

Lagrange 中心型守恒格式*

葛全文

(应用物理与计算数学研究所,北京 100094)

摘要: 提出了 Lagrange 中心型守恒气体动力学格式. 引入了当前时刻子网格密度与当前时刻网格声速产生的网格分片常数压力. 初始网格密度乘以初始子网格体积得到子网格质量, 这些子网格质量除以当前时刻子网格体积得到当前时刻子网格密度. 应用网格分片常数压力, 构造了满足动量守恒、总能量守恒的 Lagrange 中心型守恒气体动力学格式, 格点速度与网格面的数值通量相容的方式计算. 对 Saltzman 活塞问题等进行了数值模拟, 数值结果显示 Lagrange 中心型守恒气体动力学格式的有效性和精确性.

关键词: 子网格力; Lagrange 中心型格式; Lagrange 中心型守恒气体动力学格式; 网格分片常数压力

中图分类号: O241.82 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.10.009

引言

我们考虑 Lagrange 气体动力学方程. 在这篇文章中, 我们的目的是提出中心型 Lagrange 守恒气体动力学格式. 这个格式是由文献[1]提出的中心型 Lagrange 流体力学格式拓广而成. 描述算法之前, 我们简单回顾拉氏气体动力学算法. 拉氏流体力学格式以网格随流体运动为特征, 这意味着网格格点以流体的速度运动, 网格面由格点位置确定, 这保证没有质量流过运动网格的边界, 因此, 拉氏流体力学算法能准确捕捉多物质流中的接触间断. 离散拉氏流体力学关键在于要以与格点速度相容的方式决定物理守恒律的数值通量, 即同时满足几何守恒律, 拉氏网格体积的变化率要与格点运动的计算一致. 这个关键要求是多维拉氏格式的基石. 满足这个要求的最自然的方式就是用交错离散, 即位置、速度和动能定义在格点, 而密度、压力、内能定义在网格中心. 动能耗散为内能是由人为粘性保证的. 由于 von Neumann 和 Richtmyer^[2] 和 Wilkins^[3] 的开创性工作, Caramana 和 Shashkov^[4-6] 作了许多完善, 这改进了交错离散的精度和有效性. 相容交错离散的构造以严密的论证^[7-8] 导出了总能量守恒格式. 我们也注意到有限元计算里, 可变量稳定逼近的最新进展^[9-10], 这里变量用分段线性逼近. $Q1/P0$ 有限元中^[11], 运动变量用分段线性连续逼近, 热动力学变量用分片常数逼近. 与交错离散不同的格式是基于 Godunov 等^[12] 方法而导出的 Godunov 型格式. 与交错离散相比, Godunov 型格式具有守恒特

* 收稿日期: 2011-08-29; 修订日期: 2012-05-02

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11172050)

作者简介: 葛全文(1960—), 男, 吉林人, 副研究员, 博士(Tel: +86-10-59872160; E-mail: ge_quanwen@iapcm.ac.cn).

性,不需要人为粘性,在用于任意 Lagrange, Euler 算法时,允许守恒重映方法的直接实现. 基于 Godunov 方法而导出的 Godunov 型格式,动能、密度、压力、内能定义在网格中心. 由在每个面上解近似 Riemann 问题而得到的网格面的量,包括速度的面法向分量是可用的. 可是,要运动网格必须计算格点的速度. Adessio 等^[13]建议利用加权最小二乘法算法,要求投影到面法向的格点速度等于那个面的 Riemann 速度计算格点速度. 结果是这种算法会产生格点速度场的虚假部分,导致人为网格运动,而需要昂贵的处理^[14]. 这个缺点大概来自于通量计算与格点的运动不相容,不满足几何守恒律. Després 等^[15]取得通量离散与格点的运动相容性的重要成就,他们提出基于格点 Riemann 解而获得面通量与格点速度计算一致性的格式,这个原始格式是满足半离散熵不等式的一阶守恒格式. Carré 等^[16]把这个格式发展为高阶、多维格式. 通过 Després 格点 Riemann 解特性的研究, Maire 等^[1]显示 Després 格式对高常宽比的网格导致严重的数值不稳定性. 为克服这个困难, Maire 等^[1]引入了一种替换格式,这个格式较好地解决高常宽比问题并保持通量离散与格点计算的相容性. 它的主要特点是压力梯度的离散,这被设计为网格的每一格点有两个压力,每一格点压力与连接格点边的外法方向相关,这些格点压力与格点速度由半边 Riemann 问题连接. 可是 Maire 等^[1]引入的格式没有消除在一开始就困扰中心型拉氏流体力学算法的网格畸变带来的数值计算困难. 拉氏流体力学计算失败的根源是拉氏质量的假定不正确以前网格拓扑预先破裂,这导致计算精度下降直至计算停止. 在短空间网格尺度,这称为沙漏运动. 在长空间网格尺度,这称为虚假涡旋或长细网格问题. 两种情形的结果都是网格畸变和与真实解无关的震荡. 本文显示怎样运用网格分片常数压力,消除这些运动. 网格分片常数压力产生于当前时刻子网格密度与当前时刻网格声速,初始网格密度乘以初始子网格体积得到子网格质量,子网格质量除以当前时刻子网格体积得到当前时刻子网格密度. 本文的结构如下:第 1 节,预备概念和 Lagrange 中心型格式的回顾;第 2 节,借用相容交错离散的子网格力的概念,利用分片常数压力产生的子网格力来构造 Lagrange 中心型守恒气体动力学格式;第 3 节,给出数值结果;第 4 节,给出结论和展望.

1 预备概念和先前工作的回顾

1.1 拉氏流体力学方程

设 D 是 R^2 空间的开子集,充满无粘理想流体, (O, X, Y) 是 R^2 空间的直角坐标系, $(\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y)$ 是标准正交基,定义单位向量 $\mathbf{e}_Z = \mathbf{e}_X \times \mathbf{e}_Y$. 拉氏流体力学方程组为

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} dV - \int_{S(t)} \mathbf{U} \cdot \mathbf{N} dS = 0, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{U} dV + \int_{S(t)} P \mathbf{N} dS = \mathbf{0}, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho E dV + \int_{S(t)} P \mathbf{U} \cdot \mathbf{N} dS = 0, \quad (4)$$

这里 d/dt 表示拉氏时间导数, $V(t)$ 是运动控制体, $S(t)$ 是 $V(t)$ 的边界, $\tau = 1/\rho$, $\mathbf{U} = (u, v)^T$, P, E 分别是比容、速度、压力、总能, \mathbf{N} 表示边界 $S(t)$ 的单位外法向量,式(1)、(3)和(4)分别表示质量、动量、总能守恒. 式(2)表示几何守恒律,它等价于运动方程:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X} = \mathbf{U}, \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{x}, \quad (5)$$

\mathbf{X} 表示时间 $t > 0$ 时的运动控制体的格点坐标, \mathbf{x} 表示时间 $t = 0$ 时的运动控制体的格点坐标. 定义映射:

$$\begin{aligned} M_t: V(0) &\rightarrow V(t), \\ \mathbf{X} &\rightarrow \mathbf{X}(\mathbf{x}, t), \end{aligned}$$

这里 $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ 表示方程(5)的唯一解. 这个映射把 $t = 0$ 流体的位置映到 t 的位置. 状态方程:

$$P = P(\rho, \varepsilon), \quad (6)$$

这里 ε 表示内能, $\varepsilon = E - \|\mathbf{U}\|^2/2$.

1.2 符号和假定

物理区域 $V(0)$ 划分为四边形网格 $\Omega_c(0)$ ($c = 1, \dots, I$), c 是指标同时表示网格中心坐标, I 是总网格数, 连续线性映射 M_t 把 $\Omega_c(0)$ 映射为 $\Omega_c(t)$, 网格 $\Omega_c(t)$ 的格点为 p , 总数为 $p(c)$, 格点以逆时针排序, 网格 $\Omega_c(t)$ 的格点是周期的, 即 $p_{p(c)+1} = p_1$, $p_0 = p_{p(c)}$. 格点 p 的邻域网格 $\Omega_c(t)$ 总数为 $c(p)$, 邻域网格以逆时针排序, 邻域网格 $\Omega_c(t)$ 也是周期的, 即 $\Omega_{c(p)+1}(t) = \Omega_1(t)$. 用指标 f 表示网格 $\Omega_c(t)$ 的任意一个面, L_f^c 是这个面的大小, \mathbf{N}_f^c 是面的单位外法向, F_c 是网格 $\Omega_c(t)$ 的面集合, 如图 1. 我们也引入网格 $\Omega_c(t)$ 的面通量 $\mathbf{U}_f^c, \Pi_f^c, (\Pi\mathbf{U})_f^c$, 定义为

$$\begin{cases} \mathbf{U}_f^c = \frac{1}{L_f^c} \int_f \mathbf{U} dS, \\ \Pi_f^c = \frac{1}{L_f^c} \int_f P dS, \\ (\Pi\mathbf{U})_f^c = \frac{1}{L_f^c} \int_f P \mathbf{U} dS. \end{cases} \quad (7)$$

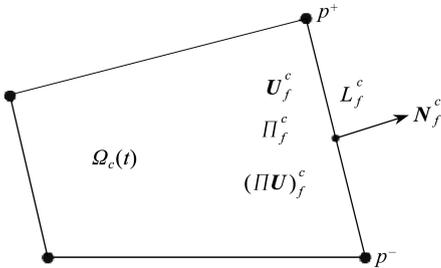


图 1 四边形网格 $\Omega_c(t)$ 的相关概念

Fig. 1 Notations related to the quadrilateral cell $\Omega_c(t)$

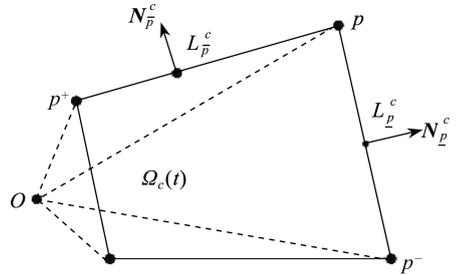


图 2 四边形网格 $\Omega_c(t)$ 的三角形剖分

Fig. 2 Triangular decomposition of the quadrilateral cell $\Omega_c(t)$

要得到基本变量 (τ, \mathbf{U}, E) 的离散方程, 我们引入网格 $\Omega_c(t)$ 的质量平均值, 设 m_c 表示网格质量, 对物理变量 ϕ

$$\phi_c = \frac{1}{m_c} \int_{\Omega_c(t)} \rho \phi dV.$$

那么, 方程组(1)、(3)、(4)变为

$$\begin{cases} m_c \frac{d}{dt} \tau_c - \sum_{f \in F(c)} L_f^c \mathbf{U}_f^c \cdot \mathbf{N}_f^c = 0, \\ m_c \frac{d}{dt} \mathbf{U}_c + \sum_{f \in F(c)} L_f^c \Pi_f^c \cdot \mathbf{N}_f^c = 0, \\ m_c \frac{d}{dt} E_c + \sum_{f \in F(c)} L_f^c (\Pi\mathbf{U})_f^c \cdot \mathbf{N}_f^c = 0. \end{cases} \quad (8)$$

格点 p 处的运动方程为

$$\frac{d\mathbf{X}_p}{dt} = \mathbf{U}_p, \mathbf{X}_p(0) = \mathbf{x}_p,$$

这里, \mathbf{X}_p 表示时间 $t > 0$ 格点坐标, \mathbf{x}_p 表示时间 $t = 0$ 的格点坐标, \mathbf{U}_p 是格点 p 的速度. 方程(8)表示拉氏流体力学方程对基本变量的面通量离散. 为了计算拉氏流体力学方程对基本变量的时间发展, 需计算面通量 \mathbf{U}_f^c, Π_f^c 和 $(\Pi\mathbf{U})_f^c$, 为移动网格, 需计算格点速度 \mathbf{U}_p .

1.3 几何守恒律的相容离散

因为 $m_c/\rho_c = V_c, m_c, \rho_c, V_c$ 分别是网格 $\Omega_c(t)$ 的质量、密度和体积. 方程(2)能写成

$$\frac{dV_c}{dt} - \sum_{f \in F(c)} L_f^c \mathbf{U}_f^c \cdot \mathbf{N}_f^c = 0. \quad (9)$$

网格 $\Omega_c(t)$ 的体积 V_c 是格点坐标 \mathbf{X}_p 的函数. 要计算体积 V_c , 先进行网格 $\Omega_c(t)$ 的三角分解, 见图2.

$$V_c = \frac{1}{2} \sum_{p \in p(c)} (\mathbf{X}_p \times \mathbf{X}_{p^+}) \cdot \mathbf{e}_Z,$$

关于时间求导:

$$\frac{dV_c}{dt} = \sum_{p \in p(c)} \frac{1}{2} (L_{pp^-} \mathbf{N}_{pp^-} + L_{pp^+} \mathbf{N}_{pp^+}) \cdot \mathbf{U}_p, \quad (10)$$

L_{pp^-} 和 L_{pp^+} 分别是边 $[p, p^-]$ 和 $[p, p^+]$ 的大小, \mathbf{N}_{pp^-} 和 \mathbf{N}_{pp^+} 分别是边 $[p, p^-]$ 和 $[p, p^+]$ 的单位外法向. 交换脚标, 方程(10)变为

$$\frac{dV_c}{dt} = \sum_{p \in p(c)} \frac{1}{2} L_{pp^+} \mathbf{N}_{pp^+} \cdot (\mathbf{U}_p + \mathbf{U}_{p^+}). \quad (11)$$

比较显示方程(9)与(11)在下列条件下是等价的:

$$\mathbf{U}_f^c = \frac{1}{2} (\mathbf{U}_p + \mathbf{U}_{p^+}). \quad (12)$$

满足相容条件(12)的唯一方式是要先计算格点速度 \mathbf{U}_p , 导出面速度 \mathbf{U}_f^c . 由此处理, 几何守恒律的面离散与网格体积变化率的相容性能保证. 引入符号(图2)

$$L_{\underline{p}}^c = \frac{1}{2} L_{pp^-}, \mathbf{N}_{\underline{p}}^c = \mathbf{N}_{pp^-}, L_{\bar{p}}^c = \frac{1}{2} L_{pp^+}, \mathbf{N}_{\bar{p}}^c = \mathbf{N}_{pp^+},$$

方程(10)写为

$$\frac{dV_c}{dt} = \sum_{p \in p(c)} L_{pc} \mathbf{N}_{pc} \cdot \mathbf{U}_p,$$

\mathbf{N}_{pc} 表示由下式定义的单位隅角向量: $L_{pc} \mathbf{N}_{pc} = L_{\underline{p}}^c \mathbf{N}_{\underline{p}}^c + L_{\bar{p}}^c \mathbf{N}_{\bar{p}}^c$.

1.4 动量通量的计算

如图3(图4), Maire等^[1]在网格 $\Omega_c(t)$ 每一格点 p 引入两个格点压力离散动量通量, 格点压力 $\Pi_{\underline{p}}^c$ 是边 $[p, p^-]$ 靠格点 p 的半边压力, 格点压力 $\Pi_{\bar{p}}^c$ 是边 $[p, p^+]$ 靠格点 p 的半边压力, 引入网格 $\Omega_c(t)$ 离散梯度算子 $(\nabla P)_c$:

$$(\nabla P)_c = \frac{1}{V_c} \sum_{p \in p(c)} (L_{\underline{p}}^c \Pi_{\underline{p}}^c \mathbf{N}_{\underline{p}}^c + L_{\bar{p}}^c \Pi_{\bar{p}}^c \mathbf{N}_{\bar{p}}^c).$$

动量方程写为

$$m_c \frac{d}{dt} \mathbf{U}_c + \sum_{p \in p(c)} (L_{\underline{p}}^c \Pi_{\underline{p}}^c \mathbf{N}_{\underline{p}}^c + L_{\bar{p}}^c \Pi_{\bar{p}}^c \mathbf{N}_{\bar{p}}^c) = \mathbf{0}. \quad (13)$$

Maire等^[1]得到动量方程格点通量离散, 这等价于面通量离散, 计算边 $f = [p, p^+]$ 的面通量

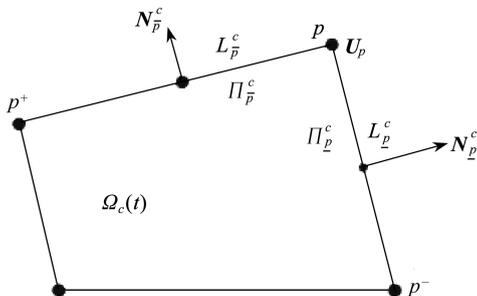


图3 半 Riemann 问题给出的格点 p 处半边压力

Fig.3 Localization of the nodal pressures given by the half Riemann problems at point p

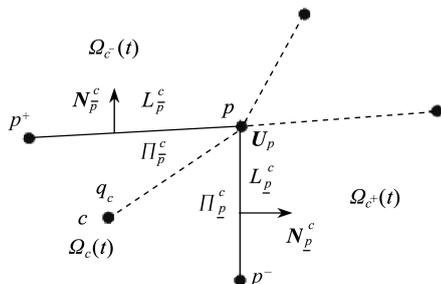


图4 格点 p 处格点解的相关概念

Fig.4 Notations related to the nodal solver at point p

Π_f^c , 只要动量面通量由下式给出:

$$\Pi_f^c = \frac{1}{2}(\Pi_{p^+}^c + \Pi_p^c).$$

引入力 F_{pc}

$$F_{pc} = L_p^c \Pi_p^c N_p^c + L_{\bar{p}}^c \Pi_{\bar{p}}^c N_{\bar{p}}^c. \tag{14}$$

这个力是相关网格 $\Omega_c(t)$ 和格点 p 的子网格力。动量方程写为

$$m_c \frac{d}{dt} U_c + \sum_{p \in p(c)} F_{pc} = 0. \tag{15}$$

在格点 p 附近边 $[p, p^-]$ 的速度等于格点速度,那么在边 $[p, p^-]$ 上采用半边逼近 Riemann 问题计算的格点压力 $\Pi_p^c, \Pi_{\bar{p}}^c$ 为

$$P_c - \Pi_p^c = Z_p^c (U_p - U_c) N_p^c, P_c - \Pi_{\bar{p}}^c = Z_{\bar{p}}^c (U_p - U_c) N_{\bar{p}}^c, \tag{16}$$

Z_p^c 和 $Z_{\bar{p}}^c$ 由下式计算:

$$Z_p^c = \rho_c a_c + \rho_c \Gamma_c | (U_p - U_c) \cdot N_p^c |, Z_{\bar{p}}^c = \rho_c a_c + \rho_c \Gamma_c | (U_p - U_c) \cdot N_{\bar{p}}^c |, \tag{17}$$

a_c 是声速, Γ_c 是物质参数,对理想气体 $\Gamma_c = (\gamma + 1)/2$. 应用式(14),子网格力 F_{pc} 写成

$$F_{pc} = L_{pc} P_c N_{pc} - M_{pc} (U_p - U_c), \tag{18}$$

N_{pc} 表示由下式定义的单位隅角向量: $L_{pc} N_{pc} = L_p^c N_p^c + L_{\bar{p}}^c N_{\bar{p}}^c, M_{pc} = Z_p^c L_p^c (N_p^c \otimes N_p^c) + Z_{\bar{p}}^c L_{\bar{p}}^c (N_{\bar{p}}^c \otimes N_{\bar{p}}^c)$ 是对称正定矩阵.

1.5 总能量通量的计算

总能量的变化率等于网格 $\Omega_c(t)$ 的子网格力 F_{pc} 对格点 p 做功的和,把子网格力 F_{pc} 代入先前的方程得到格点通量离散方程:

$$m_c \frac{d}{dt} E_c + \sum_{p \in p(c)} (L_p^c \Pi_p^c N_p^c + L_{\bar{p}}^c \Pi_{\bar{p}}^c N_{\bar{p}}^c) \cdot U_p = 0. \tag{19}$$

1.6 动量和总能量守恒

忽略边界力做功,所有网格动量求和

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_c m_c U_c \right) = - \sum_c \sum_{p \in p(c)} F_{pc}, \tag{20}$$

交换求和次序得到

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_c m_c U_c \right) = - \sum_p \sum_{c \in c(p)} F_{pc}, \tag{21}$$

$c(p)$ 是格点 p 的邻域网格数. 所有网格总能量求和

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_c m_c E_c \right) = - \sum_c \sum_{p \in \rho(c)} \mathbf{F}_{pc} \cdot \mathbf{U}_p, \quad (22)$$

交换求和次序得

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_c m_c E_c \right) = - \sum_p \sum_{c \in \rho(p)} \mathbf{F}_{pc} \cdot \mathbf{U}_p. \quad (23)$$

动量和总能量守恒条件是

$$\sum_{c \in \rho(p)} \mathbf{F}_{pc} = \mathbf{0}. \quad (24)$$

1.7 格点速度方程的构造

利用子网格力(18),充分条件(24)写成

$$\sum_{c=1}^{c(p)} [L_{pc} P_c N_{pc} - M_{pc} (\mathbf{U}_p - \mathbf{U}_c)] = \mathbf{0}. \quad (25)$$

设 $M_p = \sum_{c=1}^{c(p)} M_{pc}$, 格点速度 \mathbf{U}_p 方程写成

$$M_p \mathbf{U}_p = \sum_{c=1}^{c(p)} (L_{pc} P_c N_{pc} + M_{pc} \mathbf{U}_c). \quad (26)$$

1.8 提出问题

文献[1]中, Maire 等在网格 $\Omega_c(t)$ 每一格点 p 引入两个格点压力构造下列半离散格式:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV_c}{dt} = \sum_{p \in \rho(c)} (L_p^c N_p^c + L_{\bar{p}}^c N_{\bar{p}}^c) \cdot \mathbf{U}_p, \\ m_c \frac{d}{dt} \mathbf{U}_c + \sum_{p \in \rho(c)} (L_p^c \Pi_p^c N_p^c + L_{\bar{p}}^c \Pi_{\bar{p}}^c N_{\bar{p}}^c) = \mathbf{0}, \\ m_c \frac{d}{dt} E_c + \sum_{p \in \rho(c)} (L_p^c \Pi_p^c N_p^c + L_{\bar{p}}^c \Pi_{\bar{p}}^c N_{\bar{p}}^c) \cdot \mathbf{U}_p = 0, \\ M_p \mathbf{U}_p = \sum_{c=1}^{c(p)} (L_{pc} P_c N_{pc} + M_{pc} \mathbf{U}_c), \\ P_c - \Pi_p^c = Z_p^c (\mathbf{U}_p - \mathbf{U}_c) N_p^c, \\ P_c - \Pi_{\bar{p}}^c = Z_{\bar{p}}^c (\mathbf{U}_p - \mathbf{U}_c) N_{\bar{p}}^c. \end{array} \right. \quad (27)$$

Maire 断言条件(24)成立, Maire 格式(27)满足动量和总能量守恒,但是我们检查发现条件(24)不成立,因为 Maire 在网格 $\Omega_c(t)$ 的格点 p 引入两个压力,见图4,那么在三角形 $p^+ p^- p$ 上,一定存在从 p 点发出的间断线 pq_c . 同样, p 点的每一邻域网格内也存在着压力间断线 pq_c , $c = 1, \dots, c(p)$, 由于这些间断线的存在,使守恒条件(24)不成立. 我们的目的是提出 Lagrange 中心型守恒气体动力学格式. 与 Maire 等^[1]利用的方法不同,我们利用分片常数压力来构造 Lagrange 中心型守恒气体动力学格式. 与 Maire 等^[1]利用的方法不同,我们利用分片常数压力来构造 Lagrange 中心型守恒气体动力学格式. 下面定义网格内分片常数压力,如图5(图6). 显示四边形网格 $\Omega_c(t)$, 格点 p, p^+, p^k, p^- , 边界中点 b_1, b_2, b_3, b_4 . 用边界中点、格点和中心点的连线把网格 $\Omega_c(t)$ 划分为8个三角形子网格 $cpb_1, cpb_2, cp^+ b_2, cp^+ b_3, cp^k b_3, cp^k b_4, cp^- b_4$ 和 $cp^- b_1$. 我们用 $\tilde{\Pi}_p^c, \tilde{\Pi}_{\bar{p}}^c, \tilde{\Pi}_{p^+}^c, \tilde{\Pi}_{\bar{p}^+}^c, \tilde{\Pi}_{p^k}^c, \tilde{\Pi}_{\bar{p}^k}^c, \tilde{\Pi}_{p^-}^c$ 和 $\tilde{\Pi}_{\bar{p}^-}^c$ 表示三角形子网格 $cpb_1, cpb_2, cp^+ b_2, cp^+ b_3, cp^k b_3, cp^k b_4, cp^- b_4$ 和 $cp^- b_1$ 的压力, 网格 $\Omega_c(t)$ 的压力表示为三角形子网格 $cpb_1, cpb_2, cp^+ b_2, cp^+ b_3, cp^k b_3, cp^k b_4, cp^- b_4$ 和 $cp^- b_1$ 里的分片常数压力 $\tilde{\Pi}_p^c, \tilde{\Pi}_{\bar{p}}^c, \tilde{\Pi}_{p^+}^c, \tilde{\Pi}_{\bar{p}^+}^c, \tilde{\Pi}_{p^k}^c, \tilde{\Pi}_{\bar{p}^k}^c, \tilde{\Pi}_{p^-}^c$ 和 $\tilde{\Pi}_{\bar{p}^-}^c$. 三角形子网格 cpb_2 上的体积 \tilde{V}_p^c , 压力 $\tilde{\Pi}_p^c$, 质量 \tilde{m}_p^c 和密度 $\tilde{\rho}_p^c$, 三角形子网格 cpb_1 上的体积 $\tilde{V}_{\bar{p}}^c$,

压力 $\tilde{\Pi}_p^c$, 质量 \tilde{m}_p^c , 密度 $\tilde{\rho}_p^c$. 沿着这些三角形子网格的边界, 这些分片常数压力产生的力能够计算. 我们引入力 $\tilde{\mathbf{F}}_{pc}$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{pc} = L_p^c \tilde{\Pi}_p^c \mathbf{N}_p^c + L_{\bar{p}}^c \tilde{\Pi}_{\bar{p}}^c \mathbf{N}_{\bar{p}}^c + d_p^c \mathbf{D}_p^c \tilde{\Pi}_p^c + d_{\bar{p}}^c \mathbf{D}_{\bar{p}}^c \tilde{\Pi}_{\bar{p}}^c, \quad (28)$$

$$\tilde{\Pi}_p^c = a_c^2 (\tilde{\rho}_p^c - \rho_c) + P_c, \quad \tilde{\Pi}_{\bar{p}}^c = a_c^2 (\tilde{\rho}_{\bar{p}}^c - \rho_c) + P_c, \quad (29)$$

这个力称为相关网格 $\Omega_c(t)$ 和格点 p 的子网格力. 这里 a_c 是网格 $\Omega_c(t)$ 的声速. d_p^c 和 \mathbf{D}_p^c 是三角形子网格 cpb_2 边 cp 的大小和单位外法向, $d_{\bar{p}}^c$ 和 $\mathbf{D}_{\bar{p}}^c$ 是三角形子网格 cpb_1 边 cp 的大小和单位外法向.

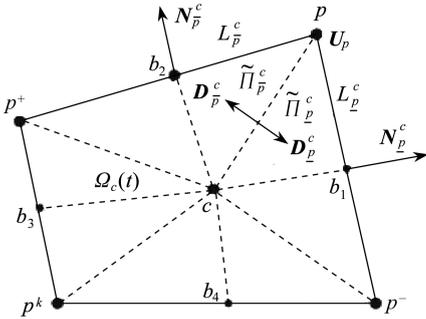


图 5 网格 $\Omega_c(t)$ 靠近格点 p 的分片压力

Fig. 5 Localization of a piecewise pressure at point p viewed from cell $\Omega_c(t)$

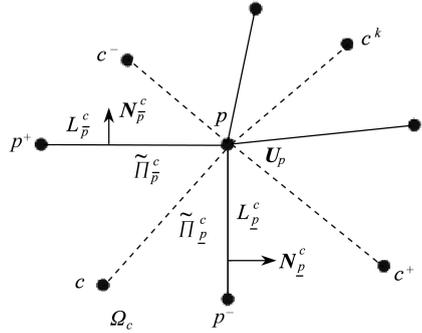


图 6 相关四边形网格 $\Omega_c(t)$ 格点解的子网格的概念

Fig. 6 Notations of subcell related to the nodal solver at point p of cell $\Omega_c(t)$

2 空间守恒离散

2.1 动量通量的计算

用相关网格 $\Omega_c(t)$ 的所有子网格力构造网格 $\Omega_c(t)$ 的离散梯度算子:

$$(\nabla P)_c = \frac{1}{V_c} \sum_{p \in p(c)} (L_p^c \tilde{\Pi}_p^c \mathbf{N}_p^c + L_{\bar{p}}^c \tilde{\Pi}_{\bar{p}}^c \mathbf{N}_{\bar{p}}^c + d_p^c \mathbf{D}_p^c \tilde{\Pi}_p^c + d_{\bar{p}}^c \mathbf{D}_{\bar{p}}^c \tilde{\Pi}_{\bar{p}}^c). \quad (30)$$

动量方程格点通量离散写成

$$m_c \frac{d}{dt} \mathbf{U}_c + \sum_{p \in p(c)} (L_p^c \tilde{\Pi}_p^c \mathbf{N}_p^c + L_{\bar{p}}^c \tilde{\Pi}_{\bar{p}}^c \mathbf{N}_{\bar{p}}^c + d_p^c \mathbf{D}_p^c \tilde{\Pi}_p^c + d_{\bar{p}}^c \mathbf{D}_{\bar{p}}^c \tilde{\Pi}_{\bar{p}}^c) = \mathbf{0}, \quad (31)$$

$$m_c \frac{d}{dt} \mathbf{U}_c + \sum_{p \in p(c)} \tilde{\mathbf{F}}_{pc} = \mathbf{0}. \quad (32)$$

2.2 总能量通量的计算

总能量的变化率等于网格 $\Omega_c(t)$ 的子网格力 $\tilde{\mathbf{F}}_{pc}$ 对格点 p 做功的和

$$m_c \frac{d}{dt} E_c + \sum_{p \in p(c)} \tilde{\mathbf{F}}_{pc} \cdot \mathbf{U}_p = 0. \quad (33)$$

把子网格力 $\tilde{\mathbf{F}}_{pc}$ 代入前面的方程得到格点通量离散方程:

$$m_c \frac{d}{dt} E_c + \sum_{p \in p(c)} (L_p^c \tilde{\Pi}_p^c \mathbf{N}_p^c + L_{\bar{p}}^c \tilde{\Pi}_{\bar{p}}^c \mathbf{N}_{\bar{p}}^c + d_p^c \mathbf{D}_p^c \tilde{\Pi}_p^c + d_{\bar{p}}^c \mathbf{D}_{\bar{p}}^c \tilde{\Pi}_{\bar{p}}^c) \cdot \mathbf{U}_p = 0. \quad (34)$$

2.3 网格 $\Omega_c(t)$ 的格点通量离散方程

基本变量 $(\tau_c, \mathbf{U}_c, E_c)$ 格点通量半离散 Lagrange 中心型守恒气体动力学格式为

$$\begin{cases} m_c \frac{d}{dt} \tau_c = \sum_{p \in p(c)} (L_p^c N_p^c + L_{\bar{p}}^c N_{\bar{p}}^c) \cdot U_p, \\ m_c \frac{d}{dt} U_c + \sum_{p \in p(c)} (L_p^c \tilde{\Pi}_p^c N_p^c + L_{\bar{p}}^c \tilde{\Pi}_{\bar{p}}^c N_{\bar{p}}^c + d_p^c D_p^c \tilde{\Pi}_p^c + d_{\bar{p}}^c D_{\bar{p}}^c \tilde{\Pi}_{\bar{p}}^c) = 0, \\ m_c \frac{d}{dt} E_c + \sum_{p \in p(c)} (L_p^c \tilde{\Pi}_p^c N_p^c + L_{\bar{p}}^c \tilde{\Pi}_{\bar{p}}^c N_{\bar{p}}^c + d_p^c D_p^c \tilde{\Pi}_p^c + d_{\bar{p}}^c D_{\bar{p}}^c \tilde{\Pi}_{\bar{p}}^c) \cdot U_p = 0. \end{cases} \quad (35)$$

2.4 动量和总能量守恒

忽略边界力做功,对所有网格动量求和:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_c m_c U_c \right) = - \sum_c \sum_{p \in p(c)} \tilde{F}_{pc}, \quad (36)$$

交换求和次序得到

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_c m_c U_c \right) = - \sum_p \sum_{c=1}^{c(p)} \tilde{F}_{pc}. \quad (37)$$

动量守恒的条件为

$$\sum_{c=1}^{c(p)} \tilde{F}_{pc} = 0. \quad (38)$$

条件(38)成立,因为作用于一点的所有力的和为0.对所有网格总能量求和:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_c m_c E_c \right) = - \sum_c \sum_{p \in p(c)} \tilde{F}_{pc} \cdot U_p, \quad (39)$$

交换求和次序得

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_c m_c E_c \right) = - \sum_p \left(\sum_{c=1}^{c(p)} \tilde{F}_{pc} \right) \cdot U_p, \quad (40)$$

$$\sum_{c=1}^{c(p)} \tilde{F}_{pc} = 0. \quad (41)$$

条件(41)成立,总能量守恒.

2.5 解格点速度 U_p

2.5.1 如果格点 p 在计算区域的内部

我们在网格 $\Omega_c(t)$ 的格点 p 引入一个压力,这个压力由以单位隅角向量 N_{pc} 定义的半边逼近 Riemann 问题确定.

$$P_c - \Pi_{pc} = Z^c (U_p - U_c) N_{pc}, \quad (42)$$

这里 Z^c 是网格 $\Omega_c(t)$ 的声阻. 设 a_c 是声速, Γ_c 是物质参数,对理想气体 $\Gamma_c = (\gamma + 1)/2$, 有

$$Z^c = \rho_c a_c + \rho_c \Gamma_c | (U_p - U_c) \cdot N_{pc} |. \quad (43)$$

这注定在网格 $\Omega_c(t)$ 的格点 p 定义一个格点压力 Π_{pc} , 如图7(图8). 对应一个格点压力 Π_{pc} , 子网格力 \hat{F}_{pc} 为

$$\hat{F}_{pc} = L_{pc} P_c N_{pc} - \tilde{M}_{pc} (U_p - U_c), \quad (44)$$

N_{pc} 表示由下式定义的相关网格 $\Omega_c(t)$ 和格点 p 的单位隅角向量: $L_{pc} N_{pc} = L_p^c N_p^c + L_{\bar{p}}^c N_{\bar{p}}^c$, $\tilde{M}_{pc} = Z^c L_{pc} N_{pc} \otimes N_{pc}$ 是对称正定矩阵.

因为作用于一点 p 的所有力的和为0,即

$$\sum_{c=1}^{c(p)} [L_{pc} P_c N_{pc} - \tilde{M}_{pc} (U_p - U_c)] = 0. \quad (45)$$

如果格点 p 在计算区域的内部,它的邻域网格为 $\Omega_c(t)$, $c = 1, \dots, c(p)$. 将条件(28)、(29)代入式(38),写出格点速度 U_p 满足的方程组:

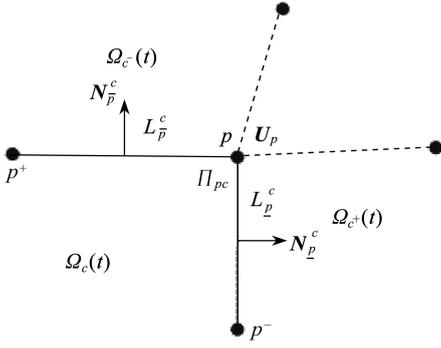


图7 网格 $\Omega_c(t)$ 格点 p 处定义一个格点
压力 Π_{pc} 的格点解的相关概念

Fig. 7 Notations of one pressure Π_{pc}
at point p of cell $\Omega_c(t)$

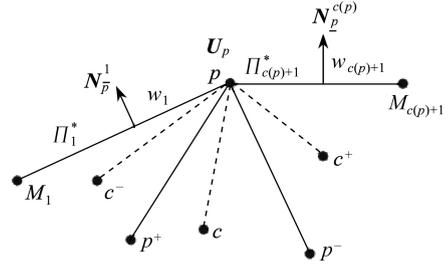


图8 边界条件的相关概念

Fig. 8 Notations for the boundary conditions

$$\sum_{c=1}^{c(p)} [L_{\bar{p}}^c a_c^2 (\tilde{\rho}_{\bar{p}}^c - \rho_c) N_{\bar{p}}^c + L_{\bar{p}}^c a_c^2 (\tilde{\rho}_{\bar{p}}^c - \rho_c) N_{\bar{p}}^c + d_{\bar{p}}^c D_{\bar{p}}^c a_c^2 (\tilde{\rho}_{\bar{p}}^c - \rho_c) + d_{\bar{p}}^c D_{\bar{p}}^c a_c^2 (\tilde{\rho}_{\bar{p}}^c - \rho_c)] + \sum_{c=1}^{c(p)} [L_{\bar{p}}^c P_c N_{\bar{p}}^c + L_{\bar{p}}^c P_c N_{\bar{p}}^c] = \mathbf{0}. \quad (46)$$

把式(45)代入方程(46),可得格点速度 U_p 满足的方程组:

$$\sum_{c=1}^{c(p)} [L_{\bar{p}}^c a_c^2 (\tilde{\rho}_{\bar{p}}^c - \rho_c) N_{\bar{p}}^c + L_{\bar{p}}^c a_c^2 (\tilde{\rho}_{\bar{p}}^c - \rho_c) N_{\bar{p}}^c + d_{\bar{p}}^c D_{\bar{p}}^c a_c^2 (\tilde{\rho}_{\bar{p}}^c - \rho_c) + d_{\bar{p}}^c D_{\bar{p}}^c a_c^2 (\tilde{\rho}_{\bar{p}}^c - \rho_c)] + \sum_{c=1}^{c(p)} [\tilde{M}_{pc} (U_p - U_c)] = \mathbf{0}. \quad (47)$$

设 $\tilde{M}_p = \sum_{c=1}^{c(p)} \tilde{M}_{pc}$, 格点速度 U_p 方程写成

$$\tilde{M}_p U_p = \sum_{c=1}^{c(p)} \tilde{M}_{pc} U_c - \sum_{c=1}^{c(p)} [L_{\bar{p}}^c a_c^2 (\tilde{\rho}_{\bar{p}}^c - \rho_c) N_{\bar{p}}^c + L_{\bar{p}}^c a_c^2 (\tilde{\rho}_{\bar{p}}^c - \rho_c) N_{\bar{p}}^c + d_{\bar{p}}^c D_{\bar{p}}^c a_c^2 (\tilde{\rho}_{\bar{p}}^c - \rho_c) + d_{\bar{p}}^c D_{\bar{p}}^c a_c^2 (\tilde{\rho}_{\bar{p}}^c - \rho_c)]. \quad (48)$$

设 (u_p^*, v_p^*) 是格点速度 U_p 的分量,写出 (u_p^*, v_p^*) 满足的方程组:

$$\begin{cases} \mathbf{A} u_p^* + \mathbf{C} v_p^* = S_X, \\ \mathbf{C} u_p^* + \mathbf{B} v_p^* = S_Y, \end{cases} \quad (49)$$

$$\mathbf{A} = \sum_{c=1}^{c(p)} Z^c (L_{\bar{p}}^c (N_{\bar{p},X}^c)^2 + L_{\bar{p}}^c (N_{\bar{p},X}^c)^2),$$

$$\mathbf{B} = \sum_{c=1}^{c(p)} Z^c (L_{\bar{p}}^c (N_{\bar{p},Y}^c)^2 + L_{\bar{p}}^c (N_{\bar{p},Y}^c)^2),$$

$$\mathbf{C} = \sum_{c=1}^{c(p)} Z^c (L_{\bar{p}}^c (N_{\bar{p},X}^c) (N_{\bar{p},Y}^c) + L_{\bar{p}}^c (N_{\bar{p},X}^c) (N_{\bar{p},Y}^c)).$$

(S_X, S_Y) 是 \check{S} 的分量:

$$\check{S} = \sum_{c=1}^{c(p)} \tilde{M}_{pc} U_c - \sum_{c=1}^{c(p)} [L_{\bar{p}}^c a_c^2 (\tilde{\rho}_{\bar{p}}^c - \rho_c) N_{\bar{p}}^c + L_{\bar{p}}^c a_c^2 (\tilde{\rho}_{\bar{p}}^c - \rho_c) N_{\bar{p}}^c + d_{\bar{p}}^c D_{\bar{p}}^c a_c^2 (\tilde{\rho}_{\bar{p}}^c - \rho_c) + d_{\bar{p}}^c D_{\bar{p}}^c a_c^2 (\tilde{\rho}_{\bar{p}}^c - \rho_c)].$$

方程组(49)的系数行列式是 $\Delta = \mathbf{A}\mathbf{B} - \mathbf{C}^2$. 我们证明它是正的,定义

$$\mathbf{W}_X = (\sqrt{Z^1 L_p^1} N_{p,X}^1, \sqrt{Z^1 L_p^1} N_{p,X}^1, \dots, \sqrt{Z^{c(p)} L_p^{c(p)}} N_{p,X}^{c(p)}, \sqrt{Z^{c(p)} L_p^{c(p)}} N_{p,X}^{c(p)}),$$

$$\mathbf{W}_Y = (\sqrt{Z^1 L_p^1} N_{p,Y}^1, \sqrt{Z^1 L_p^1} N_{p,Y}^1, \dots, \sqrt{Z^{c(p)} L_p^{c(p)}} N_{p,Y}^{c(p)}, \sqrt{Z^{c(p)} L_p^{c(p)}} N_{p,Y}^{c(p)}).$$

立即得到 $\mathbf{A} = \|\mathbf{W}_X\|^2, \mathbf{B} = \|\mathbf{W}_Y\|^2, \mathbf{C} = \langle \mathbf{W}_X, \mathbf{W}_Y \rangle$, 这里 $\langle \rangle$ 表示点积. 由 Cauchy-Schwarz 定理得 $\mathbf{AB} - \mathbf{C}^2 \geq 0, \mathbf{AB} - \mathbf{C}^2 = 0$ 需要且只需 \mathbf{W}_X 与 \mathbf{W}_Y 之一是 0 或是线性相关的, 这种情形不会发生除了所有从格点 p 发出的网格的边重合一条线. 方程组(49)的系数矩阵可逆, 方程组有唯一解 (u_p^*, v_p^*) .

2.5.2 如果格点 p 在计算区域的边界

在这一节, 我们实现边界条件. 我们必须考虑两类边界条件, 或是压力边界, 或是边界法向速度. 我们用和 2.5.1 节相同的符号, 如果格点 p 在计算区域的边界, 格点 p 邻域网格总数 $c(p)$, 那么格点 p 邻域网格 Ω_1 的边 $[M_1, p]$ 属于区域的边界, 格点 p 邻域网格 $\Omega_{c(p)}$ 的边 $[M_{c(p)+1}, p]$ 属于区域的边界. 设 N_p^1 和 $N_p^{c(p)}$ 分别是边 $[M_1, p]$ 和 $[M_{c(p)+1}, p]$ 的单位外法向, 设 L_p^1 和 $L_p^{c(p)}$ 分别是边 $[M_1, p]$ 和 $[M_{c(p)+1}, p]$ 的大小.

1) 压力边界

设 Π_1^* 和 $\Pi_{c(p)+1}^*$ 分别是边 $[M_1, p]$ 和 $[M_{c(p)+1}, p]$ 上设置的边界压力, 需要利用格点 p 的平衡条件

$$\sum_{c=1}^{c(p)} [L_{pc} P_c N_{pc} - \tilde{M}_{pc} (\mathbf{U}_p - \mathbf{U}_c)] = L_p^1 N_p^1 \Pi_1^* + L_p^{c(p)} N_p^{c(p)} \Pi_{c(p)+1}^*. \quad (50)$$

设 $\tilde{M}_p = \sum_{c=1}^{c(p)} \tilde{M}_{pc}$, 格点速度 \mathbf{U}_p 方程写成

$$\tilde{M}_p \mathbf{U}_p = \sum_{c=1}^{c(p)} \tilde{M}_{pc} \mathbf{U}_c + \sum_{c=1}^{c(p)} L_{pc} P_c N_{pc} - L_p^1 N_p^1 \Pi_1^* - L_p^{c(p)} N_p^{c(p)} \Pi_{c(p)+1}^*, \quad (51)$$

$$\begin{cases} \mathbf{A} u_p^* + \mathbf{C} v_p^* = \tilde{S}_X, \\ \mathbf{C} u_p^* + \mathbf{B} v_p^* = \tilde{S}_Y, \end{cases} \quad (52)$$

这里 $(\tilde{S}_X, \tilde{S}_Y)$ 是 \tilde{S} 的分量,

$$\tilde{S} = \sum_{c=1}^{c(p)} \tilde{M}_{pc} \mathbf{U}_c + \sum_{c=1}^{c(p)} [L_{pc} P_c N_{pc}] - L_p^1 N_p^1 \Pi_1^* - L_p^{c(p)} N_p^{c(p)} \Pi_{c(p)+1}^*.$$

方程组(52)系数矩阵行列式 $\Delta = \mathbf{AB} - \mathbf{C}^2 > 0$, 方程组(52)有唯一解 (u_p^*, v_p^*) .

2) 边界法向速度

设 w_1 和 $w_{c(p)+1}$ 分别是边 $[M_1, p]$ 和 $[M_{c(p)+1}, p]$ 边界法向速度, N_p^1 和 $N_p^{c(p)}$ 非线性相关, 格点速度 (u_p^*, v_p^*) 可以从下列线性方程组解出:

$$\begin{cases} N_p^1 X u_p^* + N_p^1 Y v_p^* = w_1, \\ N_p^{c(p)} X u_p^* + N_p^{c(p)} Y v_p^* = w_{c(p)+1}. \end{cases} \quad (53)$$

N_p^1 和 $N_p^{c(p)}$ 线性相关, 我们需要利用格点 p 的平衡条件:

$$\sum_{c=1}^{c(p)} [L_{pc} P_c N_{pc} - \tilde{M}_{pc} (\mathbf{U}_p - \mathbf{U}_c)] = [L_p^1 N_p^1 + L_p^{c(p)} N_p^{c(p)}] \Pi^*. \quad (54)$$

设 $\tilde{M}_p = \sum_{c=1}^{c(p)} \tilde{M}_{pc}$, 格点速度 \mathbf{U}_p 方程写成

$$\tilde{M}_p \mathbf{U}_p = \sum_{c=1}^{c(p)} \tilde{M}_{pc} \mathbf{U}_c + \sum_{c=1}^{c(p)} L_{pc} P_c N_{pc} - [L_p^1 N_p^1 + L_p^{c(p)} N_p^{c(p)}] \Pi^*, \quad (55)$$

这里 Π^* 是过格点 p 的边 $[M_1, p]$ 和 $[M_{c(p)+1}, p]$ 外侧平均压力

$$[L_{\underline{p}}^1 N_{\underline{p}}^1 + L_{\underline{p}}^{c(p)} N_{\underline{p}}^{c(p)}] \cdot \mathbf{U}_{\underline{p}} = L_{\underline{p}}^1 w_1 + L_{\underline{p}}^{c(p)} w_{c(p)+1}. \quad (56)$$

式(55)与(56)结合得到

$$\begin{cases} \mathbf{A}u_{\underline{p}}^* + \mathbf{C}v_{\underline{p}}^* + \mathbf{G}\mathbf{H}^* = \hat{S}_X, \\ \mathbf{C}u_{\underline{p}}^* + \mathbf{B}v_{\underline{p}}^* + \mathbf{H}\mathbf{H}^* = \hat{S}_Y, \\ \mathbf{G}u_{\underline{p}}^* + \mathbf{H}v_{\underline{p}}^* = L_{\underline{p}}^1 w_1 + L_{\underline{p}}^{c(p)} w_{c(p)+1}, \end{cases} \quad (57)$$

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 的值前面已经定义. 这里 (\hat{S}_X, \hat{S}_Y) 是 \hat{S} 的分量

$$\hat{S} = \sum_{c=1}^{c(p)} \tilde{\mathbf{M}}_{pc} \mathbf{U}_c + \sum_{c=1}^{c(p)} L_{pc} P_c N_{pc},$$

$G = L_{\underline{p}}^1 N_{\underline{p},X}^1 + L_{\underline{p}}^{c(p)} N_{\underline{p},X}^{c(p)}, H = L_{\underline{p}}^1 N_{\underline{p},Y}^1 + L_{\underline{p}}^{c(p)} N_{\underline{p},Y}^{c(p)}$. 线性方程组(57)系数矩阵行列式 $\Delta = -\mathbf{A}\mathbf{H}^2 + 2\mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{H} - \mathbf{B}\mathbf{G}^2$, 由于 $\mathbf{A}\mathbf{B} - \mathbf{C}^2 > 0, \Delta < 0$ 线性方程组(57)有唯一解 $(u_{\underline{p}}^*, v_{\underline{p}}^*)$. 所有格点的速度都可获得.

2.6 时间离散与网格运动

我们用格点通量把网格 $\Omega_c(t)$ 的面通量 $\mathbf{U}_f^c \cdot \mathbf{N}_f^c, \mathbf{H}_f^c \mathbf{N}_f^c, (\mathbf{H}\mathbf{U})_f^c \cdot \mathbf{N}_f^c$ 定义为

$$\begin{cases} \mathbf{U}_f^c \cdot \mathbf{N}_f^c = \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{\underline{p}} + \mathbf{U}_{\underline{p}^+}) \cdot \mathbf{N}_f^c, \\ L_f^c \mathbf{H}_f^c \mathbf{N}_f^c = \frac{1}{2} [(L_{\underline{p}}^c \tilde{\mathbf{H}}_{\underline{p}}^c \mathbf{N}_{\underline{p}}^c + L_{\underline{p}}^c \tilde{\mathbf{H}}_{\underline{p}}^c \mathbf{N}_{\underline{p}}^c + d_{\underline{p}}^c \mathbf{D}_{\underline{p}}^c \tilde{\mathbf{H}}_{\underline{p}}^c + d_{\underline{p}}^c \mathbf{D}_{\underline{p}}^c \tilde{\mathbf{H}}_{\underline{p}}^c) + \\ (L_{\underline{p}^+}^c \tilde{\mathbf{H}}_{\underline{p}^+}^c \mathbf{N}_{\underline{p}^+}^c + L_{\underline{p}^+}^c \tilde{\mathbf{H}}_{\underline{p}^+}^c \mathbf{N}_{\underline{p}^+}^c + d_{\underline{p}^+}^c \mathbf{D}_{\underline{p}^+}^c \tilde{\mathbf{H}}_{\underline{p}^+}^c + d_{\underline{p}^+}^c \mathbf{D}_{\underline{p}^+}^c \tilde{\mathbf{H}}_{\underline{p}^+}^c)], \\ L_f^c (\mathbf{H}\mathbf{U})_f^c \cdot \mathbf{N}_f^c = \frac{1}{2} [(L_{\underline{p}}^c \tilde{\mathbf{H}}_{\underline{p}}^c \mathbf{N}_{\underline{p}}^c + L_{\underline{p}}^c \tilde{\mathbf{H}}_{\underline{p}}^c \mathbf{N}_{\underline{p}}^c + d_{\underline{p}}^c \mathbf{D}_{\underline{p}}^c \tilde{\mathbf{H}}_{\underline{p}}^c + d_{\underline{p}}^c \mathbf{D}_{\underline{p}}^c \tilde{\mathbf{H}}_{\underline{p}}^c) \cdot \mathbf{U}_{\underline{p}} + \\ (L_{\underline{p}^+}^c \tilde{\mathbf{H}}_{\underline{p}^+}^c \mathbf{N}_{\underline{p}^+}^c + L_{\underline{p}^+}^c \tilde{\mathbf{H}}_{\underline{p}^+}^c \mathbf{N}_{\underline{p}^+}^c + d_{\underline{p}^+}^c \mathbf{D}_{\underline{p}^+}^c \tilde{\mathbf{H}}_{\underline{p}^+}^c + d_{\underline{p}^+}^c \mathbf{D}_{\underline{p}^+}^c \tilde{\mathbf{H}}_{\underline{p}^+}^c) \cdot \mathbf{U}_{\underline{p}^+}]. \end{cases}$$

这里 f 表示网格 $\Omega_c(t)$ 的面 $[p, p^+]$.

基本变量 $(\tau_c, \mathbf{U}_c, E_c)$ 格点通量半离散 Lagrange 中心型守恒格式(35)改写为

$$\begin{cases} m_c \frac{d}{dt} \tau_c = \sum_{f \in F(c)} \frac{1}{2} L_f^c (\mathbf{U}_{\underline{p}} + \mathbf{U}_{\underline{p}^+}) \cdot \mathbf{N}_f^c, \\ m_c \frac{d}{dt} \mathbf{U}_c + \sum_{f \in F(c)} \frac{1}{2} [(L_{\underline{p}}^c \tilde{\mathbf{H}}_{\underline{p}}^c \mathbf{N}_{\underline{p}}^c + L_{\underline{p}}^c \tilde{\mathbf{H}}_{\underline{p}}^c \mathbf{N}_{\underline{p}}^c + d_{\underline{p}}^c \mathbf{D}_{\underline{p}}^c \tilde{\mathbf{H}}_{\underline{p}}^c + d_{\underline{p}}^c \mathbf{D}_{\underline{p}}^c \tilde{\mathbf{H}}_{\underline{p}}^c) + \\ (L_{\underline{p}^+}^c \tilde{\mathbf{H}}_{\underline{p}^+}^c \mathbf{N}_{\underline{p}^+}^c + L_{\underline{p}^+}^c \tilde{\mathbf{H}}_{\underline{p}^+}^c \mathbf{N}_{\underline{p}^+}^c + d_{\underline{p}^+}^c \mathbf{D}_{\underline{p}^+}^c \tilde{\mathbf{H}}_{\underline{p}^+}^c + d_{\underline{p}^+}^c \mathbf{D}_{\underline{p}^+}^c \tilde{\mathbf{H}}_{\underline{p}^+}^c)] = \mathbf{0}, \\ m_c \frac{d}{dt} E_c + \sum_{f \in F(c)} \frac{1}{2} [(L_{\underline{p}}^c \tilde{\mathbf{H}}_{\underline{p}}^c \mathbf{N}_{\underline{p}}^c + L_{\underline{p}}^c \tilde{\mathbf{H}}_{\underline{p}}^c \mathbf{N}_{\underline{p}}^c + d_{\underline{p}}^c \mathbf{D}_{\underline{p}}^c \tilde{\mathbf{H}}_{\underline{p}}^c + d_{\underline{p}}^c \mathbf{D}_{\underline{p}}^c \tilde{\mathbf{H}}_{\underline{p}}^c) \cdot \mathbf{U}_{\underline{p}} + \\ (L_{\underline{p}^+}^c \tilde{\mathbf{H}}_{\underline{p}^+}^c \mathbf{N}_{\underline{p}^+}^c + L_{\underline{p}^+}^c \tilde{\mathbf{H}}_{\underline{p}^+}^c \mathbf{N}_{\underline{p}^+}^c + d_{\underline{p}^+}^c \mathbf{D}_{\underline{p}^+}^c \tilde{\mathbf{H}}_{\underline{p}^+}^c + d_{\underline{p}^+}^c \mathbf{D}_{\underline{p}^+}^c \tilde{\mathbf{H}}_{\underline{p}^+}^c) \cdot \mathbf{U}_{\underline{p}^+}] = 0. \end{cases} \quad (58)$$

面通量半离散拉氏中心型守恒格式(58)时间离散时,我们用向前 Euler 格式. 我们知道在时间 $t = t_n$ 基本物理变量为 $\mathbf{U}_{c,n}, E_{c,n}, \rho_{c,n}, a_{c,n}, P_{c,n}$, 几何特征为 $(X_{c,n}, Y_{c,n}), p = 1, \dots, p(c)$. 我们将计算时间 $t = t_{n+1}$ 的物理变量和几何特征. 设 $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, 解格点速度方程(49), 边界格点速度方程(52)、(53)、(57), 得到格点速度 (u_p^*, v_p^*) , 运动方程显式时间积分提供了任意时间 $t \in [t_n, t_{n+1}]$ 格点的位置:

$$\begin{cases} X_p(t) = X_{p,n} + (t - t_n) u_p^*, \\ Y_p(t) = Y_{p,n} + (t - t_n) v_p^*. \end{cases} \quad (59)$$

得到 t_{n+1} 格点的位置:

$$\begin{cases} X_{p,n+1} = X_{p,n} + \Delta t u_p^*, \\ Y_{p,n+1} = Y_{p,n} + \Delta t v_p^*. \end{cases} \quad (60)$$

我们导出 $L_{pp^+} N_{pp^+}(t) = [(Y_{p^+}(t) - Y_p(t)), -(X_{p^+}(t) - X_p(t))]^T$ 是时间线性的,使得

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (L_{pp^+} N_{pp^+})(t) dt = \frac{\Delta t}{2} [(L_{pp^+} N_{pp^+})_n + (L_{pp^+} N_{pp^+})_{n+1}].$$

这结果能写出与网格运动一致的体积方程的离散格式.

$$m_c(\tau_{c,n+1} - \tau_{c,n}) - \frac{\Delta t}{4} \sum_{f \in F(c)} [(L_f^c N_f^c)_n + (L_f^c N_f^c)_{n+1}] (\mathbf{U}_p + \mathbf{U}_{p^+}) = 0. \quad (61)$$

为了动量和总能量精确守恒,动量和总能量方程的离散是完全显式的,

$$\begin{aligned} m_c(\mathbf{U}_{c,n+1} - \mathbf{U}_{c,n}) + \Delta t \sum_{f \in F(c)} \frac{1}{2} [& (L_{\underline{p}}^c \tilde{\Pi}_{\underline{p}}^c N_{\underline{p}}^c + L_{\underline{p}^+}^c \tilde{\Pi}_{\underline{p}^+}^c N_{\underline{p}^+}^c + d_{\underline{p}}^c \mathbf{D}_{\underline{p}}^c \tilde{\Pi}_{\underline{p}}^c + d_{\underline{p}^+}^c \mathbf{D}_{\underline{p}^+}^c \tilde{\Pi}_{\underline{p}^+}^c) + \\ & (L_{\underline{p}^+}^c \tilde{\Pi}_{\underline{p}^+}^c N_{\underline{p}^+}^c + L_{\underline{p}}^c \tilde{\Pi}_{\underline{p}}^c N_{\underline{p}}^c + d_{\underline{p}^+}^c \mathbf{D}_{\underline{p}^+}^c \tilde{\Pi}_{\underline{p}^+}^c + d_{\underline{p}}^c \mathbf{D}_{\underline{p}}^c \tilde{\Pi}_{\underline{p}}^c)] = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} m_c(E_{c,n+1} - E_{c,n}) + \Delta t \sum_{f \in F(c)} \frac{1}{2} [& (L_{\underline{p}}^c \tilde{\Pi}_{\underline{p}}^c N_{\underline{p}}^c + L_{\underline{p}^+}^c \tilde{\Pi}_{\underline{p}^+}^c N_{\underline{p}^+}^c + d_{\underline{p}}^c \mathbf{D}_{\underline{p}}^c \tilde{\Pi}_{\underline{p}}^c + d_{\underline{p}^+}^c \mathbf{D}_{\underline{p}^+}^c \tilde{\Pi}_{\underline{p}^+}^c) \cdot \\ & \mathbf{U}_p + (L_{\underline{p}^+}^c \tilde{\Pi}_{\underline{p}^+}^c N_{\underline{p}^+}^c + L_{\underline{p}}^c \tilde{\Pi}_{\underline{p}}^c N_{\underline{p}}^c + d_{\underline{p}^+}^c \mathbf{D}_{\underline{p}^+}^c \tilde{\Pi}_{\underline{p}^+}^c + d_{\underline{p}}^c \mathbf{D}_{\underline{p}}^c \tilde{\Pi}_{\underline{p}}^c) \cdot \mathbf{U}_{p^+}] = 0, \end{aligned} \quad (63)$$

计算时间步长 Δt , 在时间 t_n , $\lambda_{c,n}$ 表示网格 $\Omega_c(t)$ 的两个格点之间距离的最小值,

$$\Delta t = \min_{c=1, \dots, I} \frac{\lambda_{c,n}}{\tilde{a}_{c,n}}, \quad (64)$$

这里 $\tilde{a}_{c,n}$ 是网格 $\Omega_c(t)$ 的所有子网格声速的最大值.

2.7 算法描述

第1步, 设置初始量

我们知道每一网格 $\Omega_c(t)$, $c = 1, \dots, I$ (I 为计算区域总网格数) 的初始密度 ρ_c^0 , 格点坐标 (X_p^0, Y_p^0) , $p = 1, \dots, p(c)$ 并储存. 用网格 $\Omega_c(t)$ 的初始密度 ρ_c^0 及格点坐标 (X_p^0, Y_p^0) , $p = 1, \dots, p(c)$ 计算每一三角形子网格质量 $\tilde{m}_{\underline{p}}^c, \tilde{m}_{\underline{p}^+}^c, \tilde{m}_{\underline{p}^+}^c, \tilde{m}_{\underline{p}^+}^c, \tilde{m}_{\underline{p}^+}^c, \tilde{m}_{\underline{p}^+}^c, \tilde{m}_{\underline{p}^+}^c$ 和 $\tilde{m}_{\underline{p}^+}^c$. 在时间 $t = t_n$, 基本物理变量 $\mathbf{U}_{c,n}, E_{c,n}, \rho_{c,n}, a_{c,n}, P_{c,n}$, 格点坐标 $X_{p,n}, Y_{p,n}$ ($p = 1, \dots, p(c)$), 由此计算三角形子网格的体积 $(\tilde{V}_{\underline{p}}^c)_n, (\tilde{V}_{\underline{p}^+}^c)_n, (\tilde{V}_{\underline{p}^+}^c)_n, (\tilde{V}_{\underline{p}^+}^c)_n, (\tilde{V}_{\underline{p}^+}^c)_n, (\tilde{V}_{\underline{p}^+}^c)_n$ 和 $(\tilde{V}_{\underline{p}^+}^c)_n$, 和密度 $(\tilde{\rho}_{\underline{p}}^c)_n, (\tilde{\rho}_{\underline{p}^+}^c)_n, (\tilde{\rho}_{\underline{p}^+}^c)_n, (\tilde{\rho}_{\underline{p}^+}^c)_n, (\tilde{\rho}_{\underline{p}^+}^c)_n$ 和 $(\tilde{\rho}_{\underline{p}^+}^c)_n$. 用压力 $P_{c,n}$ 和三角形子网格密度 $(\tilde{\rho}_{\underline{p}}^c)_n, (\tilde{\rho}_{\underline{p}^+}^c)_n, (\tilde{\rho}_{\underline{p}^+}^c)_n, (\tilde{\rho}_{\underline{p}^+}^c)_n, (\tilde{\rho}_{\underline{p}^+}^c)_n$ 和 $(\tilde{\rho}_{\underline{p}^+}^c)_n$, 求出所有三角形子网格的声速 $(\tilde{a}_{\underline{p}}^c)_n, (\tilde{a}_{\underline{p}^+}^c)_n, (\tilde{a}_{\underline{p}^+}^c)_n, (\tilde{a}_{\underline{p}^+}^c)_n, (\tilde{a}_{\underline{p}^+}^c)_n$ 和 $(\tilde{a}_{\underline{p}^+}^c)_n$. 用式(28)、(29) 求出三角子网格压力 $(\tilde{\Pi}_{\underline{p}}^c)_n$ 和 $(\tilde{\Pi}_{\underline{p}^+}^c)_n$ 和子网格力 $(\tilde{\mathbf{F}}_{pc})_n$.

第2步, 解格点速度

解格点速度方程(49), 边界格点速度方程(52)、(53)、(57) 得到格点速度 $(u_p^*, v_p^*)_n$.

第3步, 计算时间步长

由式(64) 解出时间步长 Δt .

第4步, 新时刻几何量

根据格点速度 (u_p^*, v_p^*) , 解格点位置方程(60), 我们得新时刻的格点坐标 $(X_{p,n+1}, Y_{p,n+1})$ 新时刻的几何量 $L_{pp^+,n+1}, N_{pp^+,n+1}$.

第5步, 新时刻物理量

根据格点速度 (u_p^*, v_p^*) , 由解离散 Lagrange 中心型守恒格式(61)、(62)、(63), 得新时刻的物理量, $\tau_{c,n+1}, \mathbf{U}_{c,n+1}, E_{c,n+1}$.

第 6 步, 状态方程

由 $\varepsilon_{c,n+1} = E_{c,n+1} - \|U_{c,n+1}\|^2/2$ 计算内能, 然后由状态方程计算压力 $P_{c,n+1}$ 和声速 $a_{c,n+1}$.

3 数值结果

例 1 Saltzman 活塞问题

计算区域 $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 0.1]$, 生成四边形网格: 初始网格是由映射

$$\begin{cases} X_{\text{str}} = x + (0.1 - y) \sin(x\pi), \\ Y_{\text{str}} = y \end{cases}$$

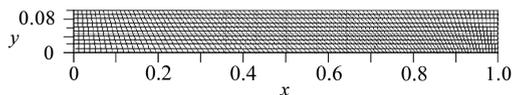


图 9 初始网格

Fig. 9 Initial grid

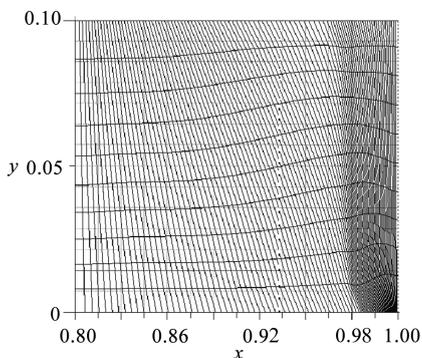


图 10 Maire 流体格式, 时间 $t = 0.8$ 时的网格

Fig. 10 Maire et al. scheme, the cell at time $t = 0.8$

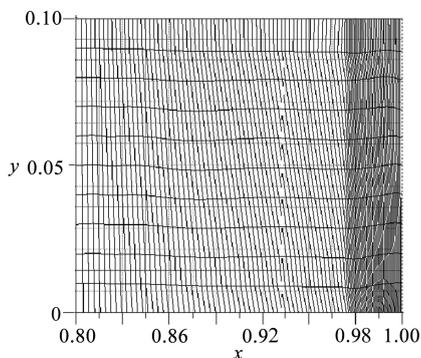


图 11 Lagrange 中心型守恒格式, 时间 $t = 0.8$ 时的网格

Fig. 11 Lagrangian cell-centered conservative scheme, the cell at time $t = 0.8$

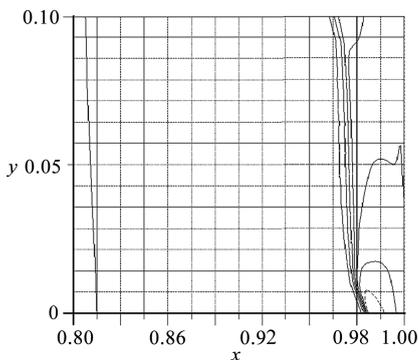


图 12 Maire 流体格式, 时间 $t = 0.8$ 时的密度等值线

Fig. 12 Maire et al. scheme, a contour plot of the density at time $t = 0.8$

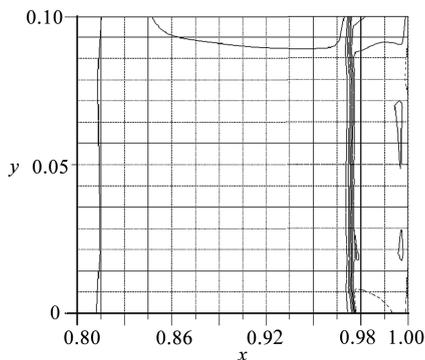


图 13 Lagrange 中心型守恒格式, 时间 $t = 0.8$ 时的密度等值线

Fig. 13 Lagrangian cell-centered conservative scheme, a contour plot of the density at time $t = 0.8$

变换均匀网格 100×10 而成. 初始状态 $(\rho_c^0, P_c^0, U_c^0) = (1, 0, 0)$ 采用理想气体状态方程, 气体绝

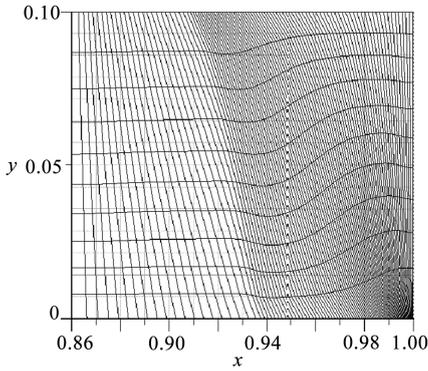


图 14 Maire 流体格式, 时间
 $t = 0.86$ 时的网格

Fig. 14 Maire et al. scheme, the cell
at time $t = 0.86$

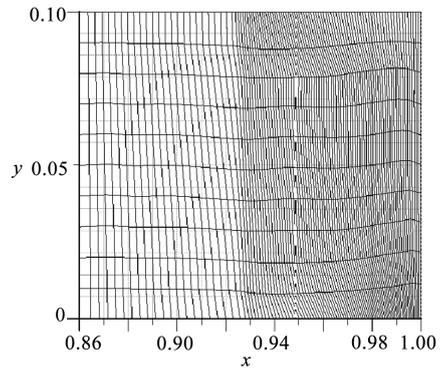


图 15 Lagrange 中心型守恒格式, 时间
 $t = 0.86$ 时的网格

Fig. 15 Lagrangian cell-centered conservative
scheme, the cell at time $t = 0.86$

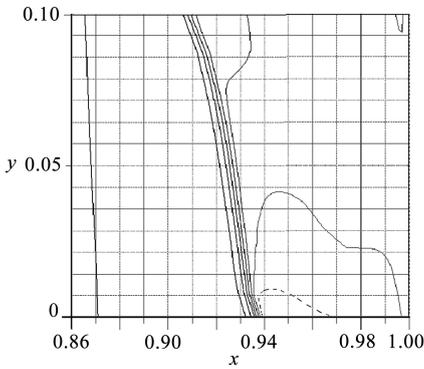


图 16 Maire 流体格式, 时间 $t = 0.86$
时的密度等值线

Fig. 16 Maire et al. scheme, a contour plot of
the density at time $t = 0.86$

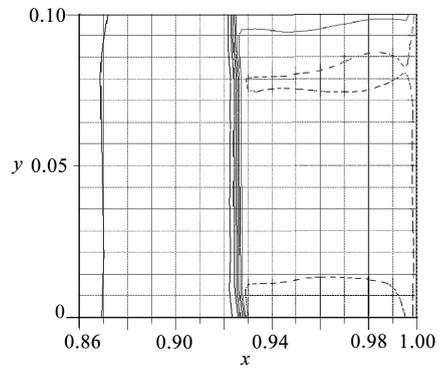


图 17 Lagrange 中心型守恒格式, 时间
 $t = 0.86$ 时的密度等值线

Fig. 17 Lagrangian cell-centered conservative
scheme, a contour plot of the
density at time $t = 0.86$

热指数 $\gamma = 5/3$, 边界 $x = 0$ 的法向速度 $U_p^* = 1$ (入流条件), 对称轴和外径, 区域右侧为反射边界, 运行时间 $t = 0.93$; 精确解 $t = 0.8$ 时激波在右侧反射后双激波区与单激波区交界位置 0.967; 精确解 $t = 0.86$ 时激波在右侧反射后双激波区与单激波区交界位置 0.927; 精确解 $t = 0.93$ 时激波经两次反射后产生三激波区, 三激波区与双激波区交界位置 0.96, 单激波区密度 $\rho = 4$, 双激波区密度 $\rho = 10$, 三激波区密度 $\rho = 20$. 图 9 为初始网格, 图 10 和图 11 显示 Maire 流体格式与 Lagrange 中心型守恒格式在时间 $t = 0.8$ 时的网格比较; 图 12 和图 13 显示 Maire 流体格式与 Lagrange 中心型守恒格式在时间 $t = 0.8$ 时的密度等值线比较; 图 14 和图 15 显示 Maire 流体格式与 Lagrange 中心型守恒格式在时间 $t = 0.86$ 时的网格比较; 图 16 和图 17 显示 Maire 流体格式与 Lagrange 中心型守恒格式在时间 $t = 0.86$ 时的密度等值线比较; 图 18 和图 19 显示 Maire 流体格式与 Lagrange 中心型守恒格式在时间 $t = 0.93$ 时的网格比较; 图 20 和图 21 显示 Maire 流体格式与 Lagrange 中心型守恒格式在时间 $t = 0.93$ 时的密度等值线比较. 这是一维问题, 所有的网格变形都是虚假的, 结果比较的主要点在于 Lagrange 中心型守恒格式保持一维解非常好, 抑制砂漏变形, 消除虚假涡旋, Lagrange 中心型守恒格式计算的结果非常接

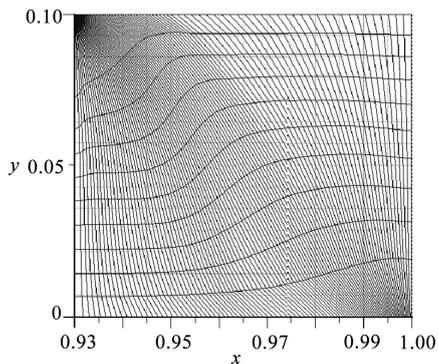


图 18 Maire 流体格式, 时间 $t = 0.93$ 时的网格

Fig. 18 Maire et al. scheme, the cell at time $t = 0.93$

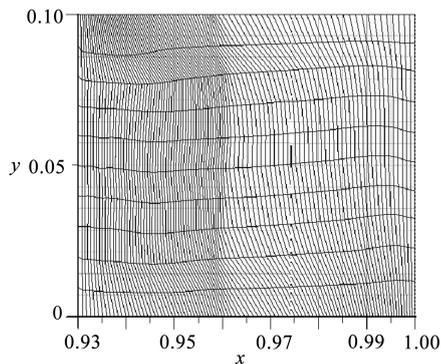


图 19 Lagrange 中心型守恒格式, 时间 $t = 0.93$ 时的网格

Fig. 19 Lagrangian cell-centered conservative scheme, the cell at time $t = 0.93$

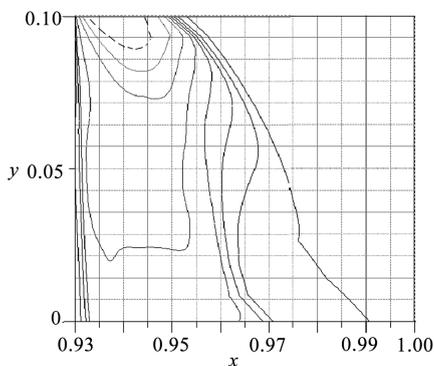


图 20 Maire 流体格式, 时间 $t = 0.93$ 时的密度等值线

Fig. 20 Maire et al. scheme, a contour plot of the density at time $t = 0.93$

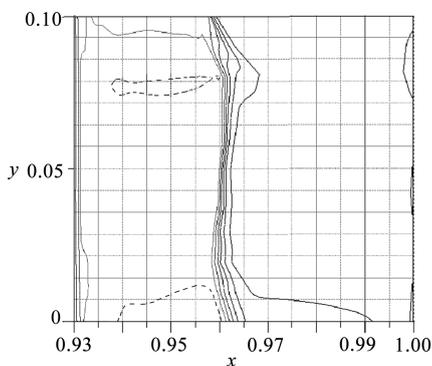


图 21 Lagrange 中心型守恒格式, 时间 $t = 0.93$ 时的密度等值线

Fig. 21 Lagrangian cell-centered conservative scheme, a contour plot of the density at time $t = 0.93$

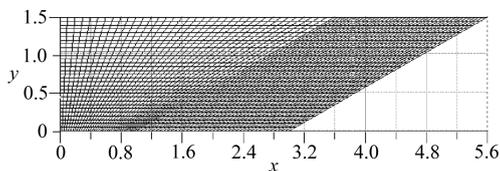


图 22 初始网格

Fig. 22 Initial grid

近于精确解. 计算的结果清楚显示 Lagrange 中心型守恒格式的精确性. 而 Maire 流体格式计算的结果没有消除虚假涡旋, 激波波阵面越来越倾斜, Maire 流体格式计算出这种错误结果的原因是 Maire 格式动量不守恒.

例 2 激波折射问题

初始网格是由两个相连区域, 一区 36×30 网格, 左边界垂直右边界以 60° 倾斜且是界面, 二区 40×30 网格, 且是以 60° 倾斜的均匀网格, 上、下边界和区域右侧边界为反射边界条件, 左边界是活塞以 1.48 个单位速度向右运动. 两区采用理想气体状态方程, 气体绝热指数 $\gamma =$

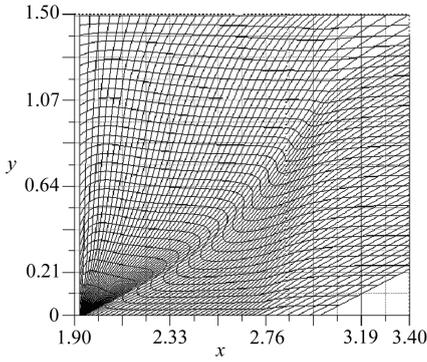


图 23 Maire 流体格式, 时间 $t = 1.3$ 时的网格

Fig. 23 Maire et al. scheme, the cell at time $t = 1.3$

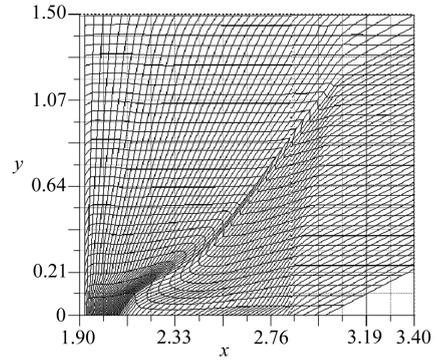


图 24 Lagrange 中心型守恒格式, 时间 $t = 1.3$ 时的网格

Fig. 24 Lagrangian cell-centered conservative scheme, the cell at time $t = 1.3$

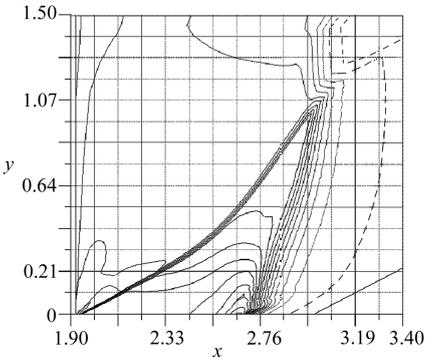


图 25 Maire 流体格式, 时间 $t = 1.3$ 时的密度等值线

Fig. 25 Maire et al. scheme, a contour plot of the density at time $t = 1.3$

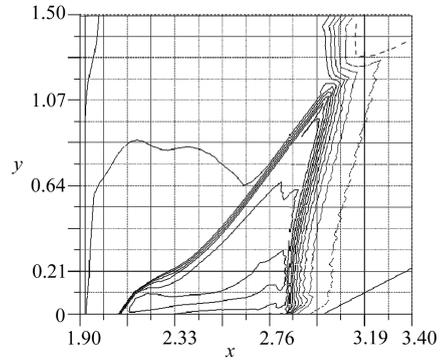


图 26 Lagrange 中心型守恒格式, 时间 $t = 1.3$ 时的密度等值线

Fig. 26 Lagrangian cell-centered conservative scheme, a contour plot of the density at time $t = 1.3$

1.4, 二区与一区密度比 1.5. 运行时间 $t = 1.3$. 图 22 显示初始网格; 图 23 和图 24 显示 Maire 流体格式与 Lagrange 中心型守恒格式在时间 $t = 1.3$ 时的网格比较; 图 25 和图 26 显示 Maire 流体格式与 Lagrange 中心型守恒格式在时间 $t = 1.3$ 时的密度等值线比较; 这个问题的重要性在于虚假网格变形与物理涡旋同时出现. 图 23 显示的网格接近于下边界和活塞处虚假变形比较大; 图 24 显示的网格没有虚假变形; 图 25 显示的密度等值线没有出现物理涡旋; 图 26 显示的密度等值线出现物理涡旋. 这些结果不能说明两种方法哪个是精确的, 但是, 就网格的质量和计算物理涡旋的精确性来说, Lagrange 中心型守恒格式计算的结果比 Maire 流体格式计算的结果好很多.

4 结 论

我们已经实现了 Lagrange 中心型守恒格式. 这个格式基于真正二维的格点解子, 格式的主要特征是网格分片常数压力的引入. 用网格分片常数压力, 我们构造了满足动量守恒、总能量守恒的 Lagrange 中心型守恒格式, 格点速度以与网格面的数值通量相容的方式计算. 对 Saltz-

man 活塞问题进行了数值模拟,数值结果显示 Lagrange 中心型守恒格式的有效性和精确性。下一步,我们将发展高阶 Lagrange 中心型守恒格式。

参考文献(References):

- [1] Maire P H, Abgrall R, Breil J, Ovadia J. A cell-centered Lagrangian scheme for compressible flow problems[J]. *SIAM J Scien Comp*, 2007, **29**(4): 1781-1824.
- [2] von Neumann J, Richtmyer R D. A method for the numerical calculations of hydrodynamic shocks[J]. *J Appl Phys*, 1950, **21**, 232-238.
- [3] Wilkins M L. Calculation of elastic plastic flow[C]//Blder B, Fernbach S. *Methods in Computational Physics*. 3. New York: Academic, 1964.
- [4] Caramana E J, Shashkov M J. Elimination of artificial grid distortion and hourglass-type motions by means of Lagrangian subzonal masses and pressures[J]. *J Comput Phys*, 1998, **142**(2): 521-561.
- [5] Caramana E J, Shashkov M J, Whalen P P. Formulations of artificial viscosity for multidimensional shock wave computations[J]. *J Comput Phys*, 1998, **144**(1): 70-97.
- [6] Campbell J C, Shashov J C. A tensor artificial viscosity using a mimetic finite difference algorithm[J]. *J Comput Phys*, 2001, **172**(4): 739-765.
- [7] Caramana E J, Burton D E, Shashov M J, Whalen P P. The construction of compatible hydrodynamics algorithms utilizing conservation of total energy[J]. *J Comput Phys*, 1998, **146**(1): 227-262.
- [8] Campbell J C, Shashov M J. A compatible Lagrangian hydrodynamics algorithm for unstructured grids[J]. *Selçuk J Appl Math*, 2003, **4**(2): 53-70.
- [9] Scovazzi G, Christon M A, Hughes T J R, Shadid J N. Stabilized shock hydrodynamics— I : a Lagrangian method[J]. *Comput Methods Appl Mech and Engrg*, 2007, **196**(4): 923-966.
- [10] Scovazzi G. Stabilized shock hydrodynamics II : design and physical interpretation of the SUPG operator for Lagrangian computations[J]. *Comput Methods Appl Mech and Engrg*, 2007, **196**(4/6): 966-978.
- [11] Scovazzi G, Love E, Shashkov M J. Multi-scale Lagrangian shock hydrodynamics on Q1/P0 finite elements: theoretical framework and two-dimensional computations[J]. *Comput Methods Appl Mech and Engrg*, 2008, **197**(9/12): 1056-1079.
- [12] Godunov S K, Zabrodine A, Ivanov M, Kraiko A, Prokopov G. *Résolution Numérique des Problèmes Multidimensionnels de la Dynamique des Gaz*[M]. Mir, 1979.
- [13] Adessio F L, Carroll D E, Dukowicz K K, Johnson J N, Kashiwa B A, Maltrud M E, Ruppel H M. Caveat: a computer code for fluid dynamics problems with large distortion and internal slip[R]. Technical Report LA-10613-MS, Los Alamos National Laboratory, 1986.
- [14] Dukowicz J K, Meltz B. Vorticity errors in multidimensional Lagrangian codes[J]. *J Comput Phys*, 1992, **99**(1): 115-134.
- [15] Després B, Mazeran C. Lagrangian gas dynamics in two dimensions and Lagrangian systems [J]. *Arch Rational Mech Anal*, 2005, **178**(3): 327-372.
- [16] Carré G, Delpino S, Després B, Labourasse E. A cell-centered Lagrangian hydrodynamics scheme in arbitrary dimension[J]. *J Comput Phys*, 2009, **228**(14): 5160-5183.

Lagrangian Cell-Centered Conservative Scheme

GE Quan-wen

*(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics,
Beijing 100094, P. R. China)*

Abstract: A Lagrangian cell-centered conservative gas dynamics scheme was presented. It introduced the piecewise constant pressures of cell, which arose from the current time sub cell densities and the current time isentropic speed of sound of cell. The sub cell Lagrangian masses which the initial cell density multiplied by the initial sub cell volumes, divided by the current time sub cell volumes, the current time sub cell densities were obtained. Using the current time piecewise constant pressures of cell, the scheme which conserved momentum, total energy was constructed. The vertex velocities and the numerical fluxes through the cell interfaces were computed in a consistent manner due to an original solver located at the nodes. Many numerical tests were presented. They are representative test cases for compressible flows and demonstrate the robustness and the accuracy of Lagrangian cell-centered conservative scheme.

Key words: sub-cell force; Lagrange cell-centered scheme; Lagrangian cell-centered conservative gas dynamics scheme; piecewise constant pressure of cell