with moving immersed boundaries: a comparison of three methods[J]. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 1992, **13**(6): 1361-1376.
- [11] Stockie J M, Wetton B R. Analysis of stiffness in the immersed boundary method and implica-

- tions for time-stepping schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1999, **154**(1): 41-64.
- [12] Stockie J M, Wetton B R. Stability analysis for the immersed fiber problem[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1995, **55**(6): 1577-1591.
- [13] Gong Z X, Huang H X, Lu C J. Stability analysis of the immersed boundary method for a two-dimensional membrane with bending rigidity[J]. *Communications in Computational Physics*, 2008, **3**(3): 704-723.
- [14] Beyer R P, Leveque R J. Analysis of a one-dimensional model for the immersed boundary method[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1992, **29**(2): 332-364.
- [15] Griffith B E, Peskin C S. On the order of accuracy of the immersed boundary method: higher order convergence rates for sufficiently smooth problems [J]. *Journal of Computational Physics*, 2005, **208**(1): 75-105.
- [16] Lai M C, Peskin C S. An immersed boundary method with formal second-order accuracy and reduced numerical viscosity[J]. *Journal of Computational Physics*, 2000, **160**(2): 705-719.
- [17] 宫兆新, 鲁传敬, 黄华雄. 虚拟解法分析浸入边界法的精度[J]. 应用数学和力学, 2010, **31**(10): 1141-1151. (GONG Zhao-xin, LU Chuan-jing, HUANG Hua-xiong. Accuracy analysis of immersed boundary method using method of manufactured solutions[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2010, **31**(10): 1197-1208. )
- [18] Lai M C. Simulations of the flow past an array of circular cylinders as a test of the immersed boundary method[D]. PhD thesis. USA: Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1998.
- [19] Steinberg S, Roache P J. Symbolic manipulation and computation fluid dynamics[J]. *Journal of Computational Physics*, 1985, **57**(2): 251-284.
- [20] Roache P J. *Verification and Validation in Computational Science and Engineering*[M]. NM: Hermosa Publishers, Albuquerque, 1998.
- [21] Roache P J. Code verification by the method of manufactured solutions[J]. *Journal of Fluid Engineering*, 2002, **124**(1): 4-10.
- [22] Oberkampf W L, Trucano T G. Validation methodology in computational fluid dynamics[C]//AIAA 2000-2549, 19-22 June 2000, Denver, CO, 2000.
- [23] Oberkampf W L, Trucano T G. Verification and validation in computational fluid dynamics [R]. March, Sandia Report, SAND2002-0529, Sandia National Laboratories, 2002.
- [24] Roy C J, Nelson C C, Smith T M, Ober C C. Verification of Euler/Navier-Stokes codes using the method of manufactured solutions[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2004, **44**(6): 599-620.
- [25] Bond R B, Ober C C, Knupp P M. A manufactured solution for verifying CFD boundary conditions, part III[C]//*Proceeding of 36th AIAA Fluid Dynamics Conference*, San Francisco, CA, 2006, **3**: 1966-1982.
- [26] Brunner T A. Development of a grey nonlinear thermal radiation diffusion verification problem [J]. *Transactions of the American Nuclear Society*, 2006, **95**: 876-878.
- [27] Eca L, Hoekstra M, Hay A, Pelletier D. On the construction of manufactured solutions for

- one- and two-equation eddy-viscosity models[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2007, **54**(2): 119-154.
- [28] Tremblay D, Etienne S, Pelletier D. Code verification and the method of manufactured solutions for fluid-structure interaction problems[C]// *Proceeding of 36th AIAA Fluid Dynamics Conference*, San Francisco, CA, 2006, **2**: 882-892.
- [29] Peskin C S. The immersed boundary method[J]. *Acta Numerica*, 2002, **11**: 479-517.
- [30] Stockie J M. Analysis and computation of immersed boundaries, with application to pulp fibers[D]. Ph D thesis. Canada: Institute of Applied Mathematics, University of British Columbia, 1997.

## Effect of the Regularized Delta Function on the Accuracy of the Immersed Boundary Method

GONG Zhao-xin<sup>1,2</sup>, LU Chuan-jing<sup>1,2</sup>, HUANG Hua-xiong<sup>3</sup>

(1. Department of Mechanics, Shanghai Jiaotong University,  
Shanghai 200240, P. R. China;

2. MOE Key Laboratory of Hydrodynamics, Shanghai 200240, P. R. China;

3. Department of Mathematics and Statistics, York University,  
Toronto, Ontario, Canada M3J 1P3)

**Abstract:** The immersed boundary method was an effective technique for modeling and simulating fluid-structure interactions especially in the area of biomechanics. The effect of the regularized delta function on its accuracy was an important subject in the property study. The method of manufactured solutions was taken as the research means. The computational code was firstly verified to be mistaken free by using smooth manufactured solutions. Then a jump in the manufactured solution for pressure was introduced to study the accuracy of the immersed boundary method. Four kinds of the regularized delta function were taken to test its effects on accuracy analysis. By analyzing the discretization errors, the accuracy of the immersed boundary method was proved to be first order. Meanwhile, the results showed that the regularized delta function could not improve the accuracy, but could change the discretization errors on the entire computational domain.

**Key words:** immersed boundary method; method of manufactured solutions; regularized delta functions; order of accuracy