

# 非线性梁结构的参数振动稳定性 及其主动控制\*

李凤明<sup>1,2</sup>, 刘春川<sup>2</sup>

(1. 北京工业大学 机电学院, 北京 100124;  
2. 哈尔滨工业大学 航天学院 137 信箱, 哈尔滨 150001)

**摘要:** 采用压电材料研究了参数激励非线性梁结构的运动稳定性及其主动控制,通过速度反馈控制算法获得主动阻尼,利用 Hamilton 原理建立含阻尼的立方非线性运动方程,采用多尺度方法求解运动方程获得稳定性区域.通过数值算例,分析了控制增益、外激振力幅值等因素对稳定性区域和幅频曲线特性的影响.分析表明:控制增益增大,结构所能承受的轴向力也增大,在一定范围内结构的主动阻尼比也增加;随着控制增益的增大,响应幅值逐渐降低,但所需的控制电压存在峰值点.

**关键词:** 梁; 压电材料; 参数振动; 稳定性; 主动控制; 多尺度法

**中图分类号:** O322; O317      **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.11.004

## 引 言

梁结构广泛应用于航空航天、机械、土木等工程领域,在服役期间结构经常承受外激励作用,如果结构的柔性比较大,将产生大幅度的长时间持续非线性振动,这势必会影响结构的正常工作,甚至产生疲劳破坏.因此,有必要研究结构的非线性振动稳定性和响应的主动控制问题.目前为止,研究者对于结构非线性振动和非线性动力学问题给予了极大关注,研究的问题多集中在非线性动力学建模、非线性响应计算、运动稳定性分析、分岔和混沌特性等<sup>[1-4]</sup>.

采用压电材料对结构进行振动主动控制得到广泛研究和应用<sup>[5-8]</sup>. Zhang 和 Shen<sup>[9]</sup> 研究了由 1~3 型压电纤维增强复合材料和正交各向异性复合材料构成的层合板结构的振动主动控制,基于薄板理论建立了结构轴向和横向振动方程,通过数值算例分析了压电层合板的动力学特性. Dong 等<sup>[10]</sup> 采用一种系统辨识技术研究了压电智能结构的振动主动控制,采用有限元方法计算结构响应,利用 LQG 算法设计控制器,并进行了数值仿真和实验研究. Zhang 等<sup>[11]</sup> 研究了表面部分覆盖 PVDF 作动器的圆柱壳结构的振动主动控制,建立了结构系统的电力耦合运动方程,针对固支-自由边界约束的圆柱壳,进行了数值模拟和实验研究. Qiu 等<sup>[12]</sup> 针对粘贴压电片的悬臂梁结构的振动主动控制进行了研究,采用比例反馈控制和滑模变结构控制算法,控

\* 收稿日期: 2011-08-27; 修订日期: 2012-06-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11172084;10672017;50935002)

作者简介: 李凤明(1969—),男,黑龙江人,教授,博士,博士生导师(联系人. Tel: +86-451-86414479; E-mail: fml@hit.edu.cn).

制梁结构的前两阶弯曲振动模态。Kapuria 和 Yasin<sup>[13]</sup>采用压电纤维增强复合材料研究了金属层合板的振动主动控制,针对传统的常增益速度反馈控制和最优控制策略给出了数值算例。Chen 等<sup>[14]</sup>采用压电材料研究了复合材料梁的动力学稳定性和振动控制,采用谐波平衡法求解运动方程,获得一阶近似的稳定性区域,但在他们的分析中未考虑阻尼效应。

李凤明等<sup>[4]</sup>研究了参数激励非线性压电梁的振动稳定性,考虑非线性阻尼的影响,建立了机电耦合运动方程,获得结构振动稳定性区域,但是尚未研究结构的非线性振动稳定性主动控制问题。本文采用压电材料对非线性梁结构的运动稳定性及其主动控制进一步深入研究,采用速度反馈控制算法获得主动阻尼,通过 Hamilton 原理建立含阻尼的立方非线性运动方程,采用多尺度法获得运动稳定性区域。通过数值算例,分析了控制增益、外激振力幅值等因素对稳定性区域和幅频曲线特性的影响。

## 1 结构运动方程

研究如图 1 所示的矩形截面简支梁,压电片完好粘贴在梁的表面,简谐激振力  $P(t) = P_0 + P_1 \cos \Omega t$  作用在基梁的轴线方向。直角坐标系如图 1 所示,其中  $x$  轴建立在基梁的中性面上沿轴线方向。研究中忽略梁的轴向变形对其横向位移的影响。

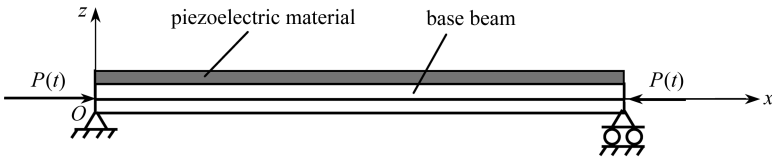


图 1 承受轴向力的梁结构示意图

Fig. 1 The schematic diagram of a beam subjected to axial forces

基梁为均匀各向同性材料,其中的正应力及正应变表示为

$$\sigma_x = E \varepsilon_x, \quad \varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad (1)$$

式中,  $w$  为梁的横向挠度,  $\sigma_x$ ,  $\varepsilon_x$  和  $E$  分别为正应力、正应变和弹性模量。

压电材料为横观各向同性材料,其极化方向沿  $z$  轴方向,其本构方程表示为

$$\sigma_x^p = c_{11} \varepsilon_x^p - e_{31} E_z, \quad D_z = e_{31} \varepsilon_x^p + \xi_{33} E_z, \quad (2)$$

式中,  $\sigma_x^p$  和  $\varepsilon_x^p$  为压电材料的正应力和正应变,  $c_{11}$ ,  $e_{31}$  和  $\xi_{33}$  分别为压电材料的弹性常数、压电常数及介电常数,  $D_z$  为  $z$  方向电位移,  $E_z = V_0(t)/h_p$  为  $z$  方向电场强度<sup>[15]</sup>, 其中  $V_0$  为外加电压、 $h_p$  为压电片厚度。由于压电材料和基梁之间粘贴完好,并且研究中忽略梁的轴向变形对其横向位移的影响。因此,可以认为压电材料的正应变  $\varepsilon_x^p$  与基梁的正应变  $\varepsilon_x$  相同,即认为它们的变形协调一致。

Hamilton 变分原理表示为

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_p dt = 0, \quad (3)$$

式中,  $\delta$  为变分符号,  $T$  和  $U$  为整体结构的动能和势能,  $\delta W_p$  为外力虚功。整体结构的动能表示为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx, \quad (4)$$

式中,  $L$  为基梁的长度,  $m = \rho S + \rho_p S_p$  为基梁和压电片单位长度的质量,  $\rho$  和  $\rho_p$  为基梁和压电材

料的密度,  $S$  和  $S_p$  为基梁和压电层的横截面积.

整体结构的势能包括 3 部分, 即基梁和压电层的应变能、以及压电层的电势能, 其表示为

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV + \frac{1}{2} \int_V \sigma_x^p \varepsilon_x dV - \frac{1}{2} \int_V D_z E_z dV. \quad (5)$$

将式(1)和(2)分别代入式(5), 得

$$U = a_1 \int_0^L \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx + a_2 V_0 \int_0^L \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + a_3 \int_0^L \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + a_4 V_0 \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + a_5 \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^4 dx + a_6 V_0^2, \quad (6)$$

式中各项系数表示为

$$\begin{cases} a_1 = \frac{Ebh^3 + c_{11}bh_p(4h_p^2 + 6hh_p + 3h^2)}{24}, & a_2 = \frac{be_{31}(h_p + 2h)}{2}, \\ a_3 = -\frac{bc_{11}h_p(h_p + h)}{4}, & a_4 = -\frac{e_{31}b}{2}, & a_5 = \frac{Ebh + c_{11}bh_p}{8}, & a_6 = -\frac{bL\xi_{33}}{2h_p}, \end{cases} \quad (7)$$

式中,  $h$  为基梁厚度,  $L$  和  $b$  分别为基梁和压电层的长与宽.

为了分析压电材料主动阻尼力对振动稳定性的影响, 研究中不考虑结构阻尼力. 则轴向力  $P(t)$  所作的功为

$$W_p = \int_0^L \frac{P}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (8)$$

研究中考虑简支梁横向位移的一阶展开式, 可将位移  $w$  表示为如下形式:

$$w(x, t) = W(t) \sin \frac{\pi x}{L}, \quad (9)$$

式中,  $W(t)$  为位移幅值, 即广义坐标. 将式(9)分别代入式(4)和式(6)及式(8), 则动能、势能和外力功表示为

$$T = \frac{1}{4} mL \left( \frac{dW}{dt} \right)^2, \quad (10)$$

$$U = \frac{a_1 \pi^4}{2L^3} W^2 + \frac{2a_2 \pi}{L} V_0 W - \frac{2a_3 \pi^3}{3L^3} W^3 + \frac{a_4 \pi^2}{2L} V_0 W^2 + \frac{3a_5 \pi^4}{8L^3} W^4 + a_6 V_0^2, \quad (11)$$

$$W_p = \frac{P \pi^2}{4L} W^2. \quad (12)$$

将动能、势能和外力功的表达式(10)至式(12)代入式(3), 对广义坐标  $W$  求变分, 得到整体结构的非线性运动方程为

$$\frac{d^2 W}{dt^2} + a_7 V_0 + (a_8 - Pa_9) W + a_{10} V_0 W + a_{11} W^2 + a_{12} W^3 = 0, \quad (13)$$

其中

$$a_7 = \frac{4a_2 \pi}{mL^2}, \quad a_8 = \frac{2a_1 \pi^4}{mL^4}, \quad a_9 = \frac{\pi^2}{mL^2}, \quad a_{10} = \frac{2a_4 \pi^2}{mL^2}, \quad a_{11} = -\frac{4a_3 \pi^3}{mL^4}, \quad a_{12} = \frac{3a_5 \pi^4}{mL^4}, \quad (14)$$

可见式(13)的第 2 项和第 4 项为力电耦合项, 其将外加电压与结构运动联系起来, 反映出外电压对结构动力学特性将产生影响. 此外可见, 结构振动方程为立方非线性方程.

## 2 主动控制方案

压电材料可以通过施加适当的外部控制电压以获得主动阻尼, 改进结构的振动稳定性. 为

了达到这个目的,可以实施速度负反馈控制方案.采用速度传感器测量梁结构某一点  $x_0$  处的速度并传给控制器,控制器以速度反馈控制算法计算控制电压,并施加给压电作动器贴片产生控制力.速度反馈控制要求施加给压电作动器的控制电压与结构某一点  $x_0$  处的速度成正比,即表示为<sup>[16]</sup>

$$V_0 = -K \frac{dw(x_0, t)}{dt} = -K \sin \frac{\pi x_0}{L} \frac{dW}{dt}, \quad (15)$$

式中  $K$  为反馈控制增益.

将式(15)代入到式(13),并结合式(9),则运动方程变为如下形式的含阻尼立方非线性方程:

$$\frac{d^2 W}{dt^2} + c_p \frac{dW}{dt} + (a_8 - Pa_9)W + a_{13}W \frac{dW}{dt} + a_{11}W^2 + a_{12}W^3 = 0, \quad (16)$$

式中

$$c_p = -Ka_7 \sin \frac{\pi x_0}{L}, \quad a_{13} = -Ka_{10} \sin \frac{\pi x_0}{L}. \quad (17)$$

式(16)中第2项为速度反馈导致的主动阻尼力,系数  $c_p$  为主动阻尼系数,其与反馈增益  $K$  有关.可见,采用压电材料并施加速度反馈控制后,结构产生主动阻尼力,影响结构的运动稳定性.通过主动调节反馈增益  $K$  的值,结构动力学特性将发生变化.

### 3 稳定性分析

下面对非线性运动方程(16)进行稳定性分析.将简谐激励力  $P(t) = P_0 + P_1 \cos \Omega t$  代入式(16),并整理成如下形式:

$$\frac{d^2 W}{dt^2} + 2\hat{\zeta}\omega \frac{dW}{dt} + \omega^2(1 - 2\hat{\mu} \cos \Omega t)W + a_{13}W \frac{dW}{dt} + a_{11}W^2 + a_{12}W^3 = 0, \quad (18)$$

其中

$$\omega^2 = a_8 - a_9 P_0, \quad \hat{\zeta} = \frac{c_p}{2\omega}, \quad \hat{\mu} = \frac{a_9 P_1}{2\omega^2}, \quad (19)$$

其中,  $\hat{\zeta}$  和  $\hat{\mu}$  都为无量纲量,  $\hat{\zeta}$  为阻尼比.

定义如下无量纲量:

$$\bar{W} = \frac{W}{L}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \bar{t} = \omega_0 t, \quad \bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\omega_0}, \quad (20)$$

式中,  $\omega_0 = \pi^2 \sqrt{EI/(mL^4)}$  为基梁的一阶固有频率,其中  $I = bh^3/12$  为基梁的横截面惯性矩.将以上无量纲量代入式(18)中,得如下无量纲运动方程:

$$\frac{d^2 \bar{W}}{d\bar{t}^2} + 2\hat{\zeta}\bar{\omega} \frac{d\bar{W}}{d\bar{t}} + \bar{\omega}^2(1 - 2\hat{\mu} \cos \bar{\Omega} \bar{t})\bar{W} + \hat{\alpha}\bar{W} \frac{d\bar{W}}{d\bar{t}} + \hat{\beta}\bar{W}^2 + \hat{\gamma}\bar{W}^3 = 0, \quad (21)$$

式中,  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  和  $\hat{\gamma}$  为无量纲系数,其表示为

$$\hat{\alpha} = \frac{a_{13}L}{\omega_0}, \quad \hat{\beta} = \frac{a_{11}L}{\omega_0^2}, \quad \hat{\gamma} = \frac{a_{12}L^2}{\omega_0^2}.$$

为书写简便,在以下分析中略去各无量纲量符号上面的“-”.

下面采用多尺度法求解<sup>[17-19]</sup>.为此,引入如下标度变换:

$$\hat{\zeta} \rightarrow \varepsilon \zeta, \quad \hat{\mu} \rightarrow \varepsilon \mu, \quad \hat{\alpha} \rightarrow \varepsilon \alpha, \quad \hat{\beta} \rightarrow \varepsilon \beta, \quad \hat{\gamma} \rightarrow \varepsilon \gamma, \quad (22)$$

其中  $\varepsilon$  为无量纲小扰动参数, 则式(21)变为

$$\frac{d^2 W}{dt^2} + 2\varepsilon\zeta\omega \frac{dW}{dt} + \omega^2(1 - 2\varepsilon\mu \cos \Omega t)W + \varepsilon\alpha W \frac{dW}{dt} + \varepsilon\beta W^2 + \varepsilon\gamma W^3 = 0. \quad (23)$$

设方程(23)的解为如下形式:

$$W(t, \varepsilon) = W_0(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon W_1(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon^2 W_2(T_0, T_1, T_2, \dots) + \dots, \quad (24)$$

式中,  $T_n = \varepsilon^n t$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), 取前两阶时间尺度, 其中  $T_0 = t$  为快变时间尺度,  $T_1 = \varepsilon t$  为慢变时间尺度. 则有如下微分算子:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots, \\ \frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + \dots = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots. \end{cases} \quad (25)$$

研究  $\omega = \Omega/2$  的亚谐波-主参数共振, 为此设

$$\omega = \frac{\Omega}{2} + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots. \quad (26)$$

将式(24)至式(26)代入式(23)中, 并令等式两端  $\varepsilon$  的同次幂的系数相等, 得

$$D_0^2 W_0 + \frac{\Omega^2}{4} W_0 = 0, \quad (27)$$

$$D_0^2 W_1 + \frac{\Omega^2}{4} W_1 = -2D_0 D_1 W_0 - \zeta\Omega D_0 W_0 - \Omega\omega_1 W_0 + \frac{\Omega^2}{2} \mu W_0 \cos \Omega T_0 - \alpha W_0 D_0 W_0 - \beta W_0^2 - \gamma W_0^3. \quad (28)$$

式(27)的复数形式的解为

$$W_0 = a(T_1) \exp\left(i \frac{\Omega T_0}{2}\right) + \bar{a}(T_1) \exp\left(-i \frac{\Omega T_0}{2}\right), \quad (29)$$

式中,  $\bar{a}$  为  $a$  的共轭复数.

将式(29)代入式(28)中, 得如下方程:

$$D_0^2 W_1 + \frac{\Omega^2}{4} W_1 = \left(-i\Omega a' - i \frac{\zeta\Omega^2 a}{2} - \Omega\omega_1 a + \frac{\Omega^2 \mu \bar{a}}{4} - 3\gamma a^2 \bar{a}\right) \exp\left(i \frac{\Omega T_0}{2}\right) - \left(i \frac{\Omega \alpha a^2}{2} + \beta a^2\right) \exp(i\Omega T_0) + \left(\frac{\Omega^2 \mu a}{4} - \gamma a^3\right) \exp\left(i \frac{3\Omega T_0}{2}\right) - \beta a \bar{a} + cc, \quad (30)$$

式中,  $a'$  为  $a$  对  $T_1$  的导数,  $cc$  表示等式右端各项的共轭复数部分. 消除式(30)中的久期项, 得

$$-i\Omega a' - i \frac{\zeta\Omega^2 a}{2} - \Omega\omega_1 a + \frac{\Omega^2 \mu \bar{a}}{4} - 3\gamma a^2 \bar{a} = 0. \quad (31)$$

将  $a$  表示为如下指数函数的形式:

$$a = \frac{A \exp(i\varphi)}{2}, \quad (32)$$

式中,  $A$  和  $\varphi$  均为  $T_1$  的实函数. 将式(32)代入式(31)中, 并将实部和虚部分开, 得

$$A' = -\frac{A\zeta\Omega}{2} - \frac{A\mu\Omega}{4} \sin 2\varphi, \quad (33)$$

$$\varphi' = \omega_1 + \frac{3A^2\gamma}{4\Omega} - \frac{\mu\Omega}{4} \cos 2\varphi. \quad (34)$$

令  $A' = \varphi' = 0$ , 则可求得定常解. 考虑非平凡解, 即  $A \neq 0$ , 则由式(33)得到

$$\sin 2\varphi = -\frac{2\zeta}{\mu}. \quad (35)$$

将式(35)代入式(34),得到定常解的振幅为

$$A^2 = -\frac{4\omega_1\Omega}{3\gamma} \pm \frac{\mu\Omega^2}{3\gamma} \sqrt{1 - \frac{4\zeta^2}{\mu^2}}. \quad (36)$$

上式称为幅频曲线方程,其反应了外激振力频率和主动阻尼等对结构振动幅值的影响。

根据  $A$  为实函数的条件,由式(36)得到结构运动稳定性条件如下:

$$\omega_1 < \pm \frac{\Omega}{2} \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - \zeta^2} \quad (\zeta < \mu/2). \quad (37)$$

将式(37)代入式(26),得到如下一阶近似稳定性区域

$$\frac{2\omega}{\Omega} < 1 \pm \sqrt{\frac{\hat{\mu}^2}{4} - \hat{\zeta}^2} \quad (\hat{\zeta} < \hat{\mu}/2). \quad (38)$$

由此可见,反馈控制增益(其控制阻尼比  $\hat{\zeta}$ ) 和轴向力(由  $\hat{\mu}$  反映)等对结构运动稳定性区域产生影响。

结合式(15)和式(29)及式(32),即可确定实施主动控制所施加的外电压幅值如下:

$$|V_0| = \frac{1}{2} KA\Omega \sin \frac{\pi x_0}{L}. \quad (39)$$

下面分析不同参数对定常解稳定性以及结构幅频曲线特性等的影响。

## 4 算例和讨论

针对图1所示的承受轴向压力的参数激励非线性压电梁结构,计算其稳定性边界、幅频曲线和控制电压,分析各因素对结构参数振动稳定性的影响。计算中式(36)和(38)中只考虑取正号的情况,取负号的情况可以类似分析。基梁和压电材料的参数取值如表1所示。

表1 基梁和压电材料的参数取值

Table 1 The parameters for the base beam and piezoelectric material

	elastic constant	mass density	piezoelectric constant	length	width	thickness
	$E$ or $c_{11}$ /GPa	$\rho$ /( $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ )	$e_{31}$ /( $\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$ )	$L$ /m	$b$ /m	$h$ /m
base beam(Al)	71	2 710	—	0.5	0.01	0.005
piezoelectric layer(PZT-5H)	126	7 500	-6.50	0.5	0.01	0.001

图2针对轴力  $P_0$  取 100 N 时,分析了控制增益  $K$  对压电梁参数振动稳定性的影响。纵坐标对应与轴力  $P_1$  有关的参数  $\hat{\mu}$  (见式(19)),由图2可见,随着控制增益的增大,稳定域边界线上处于亚谐波-主参数共振点(曲线的最低点,对应  $2\omega/\Omega=1$  处)附近逐渐向上移动,也就是说当控制增益变大时,即使在较大的轴力幅值  $P_1$  作用下,结构运动也会趋于稳定。并且控制增益越大,结构所能承受的轴向力也越大(但应在梁的屈曲载荷范围内)。

为了分析与图2所对应的不同控制增益下结构的主动阻尼特性,图3给出了主动阻尼比  $\hat{\zeta}$  随控制增益  $K$  的变化规律。从图3可见,随着控制增益的增大,结构的主动阻尼比也逐渐增加,并且呈线性规律上升,这是因为主动阻尼系数(见式(17))与控制增益成比例。当控制增益增大到 300 时,对应的主动阻尼比约为 0.037,起到了较好的主动阻尼效果。但需要注意的是:控制增益  $K$  不能无限制的增大,其必须要满足结构稳定性条件(见式(38)),即要求主动阻尼比小于  $\hat{\mu}/2$ 。

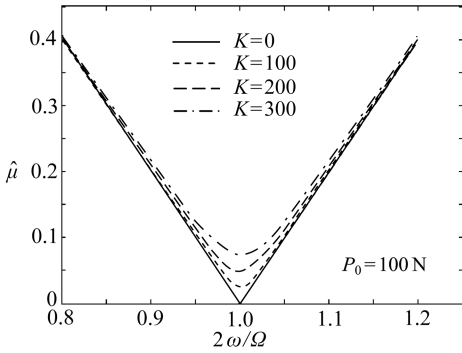


图2 控制增益对压电梁稳定性的影响

Fig. 2 The effect of the control gain on the motion stability of the piezoelectric beam

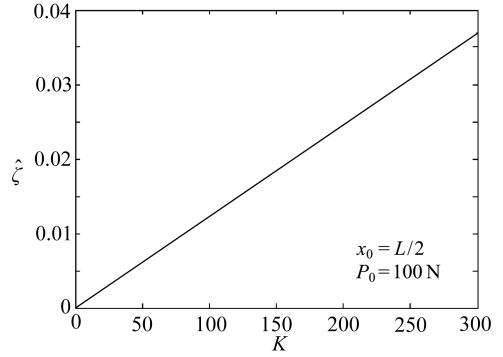


图3 主动阻尼比随控制增益的变化

Fig. 3 The variation of the active damping ratio with the control gain

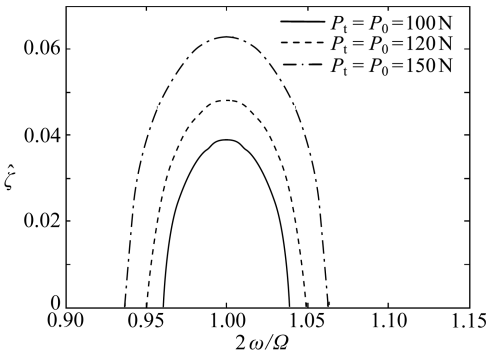


图4 轴力对压电梁稳定性的影响

Fig. 4 The effect of axial force on the stability of piezoelectric beam

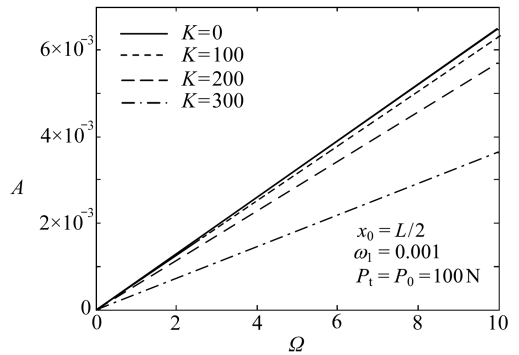


图5 控制增益对结构幅频曲线特性的影响

Fig. 5 The effect of control gain on the structural amplitude-frequency curve properties

图4分析了轴力幅值 $P_t$ 和 $P_0$ 对结构参数振动稳定性的影响。图中纵坐标为阻尼比 $\hat{\zeta}$ ，可见，随着轴力的逐渐变大(小于梁的屈曲载荷)，稳定域边界线上处于亚谐波-主参数共振点(曲线的最高点，对应 $2\omega/\Omega = 1$ 处)也逐渐升高。这说明，当轴力增加时，需要对梁结构提供较大的主动阻尼(施加较大控制增益)，才能使结构的振动处于稳定性区域。

为了分析主动控制对结构动态响应的影响，针对不同控制增益，图5计算了结构的幅频曲线特性(见式(36))。从图可见，随着控制增益的增加，响应幅值 $A$ 逐渐降低。当控制增益增大到300时，与未施加控制( $K=0$ )的结果比较可见，响应幅值降低了将近一半。此外，由图5还可见，振幅 $A$ 随激振力频率 $\Omega$ 的增加近似呈线性规律增长。这是因为频率调谐参数 $\omega_1$ 的取值比较小(计算中 $\omega_1$ 取0.001)，这样当激振力频率 $\Omega$ 取值较小时，由式(36)可见，振幅 $A$ 与 $\Omega$ 近似呈线性规律变化。

针对图5中所取的几个控制增益，图6给出了相应的控制电压幅值。从图可见，随着激振力频率 $\Omega$ 的增加，控制电压幅值呈非线性规律增长。从图6还可见，并不是控制增益越大，所施加的控制电压越大。例如：当控制增益 $K$ 取200时所需要的控制电压要比 $K$ 取300时的值大。这是因为控制电压 $|V_0|$ 与控制增益 $K$ 之间并不是简单的线性关系，虽然从表面上看式(39)中 $|V_0|$ 与 $K$ 成正比，但是进一步分析可知，式(39)中的振幅 $A$ 还与控制增益 $K$ 满足非线性关系(参见式(17)中的第1式、式(19)中的第2式、式(22)中的前两式、以及式(36))，由此导致控

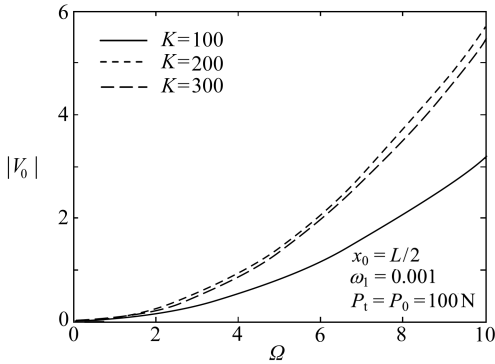


图6 不同控制增益下外电压幅值  
随激振力频率的变化

Fig. 6 The variation of external voltage amplitude  
versus excitation frequency under  
different control gains

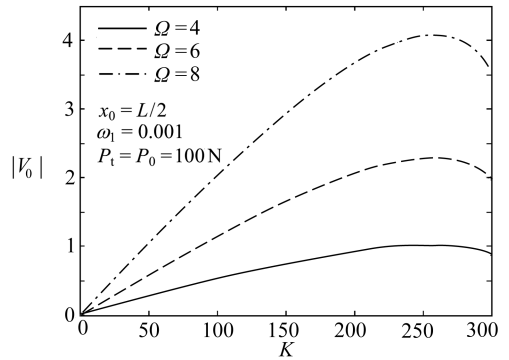


图7 不同激振力频率下外电压幅值  
随控制增益的变化

Fig. 7 The variation of external voltage amplitude  
versus the control gain under different  
excitation frequencies

制电压  $|V_0|$  与控制增益  $K$  之间是非线性关系(图7中详细显示出了  $|V_0|$  与  $K$  之间的非线性关系曲线)。

为了分析控制增益对控制电压的影响规律,图7针对激振力频率取不同值时,外电压随控制增益的变化曲线。由图可见,随着控制增益的增大,控制电压逐渐增加,在  $K = 250$  左右达到最大值,然后又开始下降。所以实际应用中,为了取得理想的控制效果,又不施加太大的控制电压,应当注意控制增益的取值,尽量不要在电压曲线峰值附近选取控制增益值。

## 5 结 论

本文研究了非线性梁结构的参数振动稳定性及其主动控制,采用速度反馈控制算法获得主动阻尼,建立含阻尼的立方非线性运动方程,利用多尺度方法求解运动方程得到稳定性区域,分析了控制增益、外激振力幅值等因素对稳定性区域和幅频曲线特性的影响。通过分析,得到如下结论:

- 1) 控制增益增大时,结构能够在较大的轴力作用下处于稳定运动状态。并且控制增益越大,结构所能承受的轴向力也越大(在屈曲载荷范围内)。
- 2) 控制增益增大时,结构的主动阻尼比也逐渐增加。但控制增益不能无限增大,其必须满足使结构振动处于稳定性的条件。
- 3) 增大轴力幅值时,要使梁结构的振动趋于稳定,需要对结构提供较大的主动阻尼(即施加较大的控制增益)。
- 4) 随着控制增益的增大,响应幅值逐渐降低。但所需的控制电压与控制增益之间的规律比较复杂,随着控制增益的增大,控制电压存在峰值点。

本研究结果对柔性梁结构的振动稳定性分析和主动控制、以及动力学优化设计具有重要意义。

## 参考文献(References):

- [1] Zhang W, Chen Y, Cao D X. Computation of normal forms for eight-dimensional nonlinear dynamical system and application to a viscoelastic moving belt[J]. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2006, 7(1): 35-58.



- [2] 张琪昌, 田瑞兰, 李小涛. 高维非线性动力系统最简规范形的计算[J]. 振动工程学报, 2008, **21**(5): 436-440. (ZHANG Qi-chang, TIAN Rui-lan, LI Xiao-tao. General program of calculating the simplest normal forms for high-dimensional nonlinear dynamical systems[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2008, **21**(5): 436-440. (in Chinese))
- [3] 戎海武, 王向东, 孟光, 徐伟, 方同. 窄带随机噪声作用下非线性系统的响应[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(7): 723-729. (RONG Hai-wu, WANG Xiang-dong, MENG Guang, XU Wei, FANG Tong. Response of nonlinear oscillator under narrow-band random excitation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2003, **24**(7): 817-825.)
- [4] 李凤明, 孙春春, 王毅泽, 黄文虎. 参数激励非线性压电梁的振动稳定性[J]. 振动工程学报, 2008, **21**(5): 441-445. (LI Feng-ming, SUN Chun-chun, WANG Yi-ze, HUANG Wen-hu. Vibration stability of the parametrically excited nonlinear piezoelectric beams[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2008, **21**(5): 441-445. (in Chinese))
- [5] 蔡国平. 存在时滞的柔性梁的振动主动控制[J]. 固体力学学报, 2004, **25**(1): 29-34. (CAI Guo-ping. Active vibration control of a flexible beam with time delay in control[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2004, **25**(1): 29-34. (in Chinese))
- [6] Li F M, Kishimoto K, Wang Y S, Chen Z B, Huang W H. Vibration control of beams with active constrained layer damping[J]. *Smart Materials and Structures*, 2008, **17**(6): 065036.
- [7] Song Z G, Li F M. Active aeroelastic flutter analysis and vibration control of supersonic beams using the piezoelectric actuator/sensor pairs[J]. *Smart Materials and Structures*, 2011, **20**(5): 055013.
- [8] Ray M C, Batra R C. Vertically reinforced 1-3 piezoelectric composites for active damping of functionally graded plates[J]. *AIAA Journal*, 2007, **45**(7): 1779-1783.
- [9] Zhang H Y, Shen Y P. Vibration suppression of laminated plates with 1-3 piezoelectric fiber-reinforced composite layers equipped with interdigitated electrodes[J]. *Composite Structures*, 2007, **79**(2): 220-228.
- [10] Dong X J, Meng G, Peng J C. Vibration control of piezoelectric smart structures based on system identification technique: numerical simulation and experimental study[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, **297**(3/5): 680-693.
- [11] Zhang Y, Niu H, Xie S, Zhang X. Numerical and experimental investigation of active vibration control in a cylindrical shell partially covered by a laminated PVDF actuator[J]. *Smart Materials and Structures*, 2008, **17**(3): 035024.
- [12] Qiu Z C, Han J D, Zhang X M, Wang Y C, Wu Z W. Active vibration control of a flexible beam using a non-collocated acceleration sensor and piezoelectric patch actuator[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, **326**(3/5): 438-455.
- [13] Kapuria S, Yasin M Y. Active vibration suppression of multilayered plates integrated with piezoelectric fiber reinforced composites using an efficient finite element model[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2010, **329**(16): 3247-3265.
- [14] Chen L W, Lin C Y, Wang C C. Dynamic stability analysis and control of a composite beam with piezoelectric layers[J]. *Composite Structures*, 2002, **56**(1): 97-109.
- [15] Kumar K R, Narayanan S. Active vibration control of beams with optimal placement of piezoelectric sensor/actuator pairs[J]. *Smart Materials and Structures*, 2008, **17**(5): 055008.
- [16] Wang C Y, Vaicaitis R. Active control of vibrations and noise of double wall cylindrical shells[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, **216**(5): 865-888.
- [17] 陈予恕. 非线性振动[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002. (CHEN Yu-shu. *Nonlinear Vibration*

- [M]. Beijing: Higher Education Press, 2002. (in Chinese))
- [18] Ganesan R. Effects of bearing and shaft asymmetries on the instability of rotors operating at near-critical speeds[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2000, **35**(5): 737-752.
- [19] 刘延柱, 陈立群. 非线性振动[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001. (LIU Yan-zhu, CHEN Li-qun. *Nonlinear Vibration*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2001. (in Chinese))

## Parametric Vibration Stability and Active Control of Nonlinear Beams

LI Feng-ming<sup>1,2</sup>, LIU Chun-chuan<sup>2</sup>

(1. *College of Mechanical Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, P. R. China;*

2. *School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, P. O. Box 137, Harbin 150001, P. R. China)*

**Abstract:** The vibration stability and active control of the parametrically excited nonlinear beam structures were studied using the piezoelectric material. The velocity feedback control algorithm was applied to obtain the active damping. The cubic nonlinear equation of motion with damping was established by employing Hamilton' principle. The method of multiple scales was used to solve the equation of motion, and the stable region was obtained. The effects of the control gain and amplitude of the external force on the stable region and amplitude-frequency curve characteristics were analyzed numerically. From the numerical results it was seen that with the increase of the feedback control gain, the axial force to which the structure could be subjected increased, and in certain scope the structural active damping ratio also increased. With the increase of the control gain, the response amplitude decreases gradually, but the required control voltage exists peak value.

**Key words:** beam; piezoelectric material; parametric vibration; stability; active control; method of multiple scales