

Casson 流体作磁流体动力学流动时的 Soret 和 Dufour 效应*

T·哈亚特^{1,2}, S·A·谢赫扎德¹, A·阿尔舍德²

(1. 真纳大学 数学系,45320,伊斯兰堡 44000,巴基斯坦;
2. 阿卜杜勒阿齐兹国王大学 理学院 数学系,吉达 21589,沙特阿拉伯)

摘要: 考虑 Soret 和 Dufour 效应,对 Casson 流体在可伸缩表面上,作磁流体动力学流动时的影响. 首先导出相关的方程,然后用同伦法构造级数解. 给出并讨论了速度、温度和浓度的场结果;在不同的物理参数下,得到并分析了表面摩擦因数、Nusselt 数和 Sherwood 数的值;并验证了级数解的收敛性.

关键词: Soret 和 Dufour 效应; 磁流体动力学(MHD)流动; Casson 流体; 传热传质

中图分类号: O373 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.10.007

引 言

对伸缩表面引起的非 Newton 流体的流动分析,是某些制造业工艺的重要任务,可以列举如下数例,例如塑料板材生产过程中,熔化了了的聚合物从狭缝中的挤出,食品原料的加工,纸张的生产,金属丝和纤维的涂层,等等. 最终产品的质量,很大程度上依赖于传热过程中的冷却速度. 冷却速度在 MHD 中可以作为一个重要参数加以控制,从而使产品可以达到预期的质量. Crane^[1] 首先就粘性流体由伸缩表面产生的二维稳定的不可压缩边界层流动,得到了闭合形式的解. 不同研究者发表的一系列论文,已将该流动问题推广到不同方面的物理领域. 已有大量有关伸缩流动的文献,这里我们仅列举最新的、有代表性的研究. 例如, Hassani 等^[2] 研究纳米流体流过可伸缩表面时边界层流动的解析解. Kazem 等^[3] 研究了粘性流体流过多孔可伸缩表面时的驻点流. Hayat 等^[4] 在一个多孔空间中,分析讨论了滑动对可伸缩表面上二阶流体流动的影响. Rahman^[5] 研究了粘性流体在线性可伸缩平面上的 Hiemenz 流动,他们分析了 Soret 和 Dufour 效应对传热传质特征的影响. Yao 等^[6] 分析讨论了带可伸缩边界的 Falkner-Skan 方程. Fang 等^[7] 研究并讨论了可伸缩表面上不稳定的边界层流动. Yao 等^[8] 分析了传送表面边界条件对粘性流体边界层流动的影响. Hayat 等^[9] 就有化学反应存在时,分析了有传热传质的 Maxwell 流体的流动. 有些作者作了别的尝试, Hayat 等^[10] 分析了辐射对可伸缩表面诱导的磁流体动力学流动的影响. Ahmad 和 Asghar^[11] 分析了表面以任意速度伸缩时,二阶流体的边界层流

* 收稿日期: 2011-10-27; 修订日期: 2012-04-06

作者简介: T. Hayat, 教授(联系人. Tel: +92-51-90642172; E-mail: pensy_t@yahoo.com).

本文原文为英文,吴承平译,张禄坤校.

动. Muhaimina 等^[12]在有抽吸作用存在时,讨论了粘性流体在多孔收缩平面上的边界层流动.

在上述有关边界层流动研究的基础上,我们进一步考虑二维 Casson 流体的流动,同时计及 Soret 和 Dufour 的影响,流体是可以导电的,流动是由于表面的可伸缩性诱导产生. Soret 效应(热扩散)是由于温度梯度的扩散通量所产生,而 Dufour 效应是化学势梯度引起的热通量所产生. 这些影响的研究,在地球科学和化学工程领域相当有价值. 这样的热扩散效应可以用于同位素的分离,分子量很小的气体(如 H_2 , He)与分子量中等的气体(N_2 , 空气)的混合. 此外,工程问题中的一些应用还伴随着传质传热. 列举数个具体应用:排出包含在绝缘纤维和封闭储存粮食中的潮湿空气,化学污染物向土壤中的渗透和血管中药物的扩散^[13]. 尚需注意,大多数有关血液的实验表明,血液可以看作 Casson 流体^[14-15]. 出于上述考虑,本文安排如下:第 1 节给出问题所需要的公式;第 2 节和第 3 节用同伦分析法,进一步给出了问题的解,以及相关的收敛性分析^[16]. Liao^[17]还对强非线性计算问题,提出了最优的同伦分析方法. 文献[18-26]将同伦分析法用于感兴趣问题的研究. 第 4 节中给出了本文的图形结果. 第 5 节给出了本文的主要结论.

1 数学模型

考虑不可压缩的 Casson 流体,在受热可伸缩平面上($y=0$),作稳定的磁流体动力学流动,该可伸缩平面是弹性的. 取 x 轴平行于该平面, y 轴垂直于该平面. 由于平面的可伸缩性,引起不可压缩流体的流动. 考虑到可伸缩平面的弹性特性,在固定的原点出现一对平行于 x 轴的、大小相等方向相反的力(参见文献[27-28]). 一个恒定的磁场 B_0 , 横向作用于可伸缩平面. 由于磁 Reynolds 数很小,感应磁场可以忽略不计. 还考虑了传热传质过程中的 Soret 和 Dufour 效应. Casson 流体作各向同性、不可压缩流动时的流变状态方程为

$$\tau_{ij} = \begin{cases} 2\left(\mu_B + \frac{p_y}{\sqrt{2\pi}}\right) e_{ij}, & \pi > \pi_{cr}, \\ 2\left(\mu_B + \frac{p_y}{\sqrt{2\pi}}\right) e_{ij}, & \pi < \pi_{cr}, \end{cases} \quad (1)$$

在方程(1)中, $\pi = e_{ij}e_{ij}$, e_{ij} 表示 (i, j) 变形率分量, π 表示变形率分量的自乘量, π_{cr} 表示变形率分量自乘量基于非 Newton 模型时的临界值, μ_B 表示非 Newton 流体的塑性动力学粘度, p_y 表示流体的屈服应力. 由此产生的 MHD 流动的边界层方程如下:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} u, \quad (3)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_m \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{D_e k_T}{C_s c_p} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}, \quad (4)$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D_e \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{D_e k_T}{T_m} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (5)$$

其中, u, v 分别表示 x, y 方向的速度分量, $\beta = \mu_B \sqrt{2\pi_{cr}} / p_y$ 为 Casson 参数, T 为流体的温度, C 为浓度场, ν 为运动学粘度, ρ 为流体的密度, D_e 为质量扩散系数, α_m 为导热系数, k_T 为热扩散率, c_p 为比定压热容, C_s 为浓度的灵敏度, T_m 为流体的平均温度, σ 为流体的电导率.

上述分析的边界条件为

$$u = u_w(x) = cx, v = 0, T = T_w(x) = T_\infty + ax, C = C_w(x) = C_\infty + bx, \quad \text{当 } y = 0, \quad (6)$$

$$u \rightarrow 0, T \rightarrow T_\infty, C \rightarrow C_\infty, \quad \text{当 } y \rightarrow \infty, \quad (7)$$

其中, c, a, b 均为正的常数, 且有(时间) $^{-1}$ 的量纲. 对于伸缩流动, $c > 0$; T_w 和 C_w 分别为可变的温度和浓度; 而 T_∞ 为均匀的环境温度, C_∞ 为均匀的环境浓度.

应用如下变换:

$$\begin{cases} \eta = y\sqrt{\frac{c}{\nu}}, u = cx f'(\eta), v = -\sqrt{c\nu} f(\eta), \\ \theta(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \phi(\eta) = \frac{C - C_\infty}{C_w - C_\infty}, \end{cases} \quad (8)$$

连续性方程(1)恒满足, 而其余方程变为

$$(1 + 1/\beta)f''' + ff'' - f'^2 - Ha^2 f' = 0, \quad (9)$$

$$\frac{1}{Pr}\theta'' + f\theta' - f'\theta + Df\phi'' = 0, \quad (10)$$

$$\phi'' + PrLe f\phi' - PrLe f'\phi + SrLe\theta'' = 0, \quad (11)$$

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f'(\infty) = 0, \quad (12)$$

$$\theta(0) = 1, \theta(\infty) = 0, \quad (13)$$

$$\phi(0) = 1, \phi(\infty) = 0. \quad (14)$$

在这些表达式中, “'”表示对 η 的导数, $Ha^2 = \sigma B_0^2 / (\rho c)$ 表示 Hartman 数, $Pr = \nu / \alpha_m$ 为 Prandtl 数, $Le = \alpha_m / D_e$ 为 Lewis 数, Df 为 Dufour 数, Sr 为 Soret 数; Df 和 Sr 分别定义如下:

$$Df = \frac{D_e k_T}{C_s c_p} \frac{C_w - C_\infty}{(T_w - T_\infty)\nu}, Sr = \frac{D_e k_T}{T_m \alpha_m} \frac{(T_w - T_\infty)}{(C_w - C_\infty)}. \quad (15)$$

局部表面摩擦因数、局部 Nusselt 数和局部 Sherwood 数的无量纲表达式分别为

$$Re_x^{1/2} Cf = (1 + 1/\beta)f''(0), \quad (16)$$

$$Nu(Re_x)^{-1/2} = -\theta'(0), \quad (17)$$

$$Sh(Re_x)^{-1/2} = -\phi'(0), \quad (18)$$

其中 $Re_x = u_w(x)x/\nu$ 为局部 Reynolds 数.

2 级数解

为了得到所需要的解, 采用如下初始猜测和辅助的线性算子:

$$f_0(\eta) = (1 - \exp(-\eta)), \theta_0(\eta) = \exp(-\eta), \phi_0(\eta) = \exp(-\eta), \quad (19)$$

$$\mathcal{L}_f = \frac{d^3 f}{d\eta^3} - \frac{df}{d\eta}, \mathcal{L}_\theta = \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} - \theta, \mathcal{L}_\phi = \frac{d^2 \phi}{d\eta^2} - \phi, \quad (20)$$

$$\mathcal{L}_f [C_1 + C_2 \exp(\eta) + C_3 \exp(-\eta)] = 0, \quad (21)$$

$$\mathcal{L}_\theta [C_4 \exp(\eta) + C_5 \exp(-\eta)] = 0, \mathcal{L}_\phi [C_6 \exp(\eta) + C_7 \exp(-\eta)] = 0, \quad (22)$$

其中 $C_i (i = 1, \dots, 7)$ 为任意常数.

2.1 0 阶变形问题

有如下形式的非线性算子 \mathcal{N}_f , \mathcal{N}_θ 和 \mathcal{N}_ϕ :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_f[\hat{f}(\eta, p)] &= \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\partial^3 \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta^3} + \hat{f}(\eta, p) \frac{\partial^2 \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta^2} - \\ &\quad \left(\frac{\partial \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta}\right)^2 - Ha^2 \frac{\partial \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\theta[\hat{f}(\eta, p), \hat{\theta}(\eta, p), \hat{\phi}(\eta, p)] &= \\ \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \hat{\theta}(\eta, p)}{\partial \eta^2} + \hat{f}(\eta, p) \frac{\partial \hat{\theta}(\eta, p)}{\partial \eta} - \\ \hat{\theta}(\eta, p) \frac{\partial \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta} + Df \frac{\partial^2 \hat{\phi}(\eta, p)}{\partial \eta^2}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\phi[\hat{f}(\eta, p), \hat{\theta}(\eta, p), \hat{\phi}(\eta, p)] &= \\ \frac{\partial^2 \hat{\phi}(\eta, p)}{\partial \eta^2} + PrLe \hat{f}(\eta, p) \frac{\partial \hat{\phi}(\eta, p)}{\partial \eta} - \\ PrLe \hat{\phi}(\eta, p) \frac{\partial \hat{f}(\eta, p)}{\partial \eta} + SrLe \frac{\partial^2 \hat{\theta}(\eta, p)}{\partial \eta^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

设 $p \in [0, 1]$, $\hbar_f, \hbar_\theta, \hbar_\phi$ 为非 0 的辅助参数, 则 0 阶变形问题呈如下形式:

$$(1-p) \mathcal{L}_f[\hat{f}(\eta, p) - f_0(\eta)] = p \hbar_f \mathcal{N}_f[\hat{f}(\eta, p), \hat{\theta}(\eta, p), \hat{\phi}(\eta, p)], \quad (26)$$

$$(1-p) \mathcal{L}_\theta[\hat{\theta}(\eta, p) - \theta_0(\eta)] = p \hbar_\theta \mathcal{N}_\theta[\hat{f}(\eta, p), \hat{\theta}(\eta, p), \hat{\phi}(\eta, p)], \quad (27)$$

$$(1-p) \mathcal{L}_\phi[\hat{\phi}(\eta, p) - \phi_0(\eta)] = p \hbar_\phi \mathcal{N}_\phi[\hat{f}(\eta, p), \hat{\theta}(\eta, p), \hat{\phi}(\eta, p)], \quad (28)$$

$$\hat{f}(\eta; p) \Big|_{\eta=0} = 0, \quad \frac{\partial \hat{f}(\eta; p)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 1, \quad \frac{\partial \hat{f}(\eta; p)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\infty} = 0, \quad (29)$$

$$\hat{\theta}(\eta; p) \Big|_{\eta=0} = 1, \quad \hat{\theta}(\eta; p) \Big|_{\eta=\infty} = 0, \quad (30)$$

$$\hat{\phi}(\eta; p) \Big|_{\eta=0} = 1, \quad \hat{\phi}(\eta; p) \Big|_{\eta=\infty} = 0. \quad (31)$$

2.2 m 阶变形问题

首先将方程(26) ~ (31) 对 p 求导 m 次, 并除以 $m!$, 然后设 $p = 0$, 得到如下式子:

$$\mathcal{L}_f[f_m(\eta) - \chi_m f_{m-1}(\eta)] = \hbar_f \mathcal{R}_m^f(\eta), \quad (32)$$

$$\mathcal{L}_\theta[\theta_m(\eta) - \chi_m \theta_{m-1}(\eta)] = \hbar_\theta \mathcal{R}_m^\theta(\eta), \quad (33)$$

$$\mathcal{L}_\phi[\phi_m(\eta) - \chi_m \phi_{m-1}(\eta)] = \hbar_\phi \mathcal{R}_m^\phi(\eta), \quad (34)$$

$$\begin{cases} f_m(0) = 0, f'_m(0) = 0, f'_m(\infty) = 0, \theta_m(0) = 0, \\ \theta_m(\infty) = 0, \phi_m(0) = 0, \phi_m(\infty) = 0, \end{cases} \quad (35)$$

$$\mathcal{R}_m^f(\eta) = \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) f_{m-1}^{(m)}(\eta) + \sum_{k=0}^{m-1} [f_{m-1-k} f_k'' - f'_{m-1-k} f'_k] - Ha^2 f'_{m-1}(\eta), \quad (36)$$

$$\mathcal{R}_m^\theta(\eta) = \frac{1}{Pr} \theta_{m-1}^{(m)}(\eta) + \sum_{k=0}^{m-1} [f_{m-1-k} \theta'_k - f'_{m-1-k} \theta_k] + Df \phi_{m-1}^{(m)}(\eta), \quad (37)$$

$$\mathcal{R}_m^\phi(\eta) = \phi_{m-1}^{(m)}(\eta) + PrLe \sum_{k=0}^{m-1} [f_{m-1-k} \phi'_k - f'_{m-1-k} \phi_k] + SrLe \theta_{m-1}^{(m)}(\eta), \quad (38)$$

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1. \end{cases} \quad (39)$$

利用 Taylor 级数展开, 得到

$$\hat{f}(\eta;p) = f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\eta)p^m, f_m(\eta) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \hat{f}(\eta;p)}{\partial p^m} \right|_{p=0}, \quad (40)$$

$$\hat{\theta}(\eta;p) = \theta_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m(\eta)p^m, \theta_m(\eta) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \hat{\theta}(\eta;p)}{\partial p^m} \right|_{p=0}, \quad (41)$$

$$\hat{\phi}(\eta;p) = \phi_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m(\eta)p^m, \phi_m(\eta) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \hat{\phi}(\eta;p)}{\partial p^m} \right|_{p=0}. \quad (42)$$

当 $p = 0$ 和 $p = 1$ 时,立即可以写出

$$\hat{f}(\eta;0) = f_0(\eta), \hat{f}(\eta;1) = f(\eta), \quad (43)$$

$$\hat{\theta}(\eta;0) = \theta_0(\eta), \hat{\theta}(\eta;1) = \theta(\eta), \quad (44)$$

$$\hat{\phi}(\eta;0) = \phi_0(\eta), \hat{\phi}(\eta;1) = \phi(\eta). \quad (45)$$

选择辅助参数,使得 $p = 1$ 时级数解收敛,于是

$$f(\eta) = f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\eta), \quad (46)$$

$$\theta(\eta) = \theta_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m(\eta), \quad (47)$$

$$\phi(\eta) = \phi_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m(\eta). \quad (48)$$

用特解 $(f_m^*, \theta_m^*, \phi_m^*)$ 项表示的一般解 (f_m, θ_m, ϕ_m) 给出如下:

$$f_m(\eta) = f_m^*(\eta) + C_1 + C_2 \exp(\eta) + C_3 \exp(-\eta), \quad (49)$$

$$\theta_m(\eta) = \theta_m^*(\eta) + C_4 \exp(\eta) + C_5 \exp(-\eta), \quad (50)$$

$$\phi_m(\eta) = \phi_m^*(\eta) + C_6 \exp(\eta) + C_7 \exp(-\eta). \quad (51)$$

3 同伦解的收敛性

根据参数 $\hbar_f, \hbar_\theta, \hbar_\phi$ 来检查级数解(46)~(48)的收敛性.为此,绘出 20 阶近似的 \hbar 曲线.从这些曲线可以看出, $\hbar_f, \hbar_\theta, \hbar_\phi$ 的适用范围: $-1.1 \leq \hbar_f \leq -0.15$, $-1.3 \leq \hbar_\theta \leq -0.4$ 和 $-1.2 \leq \hbar_\phi \leq -0.4$.当 $\hbar_f = -0.6$ 和 $\hbar_\theta = \hbar_\phi = -0.8$ 时,在整个 η 的范围内,级数(46)~(48)收敛(见图1).表1表明每种物理量需要多少项就能达到收敛解.注意速度收敛至少需要的项数.

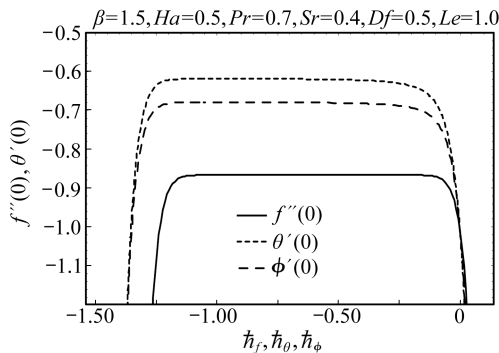


图1 函数 $f''(0)$, $\theta'(0)$, $\phi'(0)$ 20 阶近似时的 \hbar - 曲线

Fig. 1 \hbar - curves for the function $f''(0)$, $\theta'(0)$ and $\phi'(0)$ at 20th order of approximation

表 1 当 $\beta = 1.5, Ha = 0.5, Pr = 0.7, Df = 0.5, Sr = 0.4, Le = 1.3, \bar{h}_f = -0.6, \bar{h}_\theta = \bar{h}_\phi = -0.8$ 时,不同阶次近似时同伦解的收敛性

Table 1 Convergence of homotopy solution for different order of approximations when $\beta = 1.5, Ha = 0.5, Pr = 0.7, Df = 0.5, Sr = 0.4, Le = 1.3, \bar{h}_f = -0.6$ and $\bar{h}_\theta = \bar{h}_\phi = -0.8$

order of approximations	$-f''(0)$	$-\theta'(0)$	$-\phi'(0)$
1	0.854 17	0.680 00	0.756 00
6	0.866 03	0.581 25	0.814 40
15	0.866 03	0.565 29	0.819 94
24	0.866 03	0.564 31	0.819 96
30	0.866 03	0.654 18	0.819 96
37	0.866 03	0.564 11	0.819 96
46	0.866 03	0.564 11	0.819 96
50	0.866 03	0.564 11	0.819 96

4 讨 论

本节讨论一些重要参数对速度、温度、浓度、表面摩擦因数、局部 Nusselt 数和局部 Sherwood 数的影响;并将结果在图 2 至图 15 中绘出,进而在表 2 和表 3 中给出.图 2 和图 3 分别显示了 Casson 数 β 和 Hartman 数 Ha 对速度 $f'(\eta)$ 的影响.图 2 表明,随着 Casson 参数的增大,速

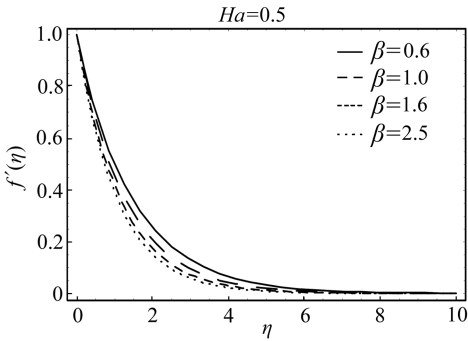


图 2 β 对 $f'(\eta)$ 的影响

Fig.2 Influence of β on $f'(\eta)$

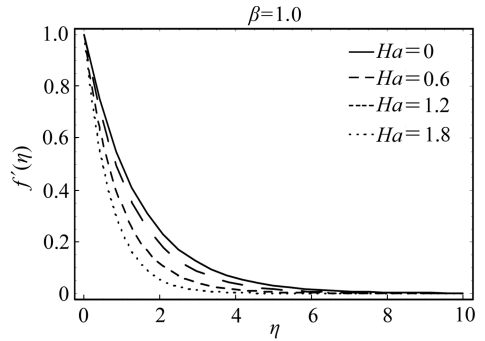


图 3 Ha 对 $f'(\eta)$ 的影响

Fig.3 Influence of Ha on $f'(\eta)$

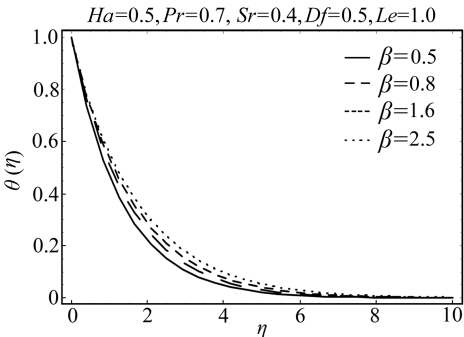


图 4 β 对 $\theta(\eta)$ 的影响

Fig.4 Influence of β on $\theta(\eta)$

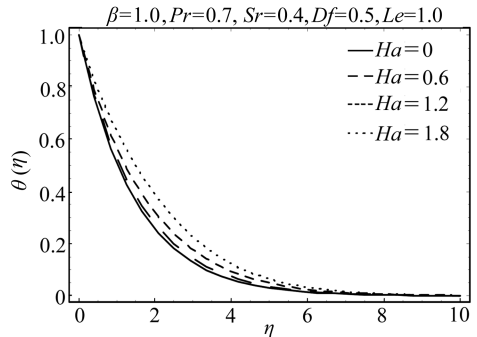


图 5 Ha 对 $\theta(\eta)$ 的影响

Fig.5 Influence of Ha on $\theta(\eta)$

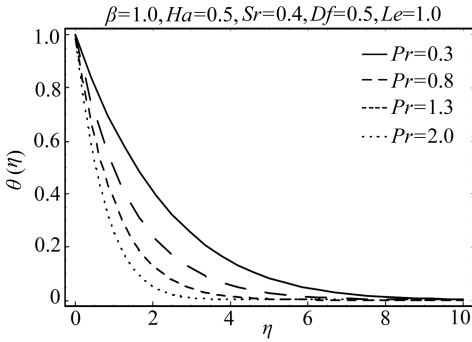


图 6 Pr 对 $\theta(\eta)$ 的影响

Fig. 6 Influence of Pr on $\theta(\eta)$

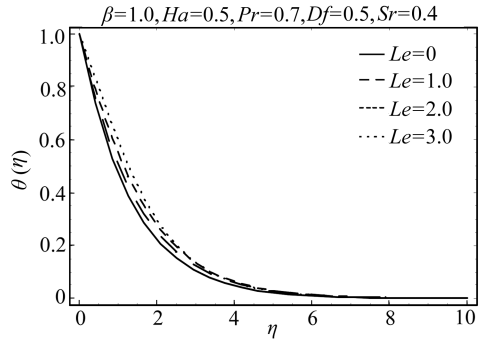


图 7 Le 对 $\theta(\eta)$ 的影响

Fig. 7 Influence of Le on $\theta(\eta)$

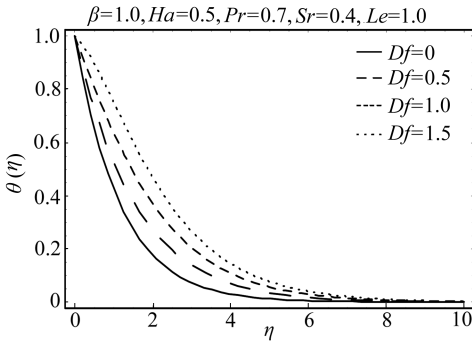


图 8 Df 对 $\theta(\eta)$ 的影响

Fig. 8 Influence of Df on $\theta(\eta)$

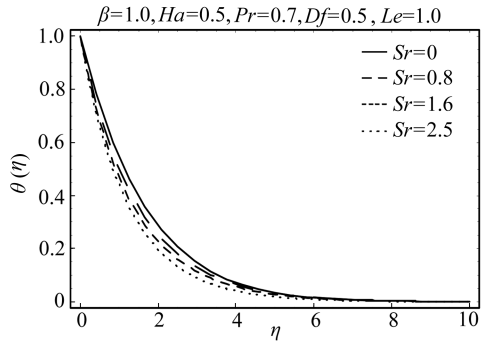


图 9 Sr 对 $\theta(\eta)$ 的影响

Fig. 9 Influence of Sr on $\theta(\eta)$

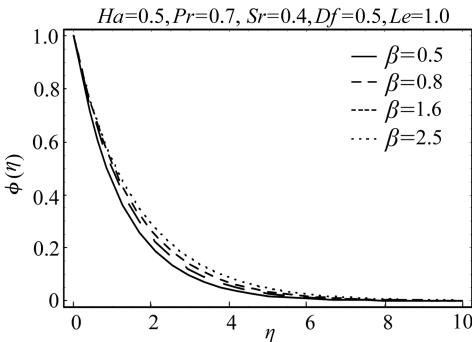


图 10 β 对 $\phi(\eta)$ 的影响

Fig. 10 Influence of β on $\phi(\eta)$

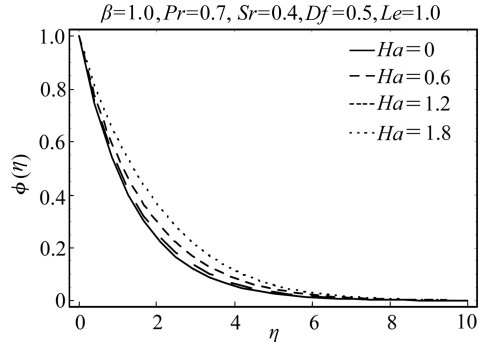


图 11 Ha 对 $\phi(\eta)$ 的影响

Fig. 11 Influence of Ha on $\phi(\eta)$

度和边界层厚度都减小。图 3 表明,当 Hartman 数增大时,速度减小。Hartman 数是由于 Lorentz 力而出现,而 Lorentz 力阻碍了流体的流动,这是众所周知的事实,这就是为什么速度是 Hartman 数的递减函数。图 4 至图 9 分别绘出 Casson 数 β , Hartman 数 Ha , Prandtl 数 Pr , Lewis 数 Le , Dufour 数 Df 和 Soret 数 Sr 对温度 $\theta(\eta)$ 的影响。从图 4 和图 5 可以看出,温度和热边界层厚度是 β 和 Ha 的递增函数。图 6 示出 Prandtl 数对温度的影响,Prandtl 数的增大,由于热扩散,使得温度和热边界层厚度下降。由于 Lewis 数和 Dufour 数的增大,使得温度上升了。从图 7 和图 8 的比较研究发现,Dufour 数增大引起温度升高,远大于 Lewis 数增大引起的温度升高。图 9 表明 Soret 数的增大,引起温度及其关联的热边界层厚度减小。

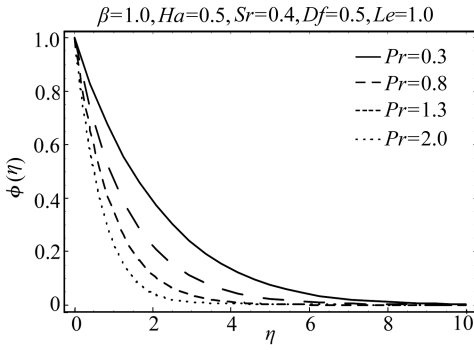


图 12 Pr 对 $\phi(\eta)$ 的影响

Fig. 12 Influence of Pr on $\phi(\eta)$

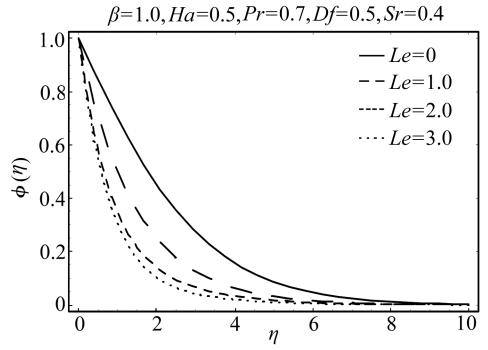


图 13 Le 对 $\phi(\eta)$ 的影响

Fig. 13 Influence of Le on $\phi(\eta)$

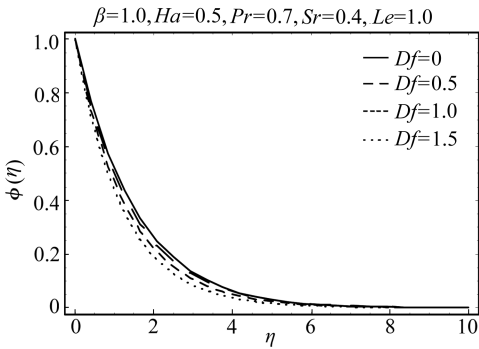


图 14 Df 对 $\phi(\eta)$ 的影响

Fig. 14 Influence of Df on $\phi(\eta)$

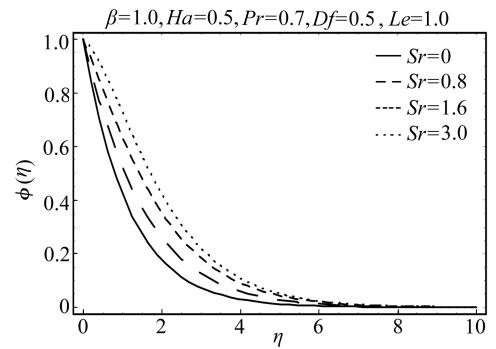


图 15 Sr 对 $\phi(\eta)$ 的影响

Fig. 15 Influence of Sr on $\phi(\eta)$

表 2 β 和 Ha 取不同数值时, 表面摩擦因数 $(1 + 1/\beta)f''(0)$ 的值

Table 2 Numerical values of skin friction coefficient $(1 + 1/\beta)f''(0)$ for different values of β and Ha

β	Ha	$(1 + 1/\beta)f''(0)$
0.8	0.5	1.677 05
1.4		1.463 85
2.0		1.369 31
3.0		1.290 99
2.0	0.0	1.224 75
	0.6	1.428 29
	1.2	1.913 12
	1.7	2.415 57

图 10 至图 15 显示出一些参数的变化对浓度 $\phi(\eta)$ 的影响. Casson 数和 Hartman 数对浓度分布的影响性质上类似;对温度的影响性质上也类似(参看图 10 ~ 11 和图 4 ~ 5). 当 Prandtl 数增大时, 浓度减小. Lewis 数增大引起浓度的下降及其边界层厚度的减小. 令人感兴趣的是, 从图 7 和图 13 可以看到, Lewis 数对温度和浓度的影响是相反的. 还可以看到, Lewis 数引起浓度分布的变化大于对温度的变化. 图 14 示出 Dufour 数增大时, 浓度场减小. Soret 数增大时, 浓度及其边界层厚度也增大(图 15). 所以, Soret 数对温度和浓度场的影响完全相反(参看图 14 和图 15). 表 2 给出了 β 和 Ha 取不同数值, 表面摩擦因数的值. 随着 β 的增大, 表面摩擦因数减小, 而随着 Ha 的增大, 表面摩擦因数增大. 表 3 对 β, Ha, Pr, Sr, Df 和 Le 的不同数值, 给出了局

部 Nusselt 数和局部 Sherwood 数的值. 随着 Pr 的增大, 局部 Nusselt 数和局部 Sherwood 数也增大, 而随着 Sr 的增大, 局部 Nusselt 数增大, 而局部 Sherwood 数减小.

表 3 β, Ha, Pr, Sr, Df 和 Le 取不同数值时, 局部 Nusselt 数 $-\theta'(0)$ 和局部 Sherwood 数 $-\phi'(0)$ 的值

Table 3 Numerical values of local Nusselt number $-\theta'(0)$ and local Sherwood number $-\phi'(0)$ for different values of β, Ha, Pr, Sr, Df and Le

β	Ha	Pr	Sr	Df	Le	$-\theta'(0)$	$-\phi'(0)$
0.8	0.5	0.7	0.4	0.5	1.0	0.650 27	0.710 96
1.4						0.621 82	0.682 52
3.0						0.592 41	0.633 05
2.0	0.0					0.631 57	0.692 27
	0.6					0.596 48	0.657 14
	1.2					0.519 23	0.579 03
		0.5				0.477 51	0.528 59
		1.0				0.771 42	0.843 93
		1.5				0.999 05	1.087 74
			0.0			0.552 31	0.816 55
			0.5			0.641 17	0.575 30
			1.0			0.736 79	0.332 97
				0.0		0.816 54	0.605 13
				0.7		0.504 25	0.698 48
				1.5		0.321 68	0.755 79
					0.0	0.694 82	0.509 57
					1.3	0.612 94	0.784 12
					2.0	0.518 21	1.072 66

5 结 论

研究了计及 Soret 和 Dufour 影响时, Casson 流体的磁流体动力学流动. 在本文分析的基础上得到如下结论:

- 1) Casson 数 β 和 Hartman 数 Ha 的增大, 引起速度 $f'(\eta)$ 减小, 但是使得温度和浓度分布增大;
- 2) Prandtl 数 Pr 增大时, 使得温度、浓度及其边界层厚度减小;
- 3) Soret 数 Sr 对 $\theta(\eta)$ 和 $\phi(\eta)$ 的影响正好相反;
- 4) Df 增大时, 热边界层厚度和温度场增大;
- 5) β 和 Ha 对表面摩擦因数的影响正相反.

致谢 衷心感谢沙特阿拉伯阿卜杜勒阿齐兹国王大学院长科研基金 (DSR) 对 Alsaedi 博士工作的资助.

参考文献 (References):

- [1] Crane L J. Flow past a stretching plate [J]. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 1970, **21**(4): 645-647.
- [2] Hassani M, Tabar M M, Nemati H, Domairry G, Noori F. An analytical solution for boundary layer flow of a nanofluid past a stretching sheet [J]. *International Journal of Thermal Sci-*

- ences, 2011, **50**(11): 2256-2263.
- [3] Kazem S, Shaban M, Abbasbandy S. Improved analytical solutions to a stagnation-point flow past a porous stretching sheet with heat generation[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2011, **348**(8): 2044-2058.
- [4] Hayat T, Javed T, Abbas Z. Slip flow and heat transfer of a second grade fluid past a stretching sheet through a porous space[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2008, **51**(17/18): 4528-4534.
- [5] Rahman G M A. Thermal-diffusion and MHD for Soret and Dufour's effects on Hiemenz flow and mass transfer of fluid flow through porous medium onto a stretching surface[J]. *Physica B: Condensed Matter*, 2010, **405**(11): 2560-2569.
- [6] Yao B, Chen J. Series solution to the Falkner-Skan equation with stretching boundary[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2009, **208**(1): 156-164.
- [7] Fang T, Zhang J, Yao S. A new family of unsteady boundary layers over a stretching surface [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2010, **217**(8): 3747-3755.
- [8] Yao S, Fang T, Zhang J. Heat transfer of a generalized stretching/shrinking wall problem with convective boundary conditions [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, **16**(2): 752-760.
- [9] Hayat T, Awais M, Qasim M, Hendi A A. Effects of mass transfer on the stagnation point flow of an upper-convected Maxwell (UCM) fluid[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2011, **54**(15/16): 3777-3782.
- [10] Hayat T, Qasim M, Abbas Z. Radiation and mass transfer effects on the magnetohydrodynamic unsteady flow induced by a stretching sheet[J]. *Z Naturforsch, A*, 2010, **65**: 231-239.
- [11] Ahmad A, Asghar S. Flow of a second grade fluid over a sheet stretching with arbitrary velocities subject to a transverse magnetic field[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2011, **24**(11): 1905-1909.
- [12] Muhaimina, Kandasamy R, Hashim I. Effect of chemical reaction, heat and mass transfer on nonlinear boundary layer past a porous shrinking sheet in the presence of suction[J]. *Nuclear Engineering and Design*, 2010, **240**(5): 933-939.
- [13] Kandasamy R, Periasamy K, Prabhu K K S. Chemical reaction, heat and mass transfer on MHD flow over a vertical stretching surface with heat source and thermal stratification effects [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2005, **48**(21/22): 4751-4761.
- [14] Mrill E W, Benis A M, Gilliland E R, Sherwood T K, Salzman E W. Pressure flow relations of human blood hollow fibers at low flow rates[J]. *Journal of Applied Physiology*, 1965, **20**: 954-967.
- [15] McDonald D A. *Blood Flows in Arteries*[M]. 2nd ed. London: Arnold, 1974.
- [16] Vosughi H, Shivanian E, Abbasbandy S. A new analytical technique to solve Volterra's integral equations[J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2011, **34**(10): 1243-1253.
- [17] Liao S J. *Beyond Perturbation: Introduction to Homotopy Analysis Method*[M]. Boca Raton: Chapman and Hall, CRC Press, 2003.
- [18] Abbasbandy S, Shirzadi A. Homotopy analysis method for a nonlinear chemistry problem[J]. *Studies in Nonlinear Sciences*, 2010, **1**(4): 127-132.
- [19] Ziabakhsh Z, Domairry G, Baramnia H, Babazadeh H. Analytical solution of flow and diffusion of chemically reactive species over a nonlinearly stretching sheet immersed in a porous medium[J]. *Journal of the Taiwan Institute of Chemical Engineers*, 2010, **41**(1): 22-28.

- [20] Rashidi M M, Pour S A M, Abbasbandy S. Analytic approximate solutions for heat transfer of a micropolar fluid through a porous medium with radiation[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, **16**(4): 1874-1889.
- [21] Hayat T, Shehzad S A, Qasim M, Obaidat S. Steady flow of Maxwell fluid with convective boundary conditions[J]. *Z Naturforsch, A*, 2011, **66**: 417-422.
- [22] Hayat T, Shehzad S A, Qasim M, Obaidat S. Radiative flow of a Jeffrey fluid in a porous medium with power law heat flux and heat source[J]. *Nuclear Engineering and Design*, 2012, **243**: 15-19.
- [23] Hayat T, Qasim M. Influence of thermal radiation and Joule heating on MHD flow of a Maxwell fluid in the presence of thermophoresis[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2010, **53**(21/22): 4780-4788.
- [24] Yao B. Approximate analytical solution to the Falkner-Skan wedge flow with the permeable wall of uniform suction[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2009, **14**(8): 3320-3326.
- [25] Rashidi M M, Pour S A M. Analytic approximate solutions for unsteady boundary-layer flow and heat transfer due to a stretching sheet by homotopy analysis method[J]. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 2010, **15**(1): 83-95.
- [26] Liao S J. An optimal homotopy-analysis approach for strongly nonlinear differential equations [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, **15**(8): 2003-2016.
- [27] Vyas P. Radiative MHD flow over a non-isothermal stretching sheet in a porous medium[J]. *Applied Mathematical Sciences*, 2010, **4**(50): 2475-2484.
- [28] Turkyilmazoglu M. Multiple solutions of heat and mass transfer of MHD slip flow for the viscoelastic fluid over a stretching sheet[J]. *International Journal of Thermal Sciences*, 2011, **50**(11): 2264-2276.

Soret and Dufour Effects in the Magnetohydrodynamic (MHD) Flow of Casson Fluid

T. Hayat^{1,2}, S. A. Shehzad¹, A. Alsaedi²

(1. Department of Mathematics, Quaid-I-Azam University 45320,
Islamabad 44000, Pakistan;

2. Department of Mathematics, Faculty of Science, King Abdulaziz
University, P. O. Box 80203, Jeddah 21589, Saudi Arabia)

Abstract: The Soret and Dufour effects on the hydrodynamic flow of Casson fluid over a stretched surface were discussed. The relevant equations were first derived and then series solution was constructed by homotopic procedure. Results for velocity, temperature and concentration fields were displayed and discussed. Numerical values of skin friction coefficient, Nusselt and Sherwood numbers for different values of physical parameters were constructed and analyzed. Convergence of series solutions was examined.

Key words: Soret and Dufour effects; MHD flow; Casson fluid; heat and mass transfer