

# 基于降阶解法的三维分层地基状态空间解\*

艾智勇, 成怡冲, 刘鹏

(同济大学 地下建筑与工程系; 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092)

**摘要:** 从以位移形式表达的三维弹性力学控制方程出发,经双重 Fourier 变换,并运用基于 Cayley-Hamilton 定理的降阶解法,推导出位移变量及其 1 阶导数的解,再利用物理方程求得单层地基的传递矩阵;结合边界条件和层间连续条件,进一步得到多层地基的状态空间解;编制相应程序进行数值分析,对多层地基中有软弱下卧层和坚硬下卧层时的沉降情况进行了比较和讨论。

**关键词:** 状态空间解; 多层弹性地基; 双重 Fourier 变换; 降阶解法

**中图分类号:** TU443 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.11.003

## 引言

外荷载作用下地基内部位移与应力的计算问题是岩土工程领域由来已久的一个热点课题,因为对这一问题的合理解答将极大地促进基础及其它地下结构设计的发展。目前,根据弹性理论对该课题进行的研究和探索已取得了不少成果,如 Boussinesq 解及其他解答<sup>[1-3]</sup>。但为了简便,这些解答多将地基假设为半空间或有限层厚的均匀各向同性弹性介质。

大多数天然地基由于沉积作用而具有成层特性,若将这一特性加以考虑,对地基沉降的预测将更接近实际。基于这种考虑,众多学者在过去的几十年里展开了多层弹性材料边值问题的研究,并形成了多种分析方法,包括:传播矩阵法<sup>[4]</sup>,传递矩阵法<sup>[5-6]</sup>,刚度矩阵法<sup>[7]</sup>,和有限层法<sup>[8]</sup>等。文献[9]对以上成果进行了简要总结。以上提到的关于成层问题的求解方法中,状态空间法,或被称为多层问题的传递矩阵法,由于其清楚地建立了各层面状态变量之间的关系,并易于数值求解而成为一种被广泛采用的方法。

Ai 等<sup>[9]</sup>,王林生<sup>[10]</sup>,钟阳等<sup>[11]</sup>基于不同的推导方法各自获得了各向同性弹性层的传递矩阵,并通过状态空间理论研究了柱坐标下多层弹性地基的轴对称与非轴对称受荷问题。鉴于土木工程中许多基础被设计为矩形,那么对于实际工程的计算,直角坐标下的解答显得更具实用性。关于直角坐标下的状态空间解,若只关注弹性介质竖向位移和应力的求解,将常规的  $6 \times 6$  传递矩阵通过对水平向变量进行解耦变换分解为一个  $4 \times 4$  和一个  $2 \times 2$  传递矩阵的解耦方法<sup>[9,11-13]</sup>具有减少计算量的优点,因为这时只要利用其中  $4 \times 4$  的传递矩阵就可以算得竖向位

\* 收稿日期: 2011-04-27; 修订日期: 2012-06-21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50578121)

作者简介: 艾智勇(1966—),男,江西人,教授,博士,博士生导师(联系人。Tel: +86-21-65982201; Fax: +86-21-65985210; E-mail: zhiyongai@tongji.edu.cn)。

移和应力,艾智勇等<sup>[12]</sup>采用解耦变换方法分析了直角坐标下三维多层弹性地基的受荷问题.岳中琦等<sup>[13]</sup>提出类似的解耦变换方法来研究横观各向同性成层地基问题.

然而,在许多情况下,对弹性体中横向位移与应力的求解同样甚至更加重要,但解耦解答需要经过复杂的处理来获得这些量,因为它不仅需要对解耦后的两个矩阵都进行计算,而且还必须作进一步的变换以最终获得横向位移与应力.显然,对于我们所讨论的问题,获取耦合状态下的解答仍具有重要价值.最近,王有凯等<sup>[14]</sup>通过对水平向变量进行 Laplace 变换,推导出三维成层地基的一个耦合解;但是,受 Laplace 变换性质的制约,这个解答只能近似分析水平向无限问题,且未给出显式表达.

据作者所知,尽管直角坐标下的三维成层地基的状态空间解具有诸多优点,但相比于柱坐标下的解答,这类解答目前并不常见.基于三维弹性体的控制方程,并采用积分变换和可以显著简化推导过程的降阶解法,本文旨在推导获得外力作用下三维成层弹性地基中位移与应力的耦合状态空间或传递矩阵解;相比于解耦后的传递矩阵,本文提出的解答具有更直接的表达式和易于编程的优点.

## 1 传递矩阵推导

三维弹性地基的位移控制方程为<sup>[15]</sup>

$$\nabla^2 u_x + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla^2 u_y + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla^2 u_z + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

$$\theta = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (4)$$

式中,  $u_x, u_y, u_z$  分别为  $x, y$  及  $z$  方向的位移;  $\nu$  为 Poisson 比;  $\nabla^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$  为 Laplace 算子.

对位移进行的双重 Fourier 变换,可定义为<sup>[16]</sup>

$$(\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (iu_x, iu_y, u_z) e^{-i(\xi_x x + \xi_y y)} dx dy. \quad (5)$$

将式(5)应用于式(1)至式(3),得

$$\frac{d^2 \bar{u}_x}{dz^2} = (a\xi_x^2 + \xi_y^2) \bar{u}_x + \frac{\xi_x \xi_y}{b} \bar{u}_y + \frac{\xi_x}{b} \frac{d\bar{u}_z}{dz}, \quad (6)$$

$$\frac{d^2 \bar{u}_y}{dz^2} = \frac{\xi_x \xi_y}{b} \bar{u}_x + (a\xi_y^2 + \xi_x^2) \bar{u}_y + \frac{\xi_y}{b} \frac{d\bar{u}_z}{dz}, \quad (7)$$

$$\frac{d^2 \bar{u}_z}{dz^2} = \frac{\xi^2}{a} \bar{u}_z - \frac{1}{ab} \left( \xi_x \frac{d\bar{u}_x}{dz} + \xi_y \frac{d\bar{u}_y}{dz} \right), \quad (8)$$

式中,  $\xi^2 = \xi_x^2 + \xi_y^2$ ,  $a = (2-2\nu)/(1-2\nu)$ ,  $b = 1-2\nu$ .

方程(6)至方程(8)是难于直接求解的关于  $z$  的 2 阶微分方程组,为方便推导,我们采用降阶解法,定义

$$\bar{\mathbf{w}}(z) = [\mathbf{U}(z) \quad \mathbf{U}'(z)]^T, \quad (9)$$

$$U(z) = [\bar{u}_x(z) \quad \bar{u}_y(z) \quad \bar{u}_z(z)]^T, \tag{10}$$

$$U'(z) = \left[ \frac{d\bar{u}_x(z)}{dz} \quad \frac{d\bar{u}_y(z)}{dz} \quad \frac{d\bar{u}_z(z)}{dz} \right]^T, \tag{11}$$

则式(6)至式(8)可表示为如下形式:

$$\frac{d\bar{w}(z)}{dz} = A \cdot \bar{w}(z), \tag{12}$$

式中

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{J} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix}, \tag{13}$$

$$B = \begin{bmatrix} a\xi_x^2 + \xi_y^2 & \frac{\xi_x \xi_y}{b} & 0 \\ \frac{\xi_x \xi_y}{b} & \xi_x^2 + a\xi_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\xi^2}{a} \end{bmatrix}, \tag{14}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\xi_x}{b} \\ 0 & 0 & \frac{\xi_y}{b} \\ -\frac{\xi_x}{ab} & -\frac{\xi_y}{ab} & 0 \end{bmatrix}, \tag{15}$$

其中,  $\mathbf{J}$  为 3 阶单位矩阵.

根据常微分方程理论,式(12)的解为

$$\bar{w}(z) = \exp(zA) \cdot \bar{w}(0), \tag{16}$$

式中,  $\exp(zA)$  是把  $\bar{w}(z)$  和  $\bar{w}(0)$  关联起来的矩阵.

根据 Cayley-Hamilton 理论<sup>[17]</sup>可得

$$\exp(zA) = a_0 \mathbf{I} + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 + a_4 A^4 + a_5 A^5, \tag{17}$$

这里,  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  与矩阵  $A$  有关,  $\mathbf{I}$  是  $6 \times 6$  的单位矩阵,  $A$  的特征值满足特征值方程(18):

$$(\lambda^2 - \xi^2)^3 = 0. \tag{18}$$

解方程(18)可以得到 6 个解,其中,  $\lambda_{1,2,3} = \xi, \lambda_{4,5,6} = -\xi$ ,用这些特征值取代式(17)中矩阵  $A$ , 并对方程两边分别进行 1 阶与 2 阶偏导,可得

$$\begin{cases} e^{\xi z} = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + a_4 \xi^4 + a_5 \xi^5, \\ ze^{\xi z} = a_1 + 2a_2 \xi + 3a_3 \xi^2 + 4a_4 \xi^3 + 5a_5 \xi^4, \\ z^2 e^{\xi z} = 2a_2 + 6a_3 \xi + 12a_4 \xi^2 + 20a_5 \xi^3, \\ e^{-\xi z} = a_0 - a_1 \xi + a_2 \xi^2 - a_3 \xi^3 + a_4 \xi^4 - a_5 \xi^5, \\ -ze^{-\xi z} = -a_1 + 2a_2 \xi - 3a_3 \xi^2 + 4a_4 \xi^3 - 5a_5 \xi^4, \\ z^2 e^{-\xi z} = 2a_2 - 6a_3 \xi + 12a_4 \xi^2 - 20a_5 \xi^3, \end{cases} \tag{19}$$

解式(19)可得  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  的表达式.

弹性介质应力与位移的关系为

$$\sigma_{zz} = 2G \frac{\partial u_z}{\partial z} + 2G \frac{\nu}{b} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), \quad (20)$$

$$\sigma_{xz} = G \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right), \quad (21)$$

$$\sigma_{yz} = G \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right). \quad (22)$$

应力的双重 Fourier 变换定义为

$$(\bar{\sigma}_{xz}, \bar{\sigma}_{yz}, \bar{\sigma}_{zz}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (i\sigma_{xz}, i\sigma_{yz}, \sigma_{zz}) e^{-i(\xi_x x + \xi_y y)} dx dy. \quad (23)$$

式(20)至式(22)经双重 Fourier 变换得

$$\bar{\sigma}_{zz} = aG \frac{d\bar{u}_z}{dz} + \frac{2G\nu\xi_y}{b} \bar{u}_y + \frac{2G\nu\xi_x}{b} \bar{u}_x, \quad (24)$$

$$\bar{\sigma}_{xz} = -G\xi_x \bar{u}_z + G \frac{d\bar{u}_x}{dz}, \quad (25)$$

$$\bar{\sigma}_{yz} = -G\xi_y \bar{u}_z + G \frac{d\bar{u}_y}{dz}. \quad (26)$$

由式(24)至式(26)可知,应力  $\bar{\sigma}_{xz}, \bar{\sigma}_{yz}, \bar{\sigma}_{zz}$  可由位移  $\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{u}_z$  及其 1 阶导数表示,而这些量已在式(16)获得.

定义

$$\bar{\mathbf{R}}(z) = [\mathbf{U}(z) \quad \mathbf{V}(z)]^T, \quad (27)$$

$$\mathbf{V}(z) = [\bar{\sigma}_{xz}(z) \quad \bar{\sigma}_{yz}(z) \quad \bar{\sigma}_{zz}(z)]^T. \quad (28)$$

通过式(9)至式(11)和式(24)至式(26),并通过矩阵运算等,可以建立  $\bar{\mathbf{R}}(z)$  与  $\bar{\mathbf{w}}(z)$  以及  $\bar{\mathbf{R}}(0)$  与  $\bar{\mathbf{w}}(0)$  的联系,然后进一步得到  $\bar{\mathbf{R}}(z)$  和  $\bar{\mathbf{R}}(0)$  的关系:

$$\bar{\mathbf{R}}(z) = \Phi(\xi_x, \xi_y, z) \cdot \bar{\mathbf{R}}(0), \quad (29)$$

式中,  $\Phi(\xi_x, \xi_y, z)$  为联系  $\bar{\mathbf{R}}(z)$  和  $\bar{\mathbf{R}}(0)$  的传递矩阵,其元素在附录中列出.

## 2 多层地基的解

基于单层地基传递矩阵  $\Phi(\xi_x, \xi_y, z)$ , 并考虑相邻层之间的连续条件,可容易地得到分层地基的传递矩阵解.具有  $n$  层的多层地基如图 1 所示,每层地基的弹性模量  $E$ , Poisson 比  $\nu$  及层间高度  $\Delta H$  可以任意选取,且每层地基都认为是均匀的.进行多层地基求解时,假设多层地基的底部固定,即:

$$u_x(H_n) = u_y(H_n) = u_z(H_n) = 0, \quad (30)$$

式中,  $H_n$  为多层地基底部的深度.一般情况下地基表面的边界条件为

$$\sigma_{xz}(0) = \sigma_{yz}(0) = \sigma_{zz}(0) = 0. \quad (31)$$

由分层地基的连续条件,可得

$$\bar{\mathbf{R}}(H_i^-) = \bar{\mathbf{R}}(H_i^+), \quad (32)$$

式中,  $\bar{\mathbf{R}}(H_i^-)$  表示  $z = H_i$  深度时第  $i$  层的应力与位移量,  $\bar{\mathbf{R}}(H_i^+)$  表示  $z = H_i$  深度时  $i + 1$  层的应力与位移量, 其余类推。

假设荷载  $\mathbf{P}(x, y, z)$  作用于  $n$  层弹性地基的第  $m$  层内部, 其荷载作用深度为  $H_{m_0}$ 。由力和位移在平面  $z = H_{m_0}$  处的连续条件, 有

$$\bar{\mathbf{R}}(H_{m_0}^-) = \bar{\mathbf{R}}(H_{m_0}^+) - \bar{\mathbf{P}}(H_{m_0}), \quad (33)$$

式中,  $\bar{\mathbf{P}}(H_{m_0}) = [0 \ 0 \ 0 \ \bar{F}_x \ \bar{F}_y \ \bar{F}_z]^T$ ,  $F_x, F_y, F_z$  分别为  $\mathbf{P}(x, y, z)$  在  $x, y, z$  方向的分量, 它们在变换域内的量分别为  $\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{F}_z$ 。

根据式(29)至式(33), 我们可以获得如下的表达式:

$$\bar{\mathbf{R}}(H_n^-) = \mathbf{f}\bar{\mathbf{R}}(0) - \mathbf{s}\bar{\mathbf{P}}(H_{m_0}), \quad (34)$$

式中

$$\mathbf{f} = \Phi(\xi_x, \xi_y, \Delta H_n) \cdot \Phi(\xi_x, \xi_y, \Delta H_{n-1}) \cdots \Phi(\xi_x, \xi_y, \Delta H_1);$$

$$\mathbf{s} = \Phi(\xi_x, \xi_y, \Delta H_n) \cdot \Phi(\xi_x, \xi_y, \Delta H_{n-1}) \cdots \Phi(\xi_x, \xi_y, \Delta H_{m_0});$$

$\Delta H_i = H_i - H_{i-1} (i = 1, 2, \dots, n)$ ,  $\Delta H_{m_0} = H_m - H_{m_0}$ ;  $H_i, H_{i-1}$  分别表示第  $i$  层底面和顶面距离地基表面的距离。

根据式(34)可解析求得  $\bar{\mathbf{R}}(0)$  和  $\bar{\mathbf{R}}(H_n)$ 。当计算点  $z$  在荷载作用面以上时 ( $z < H_{m_0}$ ), 位移和应力由下式求得:

$$\bar{\mathbf{R}}(z) = \mathbf{a}\bar{\mathbf{R}}(0), \quad (35)$$

式中,  $\mathbf{a} = \Phi(\xi_x, \xi_y, z - H_{i-1}) \cdot \Phi(\xi_x, \xi_y, \Delta H_{i-1}) \cdots \Phi(\xi_x, \xi_y, \Delta H_1)$ 。

当计算点  $z$  在荷载作用面以下 ( $z > H_{m_0}$ ), 位移和应力由下式求得:

$$\bar{\mathbf{R}}(z) = \mathbf{b}\bar{\mathbf{R}}(H_n), \quad (36)$$

式中,  $\mathbf{b} = \Phi(\xi_x, \xi_y, z - H_i) \cdot \Phi(\xi_x, \xi_y, -\Delta H_{i+1}) \cdots \Phi(\xi_x, \xi_y, -\Delta H_n)$ 。

对  $\bar{\mathbf{R}}(z)$  进行双重 Fourier 逆变换, 可得到任意荷载作用下成层弹性地基中的位移和应力。

### 3 数值计算与分析

基于本文推导的三维分层弹性地基任意一点应力与位移的传递矩阵解, 编写了相应的计算程序。本文计算结果与 Boussinesq 解的对照, 见图 2 和图 3。在该算例中, 集中力  $F_0$  作用在土体坐标原点, 土体的弹性模量为  $E$ , Poisson 比  $\nu = 0.0$ 。计算的应力和位移为点  $x = 1.0 \text{ m}, y = 2.0 \text{ m}$  下沿深度的应力与位移; 另外, 无量纲化时  $h$  取为  $1 \text{ m}$ 。需要说明是, 只要地基取足够的厚度且每层弹性参数一致, 底面约束的多层弹性地基模型可退化为弹性半空间地基模型。通过比较发现, 当厚度大于  $1000 \text{ m}$  时最终结果基本不再变化。因此, 该算例中采用了每层厚度为  $100 \text{ m}$  的 10 层弹性地基模型来模拟弹性半空间。由图可见: 两者结果符合得很好, 这说明本文理论及数值计算是正确的。

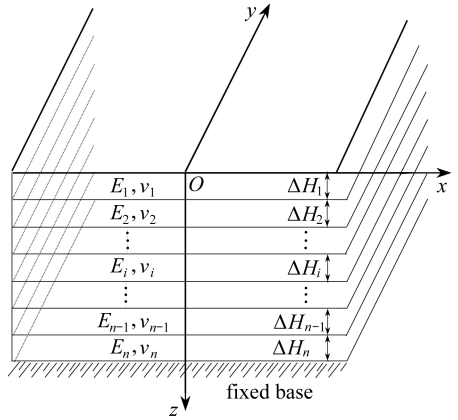


图 1 多层弹性地基  
Fig. 1 Multilayered elastic soils



从图 4 可见,当第 1 层土体的弹性模量  $E$  增加时,多层地基的位移曲线趋向平缓,即地基的竖向位移随深度变化很小,并基本和地基表面的竖向位移一致;与此同时,产生的地表位移也越小.从图 5 可见,当第 2 层土体的弹性模量  $E$  增加时,多层弹性地基中的位移曲线都十分类似;并且,地表位移的减少也不明显.

## 4 结 论

基于降阶解法推导了直角坐标系下多层地基耦合的状态空间解.多层弹性地基中由任意方向受力所导致的应力与位移可由该解答直接计算.验证性算例表明本文结果与 Boussinesq 解计算结果一致;其他数值计算表明:多层地基的坚硬上层可有效地减少竖向沉降;与此相反,软弱的上层土则不利于沉降控制.

## 附 录

$$\begin{aligned} \Phi_{11} = \Phi_{44} &= \frac{2(\nu - 1)\xi \operatorname{ch}(\xi z) - z \operatorname{sh}(z\xi)\xi_x^2}{2(\nu - 1)\xi}, \quad \Phi_{12} = \Phi_{21} = \Phi_{45} = \Phi_{54} = \frac{z \operatorname{sh}(z\xi)\xi_x\xi_y}{2(1 - \nu)\xi}, \\ \Phi_{13} = -\Phi_{64} &= \frac{\xi_x((1 - 2\nu)\operatorname{sh}(z\xi) + z\xi \operatorname{ch}(z\xi))}{2(1 - \nu)\xi}, \quad \Phi_{14} = \frac{z\xi_x^2 \operatorname{ch}(z\xi) - (\xi_x^2 + 4\xi^2(\nu - 1))\operatorname{sh}(z\xi)}{4G(1 - \nu)\xi^3}, \\ \Phi_{15} = \Phi_{24} &= \frac{\xi_x\xi_y(\operatorname{sh}(z\xi) - z\xi \operatorname{ch}(z\xi))}{4(\nu - 1)G\xi^3}, \quad \Phi_{16} = -\Phi_{34} = \frac{z \operatorname{sh}(z\xi)\xi_x}{4G(1 - \nu)\xi}, \\ \Phi_{22} = \Phi_{55} &= \frac{2(\nu - 1)\xi \operatorname{ch}(\xi z) - z \operatorname{sh}(z\xi)\xi_y^2}{2(\nu - 1)\xi}, \quad \Phi_{23} = -\Phi_{65} = \frac{\xi_y((1 - 2\nu)\operatorname{sh}(z\xi) + z\xi \operatorname{ch}(z\xi))}{2(1 - \nu)\xi}, \\ \Phi_{25} &= \frac{\xi\xi_y^2 z \operatorname{ch}(z\xi) - (\xi_y^2 + 4\xi^2(\nu - 1))\operatorname{sh}(z\xi)}{4G(1 - \nu)\xi^3}, \quad \Phi_{26} = -\Phi_{35} = \frac{z \operatorname{sh}(z\xi)\xi_y}{4G(1 - \nu)\xi}, \\ \Phi_{31} = -\Phi_{46} &= \frac{\xi_x((2\nu - 1)\operatorname{sh}(z\xi) + z\xi \operatorname{ch}(z\xi))}{2(\nu - 1)\xi}, \\ \Phi_{32} = -\Phi_{56} &= \frac{\xi_y((1 - 2\nu)\operatorname{sh}(z\xi) - z\xi \operatorname{ch}(z\xi))}{2(1 - \nu)\xi}, \\ \Phi_{33} = \Phi_{66} &= \frac{z\xi \operatorname{sh}(z\xi) + 2(\nu - 1)\operatorname{ch}(z\xi)}{2(\nu - 1)}, \quad \Phi_{36} = \frac{(4\nu - 3)\operatorname{sh}(z\xi) + z\xi \operatorname{ch}(z\xi)}{4(\nu - 1)G\xi}, \\ \Phi_{41} &= \frac{G(-\xi\xi_x^2 z \operatorname{ch}(z\xi) + (\xi^2 - \nu\xi_y^2)\operatorname{sh}(z\xi))}{\xi(1 - \nu)}, \quad \Phi_{42} = \Phi_{51} = \frac{G\xi_x\xi_y(\nu \operatorname{sh}(z\xi) + z\xi \operatorname{ch}(z\xi))}{(1 - \nu)\xi}, \\ \Phi_{43} = -\Phi_{61} &= \frac{zG \operatorname{sh}(z\xi)\xi_x\xi}{1 - \nu}, \quad \Phi_{52} = \frac{G(-\xi\xi_y^2 z \operatorname{ch}(z\xi) + (\nu\xi_x^2 - \xi^2)\operatorname{sh}(z\xi))}{\xi(\nu - 1)}, \\ \Phi_{53} = -\Phi_{62} &= \frac{zG \operatorname{sh}(z\xi)\xi_y\xi}{1 - \nu}, \quad \Phi_{63} = \frac{G\xi(\operatorname{sh}(z\xi) - z\xi \operatorname{ch}(z\xi))}{1 - \nu}, \end{aligned}$$

其中

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

## 参考文献 (References):

- [1] Mindlin R D. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid[J]. *Physics*, 1936, 7(5): 195-202.
- [2] Muki R. Asymmetric problems of the theory of elasticity for a semi-infinite solid and thick plate[C]//Sneddon I N, Hill R. *Progress in Soil Mechanics*. Amsterdam: North-Holland,

- 1960: 399-439.
- [3] Sneddon I N. On Muki's solution of the equations of linear elasticity[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1992, **30**(10): 1237-1246.
- [4] Pan E. Static Green's functions in multilayered half spaces[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 1997, **21**(8): 509-521.
- [5] Buefler H. Theory of elasticity of a multilayered medium[J]. *Journal of Elasticity*, 1971, **1**(2): 125-143.
- [6] Bahar L Y. Transfer matrix approach to layered systems[J]. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 1972, **98**(5): 1159-1172.
- [7] Kausel E, Seak S H. Static loads in layered half-spaces[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1987, **54**(2): 403-408.
- [8] Small J C, Booker J R. Finite layer analysis of layered elastic material using a flexibility approach—part 2: circular and rectangular loadings[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1986, **23**(5): 959-978.
- [9] Ai Z Y, Yue Z Q, Tham L G, Yang M. Extended Sneddon and Muki solutions for multilayered elastic materials[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2002, **40**(13): 1453-1483.
- [10] 王林生. 求解成层地基空间轴对称问题的初参数法[J]. 力学学报, 1986, **18**(6): 528-537. (WANG Lin-sheng. The initial parameter method for solving three-dimensional axisymmetrical problems of layered foundation[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1986, **18**(6): 528-537. (in Chinese))
- [11] 钟阳, 王哲人, 郭大智, 王争宇. 求解多层弹性半空间非轴对称问题的传递矩阵法[J]. 土木工程学报, 1995, **28**(1): 66-72. (ZHONG Yang, WANG Zhe-ren, GUO Da-zhi, WANG Zheng-yu. Transfer matrix method for solving non-axisymmetrical problems in multilayered elastic half space[J]. *China Civil Engineering Journal*, 1995, **28**(1): 66-72. (in Chinese))
- [12] 艾智勇, 吴超. 三维直角坐标系下分层地基的传递矩阵解[J]. 重庆建筑大学学报, 2008, **30**(2): 43-46. (AI Zhi-yong, WU Chao. Transfer matrix solution for multilayered soils in rectangular coordinate system[J]. *Journal of Chongqing Jianzhu University*, 2008, **30**(2): 43-46. (in Chinese))
- [13] 岳中琦, 王仁. 多层横观各向同性弹性体静力学问题的解[J]. 北京大学学报(自然科学版), 1988, **24**(2): 202-211. (YUE Zhong-qi, WANG Ren. Static solution for transversely isotropic elastic  $N$ -layered systems[J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis*, 1988, **24**(2): 202-211. (in Chinese))
- [14] 王有凯, 龚耀清. 任意荷载作用下层状横观各向同性弹性地基的直角坐标解[J]. 工程力学, 2006, **23**(5): 9-13. (WANG You-kai, GONG Yao-qing. Analytical solution of transversely isotropic elastic multilayered subgrade under arbitrary loading in rectangular coordinates[J]. *Engineering Mechanics*, 2006, **23**(5): 9-13. (in Chinese))
- [15] Timoshenko S P, Good J N. *Theory of Elasticity*[M]. New York: McGraw-Hill, 1970.
- [16] Sneddon I N. *The Use of Integral Transform*[M]. New York: McGraw-Hill, 1972.
- [17] Pastel E C, Leckie F A. *Matrix Methods in Elasto-Mechanics*[M]. New York: McGraw-Hill, 1963.



# State Space Solution to 3D Multilayered Elastic Soils Based on Order Reduction Method

AI Zhi-yong, CHENG Yi-chong, LIU Peng

*(Department of Geotechnical Engineering, Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, P. R. China)*

**Abstract:** Starting with the governing equations in terms of displacements of three-dimensional elastic medium, the solutions of displacement components and their first derivatives were obtained by the application of a double Fourier transform and an order reduction method based on the Cayley-Hamilton theorem. Combining the solutions and the constitutive equations which connected the displacements and stresses, the transfer matrix of a single soil layer was acquired. And then the state space solution of multilayered elastic soils was further obtained by introducing the boundary conditions and continuity conditions between adjacent soil layers. Numerical analysis based on the present theory was carried out, and the vertical displacements of multilayered foundation with a weak and a hard underlying stratum were compared and discussed.

**Key words:** state space solution; multilayered elastic soils; double Fourier transform; order reduction method