

粘度与温度相关时对铁磁流体作有热交换轴对称旋转流动的影响*

P·拉姆, V·库马尔

(国家技术学院 数学系,特拉 哈里亚纳邦 136119,印度)

摘要: 就粘度与温度相关时,研究粘度对铁磁流体作轴对称旋转层流边界层流动的影响.铁磁流体是不可压缩非导电的,在一块固定平板上作轴对称的旋转流动,固定平板受到磁场的作用并保持恒定的温度.为了达到上述目的,首先利用众所周知的相似变换法,将耦合的非线性偏微分方程组转化为常微分方程组;然后,运用常用的有限差分法,将耦合的非线性微分方程离散化;采用MATLAB软件中的Newton法求解上述离散化方程;借助Flex PDE求解器得到最初的猜测值.在求得速度分布的同时,还就粘度与温度相关时求得了表面摩擦力、热交换率和边界层位移厚度.所得的结果用图表表示出来.

关键词: 铁磁流体; 粘度与温度相关; 边界层; 轴对称; 磁场

中图分类号: O357.1; O414.1 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.11.009

引言

几个世纪以来许多迷人的材料,由于其特殊的物理性质和技术用途,引起了科学家和研究人员的注意.铁磁流体便是这样一种出色的材料,它们无法在大自然中直接得到,但是可以合成得到.它们在科学和工程领域有着多种多样的用途,在诸如物理学、化学、仪表工程学、电子工程和电机工程等领域得到了商业开发. Rosensweig 在他的专题论文[1]中,对磁流体研究给出了权威性的报道.

铁磁流体被广泛地用于计算机硬盘驱动器、旋转的 X-射线管以及旋转的杆轴;在轴承和阻尼器中它们被用作润滑剂;在电机和高保真扬声器系统中,被用作热控制器,而无需改变它们的几何形状;铁磁流体还被大量地用于磁流体的科学装置,例如传感器、密度计、加速计及压力传感器等,还被用于驱动装置,诸如机电转换器和能量转换器等.此外,在生物医学领域也得到了广泛应用,铁磁流体能够对身体的特定部位加热治疗癌症,用交替的外部磁场切除肿瘤.

不可压缩流体作轴对称旋转流动时,在流体动力学场中,有3个不为0的空间速度分量(即,径向、切向和轴向分量),流动变量与角坐标无关.大量在固定平板上的旋转流动,距离固定平板较大时流体角速度是均匀的,而平板表面的流体是静止的(Schlichting^[2]).我们考虑这

* 收稿日期: 2011-11-08; 修订日期: 2012-07-11

作者简介: Paras Ram, 副教授, 博士(联系人. Tel.: +91-9416539758; E-mail: parasram_nit@yahoo.co.in).

本文原文为英文,张晓庆译,张禄坤校.

样一类不可压缩铁磁流体的流动,固定平板受到磁场 \mathbf{H} (分量为 $(H_r, 0, H_z)$) 的作用,并始终保持恒定的温度 T_w . Kármán^[3] 考虑过这种类型的轴对称流动,常规粘性流体在无数旋转圆盘作用下的流动. Cochran^[4] 通过数值积分,改进了 Kármán 的解,并得到了更为精确的计算值. Benton^[5] 推广到由静止突然启动的水动力学问题. Attia^[6] 就均匀外部磁场作用下的不可压缩粘性导电流体,讨论由无数旋转圆盘引起的不稳定磁流体动力学(MHD)流动. 在所有这些研究中,都假设流体的粘度为常量. 然而,粘度的物理特性可以随温度发生巨大的变化,这是常识. 因此,为了预测到更多真实的流动行为,考虑温度引起的粘度变化是必要的.

历史上曾经有许多研究者考虑过粘度的显著变化. Kafoussias 等^[7] 就垂直等温板上层状边界层的自由对流,研究了粘度与温度间的相关性效应. Attia^[8] 对有热交换的含尘流体作 MHD 管道流动,研究了粘度与温度的相关性. Maleque 等^[9] 就无限多空圆盘突然开始旋转,研究粘性流体作稳定层状流动和热交换对其物理属性变化的影响. Ramanathan 等^[10] 就多孔介质含铁对流问题,研究粘度与温度相关性对开始出现不稳定的影响. Hooman 等^[11] 就多孔介质中充满气体或者液体的 Benard 对流问题,数值研究了温度对粘度变化的影响. Hooman 等^[12] 就流体流过多孔介质时的强迫对流问题,采用粘度-温度的指数关系,研究温度对粘度的影响.

Frusteri 等^[13] 就粘性导电的 Newton 流体,流过有滑移边界条件的多孔圆盘,其物理属性粘度、密度及导热系数可以变化时,研究其稳定的层状磁流体动力学(MHD)流动. Ram 等^[14] 在轴对称稳定旋转的铁磁流体中,研究了磁场对粘度的影响,并且得到了耦合的非线性边界层方程的渐近级数解. Rani 等^[15] 对空中半无限等温圆柱体的不稳定层状自由对流,研究可变粘度对其边界层流动和热交换的影响. Maleque^[16] 就不可压缩的导电流体,在一个有均匀磁场的旋转圆盘中,研究温度和深度对粘度及 Hall 电流的混合影响.

本文考虑不可压缩的铁磁流体,远离固定平板时流体以恒定的角速度 ω ,绕 z 轴作稳定的轴对称流动. 导出的控制方程中包含了 Maxwell 关系式. 用有限差分法将耦合的非线性微分方程离散化,并用 Newton Raphson 法得到其数值解. 据作者所知,该问题目前尚未被研究过.

1 问题的数学公式及其求解

采用圆柱面坐标系 (r, ϕ, z) ,将不导电的等温平板固定在 $z = 0$ 处,不可压缩非导电铁磁流体在 $z > 0$ 的区域内. 假设 z 轴为旋转轴并垂直于固定的平板平面,又分别设 r 和 ϕ 为径向和切向坐标轴. 假设远离固定平板处的流体,以恒定的角速度 ω 绕着 z 轴旋转. 流动速度为 \mathbf{q} ,径向、切向和轴向速度分量分别为 u, v, w . 图 1 给出了坐标系、流动区域以及流动参数的原理图. 在磁场 \mathbf{H} 作用下的固定平板保持恒温 T_w ,远离固定平板的流体保持恒温 T_∞ . 假设流体在磁场的作用下磁化为 \mathbf{M} ,流体的粘度与温度有关,但在能量方程中忽略了磁的致热效应. 基于上面这些假设,流体流动的控制方程包括:

连续性方程

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0; \quad (1)$$

运动方程(粘度与温度相关的动量方程)

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + (\mathbf{q} \cdot \nabla) \mathbf{q} \right) = -\nabla p + \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}) + \nabla \cdot (\mu(T) \nabla \mathbf{q}); \quad (2)$$

能量方程

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{q} \cdot \nabla) T \right) = k \nabla^2 T; \quad (3)$$

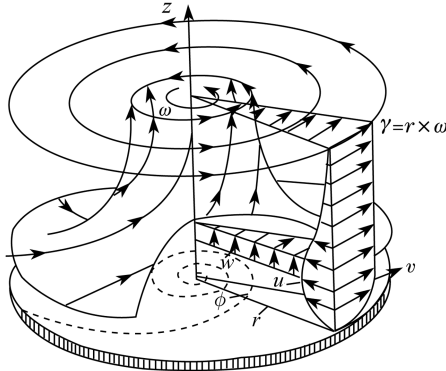


图1 远离固定平板时铁磁流体的旋转流动
Fig.1 Revolving ferrofluid at a large distance from the stationary plate

Maxwell 关系式

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot (\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}) = 0; \quad (4)$$

假设条件

$$\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}, \quad \mathbf{M} \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \quad (5)$$

上述方程中, ρ 为流体密度, t 为时间变量, ∇ 为梯度算子, p 为流体压力, μ_0 为自由空间中的磁导率, $\mu(T)$ 为与温度有关的粘度, c_p 为定压比热容, k 为导热率, χ 为磁化率.

Hooman 等^[12]对粘性流体提出了粘度与温度呈指数关系式: $\mu(T) = \mu_\infty \exp(-b\theta)$. 其中 $\theta = (T - T_\infty)/(T_w - T_\infty)$ 为无量纲温度; μ_∞ , T_w 和 T_∞ 分别为参考的动粘度、固定平板的表面温度以及自由流的温度.

粘度-温度指数关系式的一阶 Taylor 级数展开式为

$$\mu(T) = \mu_\infty (1 - b\theta), \quad (6)$$

其中 b 为粘度的变化参数, 是一个非负的实数.

这里假设流动是稳定的(即, $\partial(\cdot)/\partial t = 0$), 并是轴对称的(即, $\partial(\cdot)/\partial\theta = 0$). 因此, 控制方程可以改写为如下的分量形式:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (7)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu_0 |\mathbf{M}| \frac{\partial}{\partial r} |\mathbf{H}| + \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu(T) \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu(T) \frac{u}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu(T) \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (8)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu(T) \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu(T) \frac{v}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu(T) \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad (9)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu_0 |\mathbf{M}| \frac{\partial}{\partial z} |\mathbf{H}| + \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu(T) \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\mu(T) w) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu(T) \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad (10)$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (11)$$

流动的边界条件为

$$\begin{cases} u = 0, v = 0, w = 0, T = T_w, & \text{当 } z = 0 \text{ 时,} \\ u \rightarrow 0, v \rightarrow r\omega, T \rightarrow T_\infty, & \text{当 } z \rightarrow \infty \text{ 时,} \\ w \text{ 趋于一个有限的正值,} & \text{当 } z \rightarrow \infty \text{ 时.} \end{cases} \quad (12)$$

远离固定平板的铁磁流体,旋转流动在离心力(径向的压力梯度和磁体力的径向分量合成的结果)作用下平衡.因此,边界层近似方程(8)如下:

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \mu_0 |\mathbf{M}| \left| \frac{\partial}{\partial r} |\mathbf{H}| \right| = -r\omega^2. \quad (13)$$

假设 z 方向的磁场变化可以忽略,采用 von Kármán 的相似变换:

$$\begin{cases} u = r\omega E(\alpha), v = r\omega F(\alpha), w = \sqrt{\nu_\infty \omega} G(\alpha), T - T_\infty = \Delta T \theta(\alpha), \\ \Delta T = T_w - T_\infty; \alpha = z \sqrt{\frac{\omega}{\nu_\infty}} \text{ 表示到固定板的无量纲距离,} \\ \nu_\infty \text{ 为运动粘度.} \end{cases} \quad (14)$$

由方程组(7)~(11),得到一组用变量 E, F, G 和 θ 表示的非线性微分方程:

$$G' + 2E = 0, \quad (15)$$

$$(1 - b\theta)E'' - bE'\theta' - E^2 + F^2 - GE' - 1 = 0, \quad (16)$$

$$(1 - b\theta)F'' - bF'\theta' - 2EF - GF' = 0, \quad (17)$$

$$\theta'' - PrG\theta' = 0, \quad (18)$$

其中, $Pr = \mu_\infty c_p / k$ 为 Prandtl 数, E, F, G 和 θ 分别为无量纲的径向、切向、轴向速度和无量纲的温度.

进一步,边界条件变为

$$\begin{cases} E(0) = 0, F(0) = 0, G(0) = 0, \theta(0) = 1, \\ E(\infty) = 0, F(\infty) = 1, \theta(\infty) = 0. \end{cases} \quad (19)$$

利用方程(15),将方程(16)~(18)改写为

$$2(1 - b\theta)G'' - 2bG'\theta' + (G')^2 - 4F^2 - 2GG'' + 4 = 0, \quad (20)$$

$$(1 - b\theta)F'' - bF'\theta' + G'F - GF' = 0, \quad (21)$$

$$\theta'' - PrG\theta' = 0. \quad (22)$$

采用有限差分法,对耦合的非线性微分方程组(20)~(22)进行求解,得到下面的微分方程:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^3}(1 - b\theta_i)(G_{i+2} - 2G_{i+1} + 2G_{i-1} - G_{i-2}) - \frac{b}{h^3}(G_{i+1} - 2G_i + G_{i-1})(\theta_{i+1} - \theta_{i-1}) + \\ & \frac{1}{4h^2}(G_{i+1} - G_{i-1})^2 - 4F_i^2 - \frac{2}{h^2}G_i(G_{i+1} - 2G_i + G_{i-1}) + 4 = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^2}(1 - b\theta_i)(F_{i+1} - 2F_i + F_{i-1}) - \frac{b}{4h^2}(F_{i+1} - F_{i-1})(G_{i+1} - G_{i-1}) + \\ & \frac{1}{2h}F_i(G_{i+1} - G_{i-1}) - \frac{1}{2h}G_i(F_{i+1} - F_{i-1}) = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\frac{1}{h^2}(\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}) - \frac{1}{2h}PrG_i(\theta_{i+1} - \theta_{i-1}) = 0. \quad (25)$$

为了找到该边值问题在 $\alpha = 0$ 到 $\alpha = 10$ 区域内的解,将区域(0,10)分为100个子区域,每个子区域的长度为1/10,即 $h = 1/10$,同时取 $\alpha_i = i/10; 0 \leq i \leq 100$,则 $\alpha_0 = 0, \alpha_{100} = 10$.采

用上述的 h 值, 方程组 (23) ~ (25) 变为

$$\begin{aligned} & 1\,000(1 - b\theta_i)(G_{i+2} - 2G_{i+1} + 2G_{i-1} - G_{i-2}) - \\ & 1\,000b(G_{i+1} - 2G_i + G_{i-1})(\theta_{i+1} - \theta_{i-1}) + 25(G_{i+1} - G_{i-1})^2 - \\ & 4F_i^2 - 200G_i(G_{i+1} - 2G_i + G_{i-1}) + 4 = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & 20(1 - b\theta_i)(F_{i+1} - 2F_i + F_{i-1}) - 5b(F_{i+1} - F_{i-1})(G_{i+1} - G_{i-1}) + \\ & F_i(G_{i+1} - G_{i-1}) - G_i(F_{i+1} - F_{i-1}) = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

$$20(\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}) - PrG_i(\theta_{i+1} - \theta_{i-1}) = 0. \quad (28)$$

将 $i = 1, 2, \dots, 99$ 代入方程 (26) ~ (28), 得到 3 组共 297 个方程:

由方程 (26) 得

$$\left\{ \begin{aligned} & 1\,000(1 - b\theta_1)(G_3 - 2G_2 + 2G_0 - G_{-1}) - 1\,000b(G_2 - 2G_1 + G_0)(\theta_2 - \theta_0) + \\ & 25(G_2 - G_0)^2 - 4F_1^2 - 200G_1(G_2 - 2G_1 + G_0) + 4 = 0, \\ & 1\,000(1 - b\theta_2)(G_4 - 2G_3 + 2G_1 - G_0) - 1\,000b(G_3 - 2G_2 + G_1)(\theta_3 - \theta_1) + \\ & 25(G_3 - G_1)^2 - 4F_2^2 - 200G_2(G_3 - 2G_2 + G_1) + 4 = 0, \\ & \vdots \\ & 1\,000(1 - b\theta_{99})(G_{101} - 2G_{100} + 2G_{98} - G_{97}) - \\ & 1\,000b(G_{100} - 2G_{99} + G_{98})(\theta_{100} - \theta_{98}) + \\ & 25(G_{100} - G_{98})^2 - 4F_{99}^2 - 200G_{99}(G_{100} - 2G_{99} + G_{98}) + 4 = 0. \end{aligned} \right. \quad (29)$$

由方程 (27) 得

$$\left\{ \begin{aligned} & 20(1 - b\theta_1)(F_2 - 2F_1 + F_0) - 5b(F_2 - F_0)(G_2 - G_0) + F_1(G_2 - G_0) - \\ & G_1(F_2 - F_0) = 0, \\ & 20(1 - b\theta_2)(F_3 - 2F_2 + F_1) - 5b(F_3 - F_1)(G_3 - G_1) + F_2(G_3 - G_1) - \\ & G_2(F_3 - F_1) = 0, \\ & \vdots \\ & 20(1 - b\theta_{99})(F_{100} - 2F_{99} + F_{98}) - 5b(F_{100} - F_{98})(G_{100} - G_{98}) + \\ & F_{99}(G_{100} - G_{98}) - G_{99}(F_{100} - F_{98}) = 0. \end{aligned} \right. \quad (30)$$

由方程 (28) 得

$$\left\{ \begin{aligned} & 20(\theta_2 - 2\theta_1 + \theta_0) - PrG_1(\theta_2 - \theta_0) = 0, \\ & 20(\theta_3 - 2\theta_2 + \theta_1) - PrG_2(\theta_3 - \theta_1) = 0, \\ & \vdots \\ & 20(\theta_{100} - 2\theta_{99} + \theta_{98}) - PrG_{99}(\theta_{100} - \theta_{98}) = 0. \end{aligned} \right. \quad (31)$$

利用关系式 $E(\alpha) = -G'(\alpha)/2$ 和边界条件 (19), 得到下列关系式:

$$G_1 = G_{-1}, G_{101} = G_{99}, G_0 = 0, F_0 = 0, F_{100} = 1, \theta_0 = 1, \theta_{100} = 0. \quad (32)$$

将方程 (32) 代入方程组 (29) ~ (31), 得到包含 297 个未知数的非线性代数方程组. 用 Newton 法对该方程组求解:

在方程 (29)、(30) 和 (31) 中, 分别就 $1 \leq i \leq 99$, 定义 $f_i(G_1, G_2, \dots, G_{99}; F_1, F_2, \dots, F_{99}; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{99}) = 0$, $g_i(G_1, G_2, \dots, G_{99}; F_1, F_2, \dots, F_{99}; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{99}) = 0$ 和 $h_i(G_1, G_2, \dots, G_{99}; F_1, F_2, \dots, F_{99}; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{99}) = 0$. 对这些方程取微分, 得到 f_1 的偏导数为

$$\frac{\partial f_1}{\partial G_1} = 2000b(\theta_2 - \theta_0) - 200G_2 + 800G_1.$$

类似地,得到 f_i 的偏导数:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial G_j}, & 2 \leq j \leq 99, \\ \frac{\partial f_i}{\partial G_j}, & 2 \leq i \leq 99, 1 \leq j \leq 99, \\ \frac{\partial f_i}{\partial F_j}, \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j}, & 1 \leq i \leq 99, 1 \leq j \leq 99. \end{cases}$$

对方程(30)和(31)作同样的处理,得到 g_i 和 h_i 的偏导数:

$$\frac{\partial g_i}{\partial G_j}, \frac{\partial g_i}{\partial F_j}, \frac{\partial g_i}{\partial \theta_j}, \quad 1 \leq i \leq 99, 1 \leq j \leq 99,$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial G_j}, \frac{\partial h_i}{\partial F_j}, \frac{\partial h_i}{\partial \theta_j}, \quad 1 \leq i \leq 99, 1 \leq j \leq 99.$$

取 $G_1, G_2, \dots, G_{99}; F_1, F_2, \dots, F_{99}$ 及 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{99}$ 的初始值:

$$G_1^1 = G_1^0 + a_1, G_2^1 = G_2^0 + a_2, \dots, G_{99}^1 = G_{99}^0 + a_{99}, \quad (33)$$

$$F_1^1 = F_1^0 + b_1, F_2^1 = F_2^0 + b_2, \dots, F_{99}^1 = F_{99}^0 + b_{99}, \quad (34)$$

$$\theta_1^1 = \theta_1^0 + c_1, \theta_2^1 = \theta_2^0 + c_2, \dots, \theta_{99}^1 = \theta_{99}^0 + c_{99}, \quad (35)$$

这里,上角0表示初始值,1表示1次迭代后的改进值。 $a_i, b_i, c_i (1 \leq i \leq 99)$ 为实际值的摄动,可能是正的也可能是负的。由于迭代过程依赖初始的猜测值,因此可能需要多次迭代才能达到收敛。如果初始猜测值比较接近于实际值,则收敛快、迭代次数也比较少,否则,解可能会不收敛。

将方程组(29)~(31)转化为下面的线性方程组:

$$\begin{cases} f_i(G_1, G_2, \dots, G_{99}; F_1, F_2, \dots, F_{99}; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{99}) + \\ \sum_{k=1}^{99} \left(a_k \frac{\partial f_i}{\partial G_k} + b_k \frac{\partial f_i}{\partial F_k} + c_k \frac{\partial f_i}{\partial \theta_k} \right) = 0, \\ g_i(G_1, G_2, \dots, G_{99}; F_1, F_2, \dots, F_{99}; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{99}) + \\ \sum_{k=1}^{99} \left(a_k \frac{\partial g_i}{\partial G_k} + b_k \frac{\partial g_i}{\partial F_k} + c_k \frac{\partial g_i}{\partial \theta_k} \right) = 0, \\ h_i(G_1, G_2, \dots, G_{99}; F_1, F_2, \dots, F_{99}; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{99}) + \\ \sum_{k=1}^{99} \left(a_k \frac{\partial h_i}{\partial G_k} + b_k \frac{\partial h_i}{\partial F_k} + c_k \frac{\partial h_i}{\partial \theta_k} \right) = 0, \end{cases} \quad 1 \leq i \leq 99. \quad (36)$$

该方程组用矩阵形式表示为 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial G_1} & \frac{\partial f_1}{\partial G_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_{99}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial G_1} & \frac{\partial f_2}{\partial G_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_{99}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_{99}}{\partial G_1} & \frac{\partial h_{99}}{\partial G_2} & \dots & \frac{\partial h_{99}}{\partial \theta_{99}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ c_{99} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -f_1(G_1, G_2, \dots, G_{99}; F_1, F_2, \dots, F_{99}; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{99}) \\ -f_2(G_1, G_2, \dots, G_{99}; F_1, F_2, \dots, F_{99}; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{99}) \\ \vdots \\ -h_{99}(G_1, G_2, \dots, G_{99}; F_1, F_2, \dots, F_{99}; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{99}) \end{pmatrix}.$$

利用 MATLAB 对该方程组求解,得到 $a_i, b_i, c_i (1 \leq i \leq 99)$ 的值. 然而, 初始猜测值由 PDE 求解器得到. 由 PDE 求解器中得到的数值数据, 用 MATLAB 来核实. 经过若干迭代后, 当摄动值 $a_i, b_i, c_i (1 \leq i \leq 99)$ 趋于 0 时, 得到 F, G 和 θ 的真实值.

在得到耦合微分方程解的同时, 也计算了边界层位移的厚度、表面摩擦因数以及固定平板表面的热交换率. 固定平板邻近流体层粘性产生的应力, 阻碍了流体的转动. 利用 Newton 公式计算径向应力 τ_r 和切向剪应力 τ_t :

$$\tau_r = \left[\mu(T) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right]_{z=0} = \mu_\infty (1-b) Re^{1/2} \omega E'(0),$$

$$\tau_t = \left[\mu(T) \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right]_{z=0} = \mu_\infty (1-b) Re^{1/2} \omega F'(0).$$

因此, 分别得到径向和切向的表面摩擦力:

$$(1-b)^{-1} Re^{1/2} C_{f_r} = E'(0), \quad (37)$$

$$(1-b)^{-1} Re^{1/2} C_{f_t} = F'(0). \quad (38)$$

利用 Fourier 定律, 还可以计算出固定平板表面对铁磁流体的热交换率:

$$q = - \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0} = -k \Delta T \sqrt{\frac{\omega}{\nu_\infty}} \theta'(0).$$

于是, Nusselt 数为

$$Re^{1/2} Nu = -\theta'(0). \quad (39)$$

对于存在固定平面的流体流动, 边界层位移厚度定义为: 由于边界层内流体速度的减小, 外侧流线移动的距离. 根据 Schlichting^[2] 计算圆柱面坐标系中的位移厚度:

$$d = \int_0^\infty \left(1 - \frac{v}{v_\infty} \right) dz \text{ 或 } \sqrt{\frac{\omega}{\nu_\infty}} d = \int_0^\infty (1 - F(\alpha)) d\alpha, \quad (40)$$

其中 v_∞ 为自由流速度.

根据上述计算公式, 得到边界层位移厚度见表 1, 表面摩擦因数和固定平板表面的热交换率见表 2.

表 1 边界层位移厚度 $\sqrt{\omega/\nu_\infty} d$

Table 1 Boundary layer displacement thickness $\sqrt{\omega/\nu_\infty} d$

Pr	$b = 0$	$b = 0.25$	$b = 1$
1	1.274 23	1.114 71	0.142 16
7	1.296 51	1.135 62	0.195 45

表 2 表面摩擦因数和热交换率

Table 2 Skin friction coefficients and rate of heat transfer

b	$Pr = 1$			$Pr = 7$		
	$-E'(0)$	$F'(0)$	$-\theta'(0)$	$-E'(0)$	$F'(0)$	$-\theta'(0)$
0	0.942 85	0.773 62	2.59E-03	0.941 41	0.771 94	2.49E-14
0.25	1.070 09	0.893 34	4.59E-03	1.086 85	0.891 08	3.16E-13
0.5	1.267 87	1.094 60	9.92E-03	1.330 43	1.090 13	6.47E-12
1	9.021 41	10.750 07	0.128 22	9.321 04	7.928 85	7.91E-03

2 结果与讨论

考虑到上述问题包括了许多参数,在这基础上导出的数值结果都有一定的范围.首先,对这里导出的数值结果作简单介绍.在完成上述计算中,取 Prandtl 数 $Pr = 1$ (弱对流传热情况) 和 $Pr = 7$ (强对流传热情况).正如 Anderson 等^[17]一样,粘度变化参数 b 从 0 变化到 1.当 $b = 0$ 时问题变为:铁磁流体粘度与温度无关或者为恒定的流动;除了 $b = 0$ 外,动量方程(2)中的磁体力($\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}$)不出现,问题变成经典情况:常粘度、不可压缩流体在固定平板上的流动,所得到的结果与 Schlichting^[2]报道的结果完全吻合.数值计算了粘度受温度影响时的速度,即径向、切向和法向速度随温度分布的曲线,并用图形表示出来.

图 2 和图 3 分别对 $Pr = 1$ 和 $Pr = 7$,粘度变化参数 b 取不同数值时,得到了相应的径向速度分布曲线.可以发现,靠近平板表面处的径向速度,开始时为负值,然后随着参数 α 的增大而迅速减小;随后,(两种情况分别)达到最小值后,径向速度开始增大并变成正值,最终收敛于其稳定状态.负的径向速度表明,流体微粒的圆周速度在减小,是由于离心力在减小,使得壁面附近出现向内部的径向流动;反之正的径向速度表明系向外的径向流动.还可以看到,参数 b 越大,径向速度收敛得越快.但是,Prandtl 数的变化对径向速度的影响相当有意思,特别是 $b = 1$ 时.在强对流传热($Pr = 7$)和 $b = 1$ 时,径向速度在达到稳定状态前,又一次变为负值,即流体再次变成向内的径向流动.

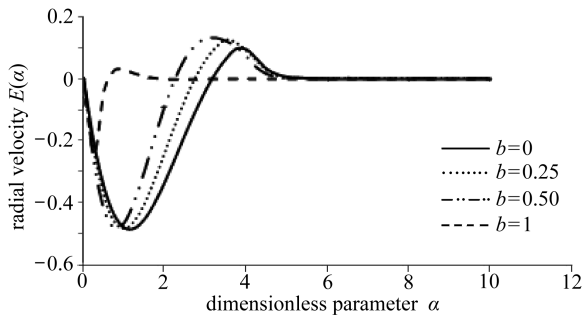


图 2 当 $Pr = 1$ 时,粘度变化参数 b 对径向速度的影响

Fig. 2 Effect of viscosity variation parameter b on radial velocity for $Pr = 1$

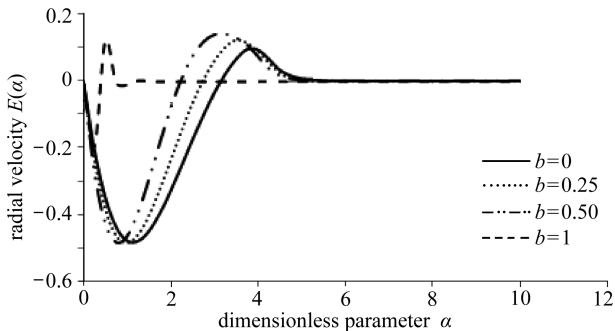


图 3 当 $Pr = 7$ 时,粘度变化参数 b 对径向速度的影响

Fig. 3 Effect of viscosity variation parameter b on radial velocity for $Pr = 7$

图 4 和图 5 分别就 $Pr = 1$ 和 $Pr = 7$ 时的切向速度曲线,给出了粘度变化参数 b 与温度的依赖关系.无滑移条件的平板表面,由于流体的粘性,切向速度朝平板方向减小,并在平板表面

减小至 0。但是,在达到收敛点之前,离平板某个较大的距离处,流体呈朝外的径向流动,导致切向速度的增加。进一步从图 4 和图 5 可以清晰地看到,Prandtl 数的变化对切向速度的影响不是很大。但是,当 $b = 1$ 时,情况就完全不一样了。与 $Pr = 1$ 相比较,当 $Pr = 7$ 时,切向速度值要大得多。还可以评估粘度变化参数 b 对切向速度的影响,注意切向速度随参数 b 的增大而增大。同时,(两种情况下的)切向速度在达到峰值以后,开始减小并最终收敛于 1。但是,当 $b = 1$ 时,切向速度达到峰值的位置非常靠近平板表面。并且, b 越大,收敛的速率越快, $b = 1$ 时达到最大极限。

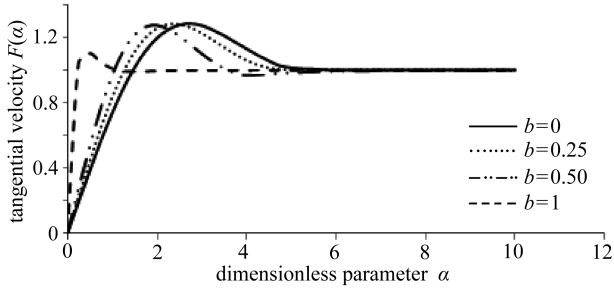


图 4 当 $Pr = 1$ 时,粘度变化参数 b 对切向速度的影响

Fig. 4 Effect of viscosity variation parameter b on tangential velocity for $Pr = 1$

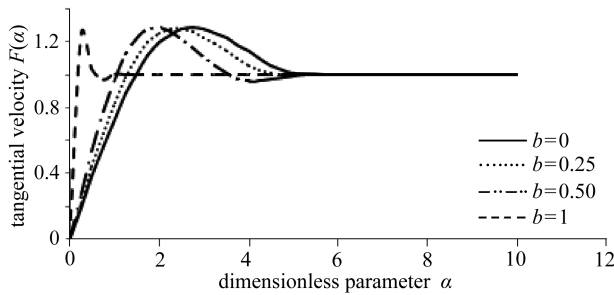


图 5 当 $Pr = 7$ 时,粘度变化参数 b 对切向速度的影响

Fig. 5 Effect of viscosity variation parameter b on tangential velocity for $Pr = 7$

图 6 和图 7 分别就 $Pr = 1$ 和 $Pr = 7$,粘度变化参数 b 从 0 变化到 1 时,给出相应的轴向速度变化曲线。从图 6 和图 7 可见,所有各点的轴向速度是正值且是递增的,因为在平板表面附近系向内的径向流动,随后出现向外的径向流动,轴向速度出现减小。图形还显示,与径向速度和切向速度一样,Prandtl 数的改变对轴向速度的影响并不明显。但是,参数 b 的变化对轴向速度的影响很明显,随着参数 b 的增大,固定平板附近的轴向速度增加,随后的轴向速度出现减小并最终趋于一个有限的正数。还可以看到一个有趣的现象,对于常见情况(即 $b = 0$),平板表面附近的轴向速度为最小值,然而最终的收敛值却最大;进一步注意到, $b = 1$ 时的轴向速度最小。

图 8 和图 9 分别就 $Pr = 1$ 和 $Pr = 7$ 时,给出粘度变化参数 b 对流体流动中温度分布的影响。从图 8 和图 9 可以看到,对两种不同的 Prandtl 值,温度都随着参数 b 的增加而降低。然而有趣的是,当 $b = 0, 0.25, 0.5$ 时,平板表面附近的温度在缓慢地下降,随后出现急速地下降。当 $b = 1, Pr = 1$ 时,温度几乎是匀速下降。与速度分布曲线不同,Prandtl 数的改变对温度的影响明显,随着 Prandtl 数的增加,温度也在增加。 $Pr = 1$ 时,前期的温度曲线就开始下降,而 $Pr = 7$ 时,前期的温度曲线大致保持常量,随后出现快速的下降。

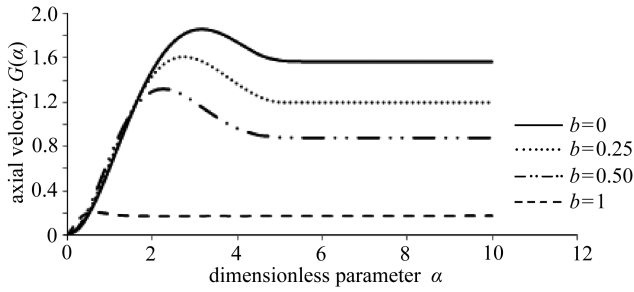


图6 当 $Pr = 1$ 时, 粘度变化参数 b 对轴向速度的影响

Fig. 6 Effect of viscosity variation parameter b on axial velocity for $Pr = 1$

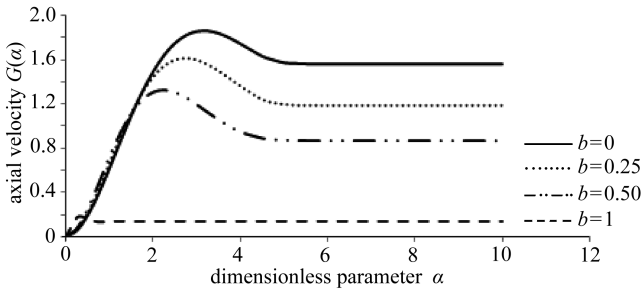


图7 当 $Pr = 7$ 时, 粘度变化参数 b 对轴向速度的影响

Fig. 7 Effect of viscosity variation parameter b on axial velocity for $Pr = 7$

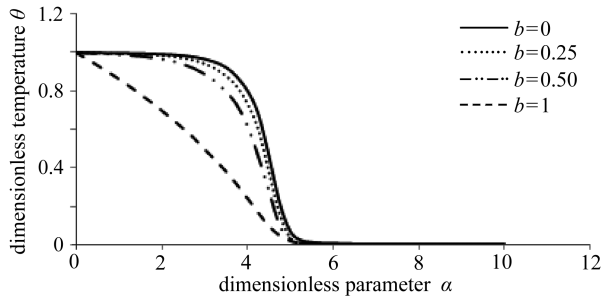


图8 当 $Pr = 1$ 时, 粘度变化参数 b 对温度的影响

Fig. 8 Effect of viscosity variation parameter b on temperature for $Pr = 1$

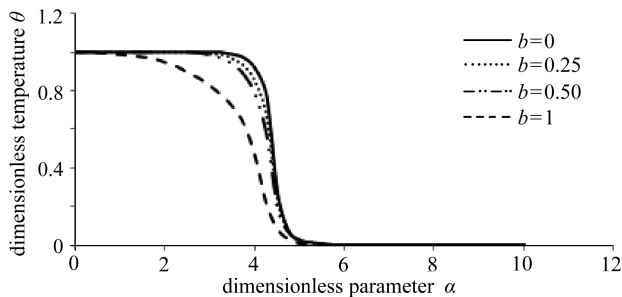


图9 当 $Pr = 7$ 时, 粘度变化参数 b 对温度的影响

Fig. 9 Effect of viscosity variation parameter b on temperature for $Pr = 7$

表1给出了粘度变化参数 b 和 Prandtl 数对边界层位移厚度的影响。可以看出, 边界层位移厚度随着粘度变化参数的增大而减小, 而随着 Prandtl 数的增大而增大。

表 2 给出的是粘度变化参数和 Prandtl 数,对径向表面摩擦力、切向表面摩擦力和热交换率的影响。可以看出,对两个不同的 Prandtl 数,平板表面的径向、切向表面摩擦力随着粘度变化参数 b 的增大都在增加;热交换率也随着粘度变化参数的增大而增大,然而,Prandtl 数增大时,热交换率不增大反而在减小。

3 结 论

上述的数值研究表明,旋转的铁磁流体在固定平板上作稳定的层流边界层流动时,出现了许多粘度与温度有关的、有趣的特性。本研究的主要结论为:

- 1) 径向和轴向速度随着粘度变化参数 b 的增大而减小,而切向速度的变化刚好相反;
- 2) 所有的速度,除了粘度变化参数 $b = 1$ 时出现明显变化外,对 Prandtl 数的变化都不敏感;
- 3) 温度分布曲线表明,粘度变化参数的增大导致温度分布降低,但是,Prandtl 数的增大,情况刚好相反,意味着温度在增加;
- 4) 粘度变化参数的增大,导致径向、切向的表面摩擦力和热交换率的增大,但使边界层位移厚度在减小。

因此,与温度有关的粘度在描述更多现实流动行为中,起着十分重要的作用。本文的一般分析讨论,正是旋转机械、电脑储存器、黏度计、润滑剂、海洋学和晶体生长等应用领域作为背景的,为讨论更为复杂的问题,如像铁磁流体的可变粘度依赖于时间的问题,提供了一个良好的开端。

致谢 作者衷心感谢审稿专家为了提高该项研究的质量,对本文提出的批评和建议。

参考文献 (References):

- [1] Rosensweig R E. *Ferrohydrodynamics*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
- [2] Schlichting H. *Boundary Layer Theory*[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1960.
- [3] Kármán V Th. Über laminare und turbulente reibung[J]. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1921, **1**(4): 233-252.
- [4] Cochran W G. The flow due to a rotating disk[C]//*Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1934, **30**: 365-375.
- [5] Benton E R. On the flow due to a rotating disk[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1966, **24**(4): 781-800.
- [6] Attia H A. Transient flow of a conducting fluid with heat transfer due to an infinite rotating disk[J]. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2001, **28**(3): 439-448.
- [7] Kafoussias N G, Williams E W. The effect of temperature dependent viscosity on free-forced convective laminar boundary layer flow past a vertical isothermal at plate[J]. *Acta Mechanica*, 1995, **110**(1/4): 123-137.
- [8] Attia H A. Influence of temperature dependent viscosity on the MHD-channel flow of dusty fluid with heat transfer[J]. *Acta Mechanica*, 2001, **151**(1): 89-101.
- [9] Maleque K A, Sattar M A. Steady laminar convective flow with variable properties due to a porous rotating disk[J]. *Transactions of ASME*, 2005, **127**(12): 1406-1409.
- [10] Ramanathan A, Muchikel N. Effect of temperature-dependent viscosity on ferroconvection in a porous medium[J]. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 2006, **11**(1): 93-104.
- [11] Hooman K, Gurgenci H. Effects of temperature-dependent viscosity on Benard convection in

- a porous medium using a non-Darcy model [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2008, **51**(5/6): 1139-1149.
- [12] Hooman K, Gurgenci H. Effects of temperature-dependent viscosity on forced convection inside a porous medium[J]. *Transport in Porous Media*, 2008, **75**(2): 249-267.
- [13] Frusteri F, Osalusi E. On MHD and slip flow over a rotating porous disk with variable properties[J]. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2007, **34**(4): 492-501.
- [14] Ram P, Bhandari A, Sharma K. Effect of magnetic field-dependent viscosity on revolving ferrofluid[J]. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2010, **322**(21): 3476-3480.
- [15] Rani H P, Kim C N. A numerical study on unsteady natural convection of air with variable viscosity over an isothermal vertical layer [J]. *Korean Journal of Chemical Engineering*, 2010, **27**(3): 759-765.
- [16] Maleque K A. Effects of combined temperature- and depth-dependent viscosity and Hall current on an unsteady MHD laminar convective flow due to a rotating disk[J]. *Chemical Engineering Communications*, 2010, **197**(4): 506-521.
- [17] Anderson H I, Valnes O A. Flow of a heated ferrofluid over a stretching sheet in the presence of a magnetic dipole[J]. *Acta Mechanica*, 1998, **128**(1/2): 39-47.

Effect of Temperature Dependent Viscosity on the Revolving Axi-Symmetric Ferrofluid Flow With Heat Transfer

Paras Ram, Vikas Kumar

(*Department of Mathematics, National Institute of Technology,
Kurukshetra, Haryana-136119, India*)

Abstract: The prime objective of the present study was to examine the effect of temperature dependent viscosity on the revolving axi-symmetric laminar boundary layer flow of incompressible, electrically non-conducting ferrofluid in the presence of a stationary plate subjected to a magnetic field and maintained at a uniform temperature. To serve this purpose, the non linear coupled partial differential equations were firstly converted into the ordinary differential equations using well known similarity transformations and later, the popular finite difference method was employed to discretize the non linear coupled differential equations. These discretized equations were then solved using Newton method in MATLAB, for which an initial guess was made with the help of Flex PDE Solver. Along with the velocity profiles, the effects of temperature dependent viscosity were also examined on skin friction, heat transfer and the boundary layer displacement thickness. The results, so obtained, were presented numerically as well as graphically.

Key words: ferrofluid; temperature dependent viscosity; boundary layer; axi-symmetry; magnetic field