

密度和刚度线性变化对非均匀地壳层中 扭转表面波传播的影响*

S·古普塔, S·K·维施瓦卡尔玛, D·K·玛里, S·昆杜

(印度矿业学院 应用数学系, 丹巴德 826004, 贾坎德邦, 印度)

摘要: 研究了覆盖在非均匀半无限空间上的非均匀地壳层中, 扭转表面波传播的可能性. 地壳层的非均匀性随着厚度线性变化, 非均匀半无限空间的非均匀性表现为3种类型, 即指数型、二次型和双曲型. 采用封闭形式, 可以分别推导出上述3种类型非均匀性的色散方程. 对于覆盖在半空间上的同一地壳层, 色散方程与经典案例的方程一致. 研究发现, 随着非均匀地壳层中密度线性变化的非均匀参数的增大, 相速度减小, 而由刚度引起的非均匀因素对相速度的影响相反.

关键词: 扭转波; 相速度; 地壳层; 指数型; 二次型; 双曲型

中图分类号: O347.4⁺4 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.10.002

符号说明

H	非均匀地壳层厚度	μ	介质的刚度
ρ	介质的密度	m_0, n_0, a, b	无量纲长度常数的倒数
b_1, b_2	无量纲长度常数	σ_{ij}	应力分量
e_{ij}	应变分量	u, v, w	位移分量
c	扭转表面波的相速度	c_1	剪切波速度
K	角波数	ω	角频率
$\gamma, \eta, R, \gamma_1, \eta_1, R_1$	无量纲数	λ, m	无量纲长度
D_1, D_2, E, F, G	任意常数		

引言

通常, 人们通过研究表面波的特征来确定地球内部的结构和特征. 对于地震学家和在地震工程中想理解地震破坏原因的学者, 了解波沿着表面或界面传播的特性至关重要. 我们的地球是一有限尺寸的球形, 发生的弹性波一定产生边界层效应. 很自然地, 这个概念将引导我们来研究边界波或表面波, 即波在传播时受到表面的限制. 事实上, 研究表面波在均匀、非均匀和层状介质中的传播, 直到最近才成为理论地震学家最感兴趣的课题. 对于弹性固体中波产生和

* 收稿日期: 2011-11-15; 修订日期: 2012-04-07

作者简介: S. Gupta, 教授, 博士(联系人. E-mail: shishir_ism@yahoo.com).

本文原文为英文, 黄锋译, 张禄坤校.

传播的研究,在震学、地球物理学和应用数学领域中已有很长的、辉煌的历史。

Ewing 等人的专著^[1]是研究弹性波传播的基础文献。Vrettos^[2]和 Kennett 等^[3]研究了关于非均匀性对线性荷载作用下的表面波振动的影响。根据 Biot 理论,许多学者研究了非均匀介质中的 Love 型和 Rayleigh 型表面波。但是,很难发现关于扭转波在非均匀半无限空间上覆盖的非均匀层状介质中传播的信息。Reissner 和 Sagoci^[4]首先研究了弹性半空间表面的圆形上作用有周期性剪切应力时,弹性半空间中的扭转振动。Rayleigh^[5]指出,扭转波不能在各向同性弹性半空间中传播。相比之下,Georgiadis 等^[6]已证明,这种扭转波能够在均匀梯度弹性半空间中传播。Meissner^[7]研究了扭转表面波在非均匀弹性半空间中传播,他指出在非均匀弹性半空间中,剪切模量和密度随着深度线性变化,扭转波伴随着二次变差传播。Bhattacharya^[8]研究了扭转波在由内外两层组成、层间粘结有缺陷的圆柱中传播规律。Dey 和 Dutta^[9]讨论了扭转波在初应力圆柱中的传播。Chattopadhyay 等^[10]研究了扭转波在非均匀半无限空间上覆盖的非均匀层介质中传播。关于弹性波传播及其在震学中生成的研究已由 Pujol^[11]和 Chapman^[12]完成。Gupta 等^[13]和 Davini 等^[14]在研究表面波在非均匀介质中传播时,已经引用了这些值得称赞的工作。Kennett 等^[3]指出,尽管对地球内部结构研究取得了新进展,但是我们的认识,尤其是在密度和粘度变化时仍有很大的差距。Vardoulakis^[15]研究表明,Gibson 半空间剪切模量随着深度线性变化而密度保持恒定时,扭转表面波也能够 Gibson 半空间中传播。Akbarov 等^[16]讨论了扭转波在有限预紧式的空心夹层圆柱体的耗散问题,而 Ozturk^[17]最近研究了扭转波在嵌在预应力弹性介质的预应力圆柱中的传播。

在本工作中,考虑密度和刚度变化的非均匀性。我们地球的外层是有各种不同地质参数的非均匀层组成。如 Bullen^[18]所指出,地球内部的密度的变化率随着不同层的性质而改变,得到了密度随深度的变化规律:从地表以下 413 km 到 984 km,密度近似呈二次多项式变化,而从 984 km 到中间核心,密度近似呈线性变化。Sari 和 Salk^[19]认为沉积物的密度随着深度呈双曲函数变化。同样地,不同作者也认为有不同的变化形式,如应用谐函数、线性函数、二次函数、指数函数等,模拟地球内部的密度和其他地质参数的变化。

本文尝试研究扭转表面波在非均匀半空间上覆盖的非均匀地壳层中传播的可能性。在非均匀地壳层中,密度和刚度随深度线性变化,而在半空间中,非均匀性通过 3 种不同的变化形式考虑:刚度和密度随着深度(i)呈指数函数变化;(ii)呈多项式函数变化;(iii)呈双曲函数变化。研究表明,在非均匀半空间上覆盖的非均匀层中存在扭转表面波,并通过图形研究了非均匀性对两种介质中扭转波的传播速度影响。

1 问题的公式化表示

考虑采用柱坐标系研究扭转表面波问题。模型由覆盖在非均匀半空间之上,厚度为 H 的非均匀地壳层组成,考虑质量密度和刚度两种非均匀性,如图 1 所示。

柱坐标系 (r, θ, z) 的原点位于半无限空间与非均匀层的界面上, z -轴沿着界面的法向指向半无限空间,考虑以下的质量密度和刚度变化:

$$\left. \begin{array}{l} \text{对于地壳层, } \mu = \mu_0(1 + m_0z), \quad \rho = \rho_0(1 + n_0z), \quad m_0 > 0; n_0 > 0, \\ \text{对于半空间, 情况 I: } \mu = \mu_1 \exp(az), \quad \rho = \rho_1 \exp(bz), \quad a > 0; b > 0, \\ \text{情况 II: } \mu = \mu_1 \left(1 + \frac{z}{b_1}\right)^2, \quad \rho = \rho_1 \left(1 + \frac{z}{b_1}\right)^2, \quad b_1 > 0, \\ \text{情况 III: } \mu = \mu_1 \cosh^2\left(\frac{z}{b_2}\right), \quad \rho = \rho_1 \cosh^2\left(\frac{z}{b_2}\right), \quad b_2 > 0, \end{array} \right\} \quad (1)$$

其中, μ 和 ρ 分别表示介质中的刚度和密度, m_0, n_0, a 和 b 为有量纲长度常数的倒数, 在情况 II 和情况 III 中, b_1 和 b_2 为有量纲长度常数.

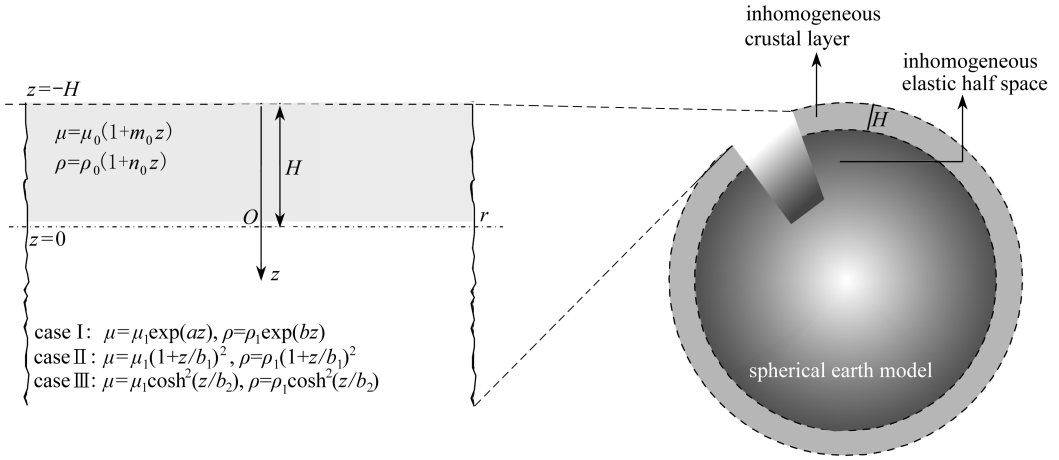


图1 问题的几何示意图

Fig. 1 Geometry of the problem

运动动力学方程^[20]为

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (2)$$

其中, $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}, \sigma_{r\theta}$ 和 $\sigma_{\theta z}$ 分别为应力分量, u, v 和 w 分别为位移分量. 那么, 应力-应变关系为

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \lambda \Omega + 2\mu e_{rr}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda \Omega + 2\mu e_{\theta\theta}, \\ \sigma_{zz} = \lambda \Omega + 2\mu e_{zz}, \quad \sigma_{r\theta} = 2\mu e_{r\theta}, \\ \sigma_{rz} = 2\mu e_{rz}, \quad \sigma_{\theta z} = 2\mu e_{\theta z}, \end{cases} \quad (3)$$

其中, λ 和 μ 为 Lamé 常数,

$$\Omega = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

为膨胀系数.

应变-位移关系为

$$\begin{cases} e_{rr} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right), \quad e_{zz} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial z}, \\ e_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right), \quad e_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \\ e_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right). \end{cases} \quad (4)$$

采用位移分量表示的扭转波特征为

$$u = 0, \quad w = 0, \quad v = v(r, z, t). \quad (5)$$

现在,考虑方程(3)~(5),扭转表面波沿径向传播的运动动力学方程可以改写为

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = \rho(z) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (6)$$

其中, $v(r, z, t)$ 为沿着方位角 θ 方向的位移, r 为径向坐标. 对应于位移分量的应力分量为

$$\sigma_{r\theta} = \mu(z) \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right), \quad \sigma_{z\theta} = \mu(z) \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right). \quad (7)$$

利用方程(7),方程(6)变为

$$\mu(z) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) v + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu(z) \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho(z) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad (8)$$

方程(8)的谐波解采用以下形式:

$$v = V(z) J_1(Kr) \exp(i\omega t), \quad (9)$$

其中 $V(z)$ 为下方方程的解:

$$\frac{d^2 V(z)}{dz^2} + \frac{\mu'(z)}{\mu(z)} \frac{dV(z)}{dz} - K^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_s^2} \right) V(z) = 0, \quad (10)$$

在这里, $c = \omega/K$ 为扭转波速, $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$, ω 为角频率, K 为角波数, $J_1(Kr)$ 为一阶的第一类 Bessel 函数.

2 边界条件

须满足下面的边界条件:

(i) 在自由表面处, $z = -H$, 应力为 0, 因此

$$\frac{\partial v_0}{\partial z} = 0, \quad z = -H; \quad (11a)$$

(ii) 在界面处, $z = 0$, 为保证应力的连续性, 要求

$$\mu_0 \frac{\partial v_0}{\partial z} = \mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial z}, \quad z = 0; \quad (11b)$$

(iii) 位移的连续性要求

$$v_0 = v_1, \quad z = 0; \quad (11c)$$

(iv) 位移有界, 则

$$\lim_{z \rightarrow \infty} v_1(z) = 0, \quad (11d)$$

其中, v_0 和 v_1 分别为非均匀层和半无限空间的位移.

3 非均匀层的解

在非均匀地壳层中, 有

$$\mu = \mu_0(1 + m_0 z), \quad \rho = \rho_0(1 + n_0 z). \quad (12)$$

应用方程(12)于方程(10), 得到

$$\frac{d^2 V}{dz^2} + \frac{\mu_0 m_0}{\mu_0(1 + m_0 z)} \frac{dV}{dz} - K^2 \left\{ 1 - \frac{c^2}{c_0^2} \frac{(1 + n_0 z)}{(1 + m_0 z)} \right\} V(z) = 0, \quad (13)$$

其中 $c_0 = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$.

为了消除 dV/dz 项, 将 $V(z) = \phi(z)/(1 + m_0 z)^{1/2}$ 代入方程(13), 有

$$\frac{d^2\phi(z)}{dz^2} + \left[\frac{m_0^2}{4(1+m_0z)^2} - K^2 \left\{ 1 - \frac{c^2}{c_0^2} \frac{(1+n_0z)}{(1+m_0z)} \right\} \right] \phi(z) = 0. \quad (14)$$

对方程(14)引入无量纲量

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{c^2 n_0}{c_0^2 m_0}}, \quad \eta = \frac{2\gamma K(1+m_0z)}{m_0},$$

方程简化为

$$\frac{d^2\phi(\eta)}{d\eta^2} + \left[\frac{1}{4\eta^2} - \frac{1}{4} + \frac{R}{2\eta} \right] \phi(\eta) = 0, \quad R = \frac{\omega^2(m_0 - n_0)}{c_0^2 \gamma m_0^2 K}, \quad (15)$$

这就是著名的 Whittaker 方程^[21]. Whittaker 方程(15)的解给出为

$$\phi(\eta) = D_1 W_{R/2,0}(\eta) + D_2 W_{-R/2,0}(-\eta).$$

因此,地壳层中扭转波的位移为

$$v_0 = \left[\frac{D_1 W_{R/2,0}(\eta) + D_2 W_{-R/2,0}(-\eta)}{(1+m_0z)^{1/2}} \right] J_1(Kr) \exp(i\omega t). \quad (16)$$

4 半空间的解

4.1 情况 I

$$\mu = \mu_1 \exp(az), \quad \rho = \rho_1 \exp(bz). \quad (17)$$

利用式(17),对于半空间,方程(10)变为

$$\frac{d^2V}{dz^2} + a \frac{dV}{dz} - K^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2} \frac{e^{bz}}{e^{az}} \right) V(z) = 0, \quad (18)$$

其中, $c_1 = \sqrt{\mu_1/\rho_1}$. 现在,在方程(18)中假定 $V(z) = \phi(z)/e^{az/2}$, 则得到

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} + \left[\frac{K^2 c^2 (1+bz)}{c_1^2 (1+az)} - K^2 \left(1 + \frac{a^2}{4K^2} \right) \right] \phi(z) = 0. \quad (19)$$

引入无量纲量

$$\gamma_1 = \sqrt{1 + \frac{a^2}{4K^2} - \frac{b}{a} \frac{c^2}{c_1^2}}, \quad \eta_1 = \frac{2\gamma_1 K}{a} (1+az),$$

方程(19)简化为

$$\frac{d^2\phi}{d\eta_1^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{R_1}{\eta_1} \right] \phi(\eta_1) = 0, \quad (20)$$

其中, $R_1 = c^2(a-b)K/(2c_1^2 a^2 \gamma_1)$. 方程(20)的解满足式(11d)的边界条件,可以写为

$$\phi(\eta_1) = E W_{R_1,1/2}(\eta_1),$$

其中, $W_{R_1,1/2}(\eta_1)$ 为 Whittaker 函数. 因此,非均匀半空间中的扭转波的位移为

$$v_1 = E W_{R_1,1/2}(\eta_1) e^{-az/2} J_1(Kr) e^{i\omega t}, \quad \eta_1 = \frac{2\gamma_1 K}{a} (1+az). \quad (21)$$

利用边界条件(11a)、(11b)和(11c),得到

$$D_1 \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \left\{ 1 - \left(\frac{m_0}{K} \right) KH \right\}^{-3/2} \left(\frac{m_0}{K} \right) W_{R/2,0} \left\{ \frac{2\gamma K}{m_0} \left(1 - \frac{m_0}{K} KH \right) \right\} + \right. \\ \left. 2\gamma \left\{ 1 - \left(\frac{m_0}{K} \right) KH \right\}^{-1/2} W_{R/2,0} \left\{ \frac{2\gamma K}{m_0} \left(1 - \frac{m_0}{K} KH \right) \right\} \right] +$$

$$D_2 \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \left\{ 1 - \left(\frac{m_0}{K} \right) KH \right\}^{-3/2} \left(\frac{m_0}{K} \right) W_{-R/2,0} \left\{ -\frac{2\gamma K}{m_0} \left(1 - \frac{m_0}{K} KH \right) \right\} - 2\gamma \left\{ 1 - \left(\frac{m_0}{K} \right) KH \right\}^{1/2} W'_{-R/2,0} \left\{ -\frac{2\gamma K}{m_0} \left(1 - \frac{m_0}{K} KH \right) \right\} \right] = 0, \quad (22)$$

$$D_1 \left\{ \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{m_0}{K} \right) W_{R/2,0} \left(\frac{2\gamma K}{m_0} \right) + 2\gamma W'_{R/2,0} \left(\frac{2\gamma K}{m_0} \right) \right\} + D_2 \left\{ \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{m_0}{K} \right) W_{-R/2,0} \left(-\frac{2\gamma K}{m_0} \right) - 2\gamma W'_{-R/2,0} \left(-\frac{2\gamma K}{m_0} \right) \right\} - \frac{\mu_1}{\mu_0} E \left\{ \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{a}{K} \right) W_{R_1,1/2} \left(\frac{2\gamma_1 K}{a} \right) + 2\gamma_1 W'_{R_1,1/2} \left(\frac{2\gamma_1 K}{a} \right) \right\} = 0, \quad (23)$$

$$D_1 W_{R/2,0} \left(\frac{2\gamma K}{m_0} \right) + D_2 W_{-R/2,0} \left(-\frac{2\gamma K}{m_0} \right) - E W_{R_1,1/2} \left(\frac{2\gamma_1 K}{a} \right) = 0. \quad (24)$$

展开 Whittaker 函数直至线性项,并消除 D_1, D_2 和 E , 有

$$\frac{N_{r1} \exp \left(\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_0^2} \frac{n_0}{m_0} KH} \right) - N_{r2} \exp \left(-\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_0^2} \frac{n_0}{m_0} KH} \right)}{D_{r1} \exp \left(\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_0^2} \frac{n_0}{m_0} KH} \right) + D_{r2} \exp \left(-\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_0^2} \frac{n_0}{m_0} KH} \right)} = \frac{\mu_1 \sqrt{1 + \frac{a^2}{4K^2} - \frac{b}{a} \frac{c^2}{c_1^2}}}{\mu_0 \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_0^2} \frac{n_0}{m_0}}} + P_1, \quad (25)$$

其中, $N_{r1}, N_{r2}, D_{r1}, D_{r2}$ 和 P_1 在附录中定义. 方程(25)即为扭转波在非均匀半空间(情况 I)上覆盖的地壳层中传播所要求的色散方程.

4.2 情况 II

$$\mu = \mu_1 \left(1 + \frac{z}{b_1} \right)^2, \quad \rho = \rho_1 \left(1 + \frac{z}{b_1} \right)^2. \quad (26)$$

假定

$$V = \frac{V_1}{\sqrt{\mu}}. \quad (27)$$

利用方程(27), 方程(10)可以改写为

$$\frac{d^2 V_1}{dz^2} - \left\{ \frac{1}{2\mu} \frac{d^2 \mu}{dz^2} - \frac{1}{4\mu^2} \left(\frac{d\mu}{dz} \right)^2 + K^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2} \right) \right\} V_1 = 0. \quad (28)$$

现在, 在方程(28)中应用方程(26), 得到

$$\frac{d^2 V_1}{dz^2} - \lambda^2 V_1 = 0, \quad (29)$$

$$\text{其中} \quad \lambda^2 = K^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2} \right).$$

应用边界条件(11d), 方程(29)的解变为

$$V_1 = F e^{-\lambda z}. \quad (30)$$

因此, 根据方程(27)和(30), 非均匀半空间中的扭转波的位移为

$$V = \frac{F e^{-\lambda z}}{\sqrt{\mu_1} (1 + z/b_1)} J_1(Kr) e^{i\omega t}. \quad (31)$$

现在利用边界条件(11b)和(11c), 得到

$$D_1 \left\{ \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{m_0}{K} \right) W_{R/2,0} \left(\frac{2\gamma K}{m_0} \right) + 2\gamma W'_{R/2,0} \left(\frac{2\gamma K}{m_0} \right) \right\} +$$

$$D_2 \left\{ \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{m_0}{K} \right) W_{-R/2,0} \left(-\frac{2\gamma K}{m_0} \right) - 2\gamma W'_{-R/2,0} \left(-\frac{2\gamma K}{m_0} \right) \right\} -$$

$$\left(\frac{\mu_1}{\mu_0} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{\mu_1}} \right) F \left(\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}} - \frac{1}{b_1 K} \right) = 0, \quad (32)$$

$$D_1 W_{R/2,0} \left(\frac{2\gamma K}{m_0} \right) + D_2 W_{-R/2,0} \left(-\frac{2\gamma K}{m_0} \right) - \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} F = 0. \quad (33)$$

在方程(22)、(32)和(33)中,展开 Whittaker 函数直至线性项,并消除 D_1, D_2 和 F , 得到

$$\frac{N_{r1} \exp \left(\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_0^2} \frac{n_0}{m_0}} KH \right) - N_{r2} \exp \left(-\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_0^2} \frac{n_0}{m_0}} KH \right)}{D_{r1} \exp \left(\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_0^2} \frac{n_0}{m_0}} KH \right) + D_{r2} \exp \left(-\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_0^2} \frac{n_0}{m_0}} KH \right)} = \frac{\mu_1 \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}} - \frac{1}{b_1 K}}{\mu_0 \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_0^2} \frac{n_0}{m_0}}}. \quad (34)$$

方程(34)给出了扭转波在非均匀半空间(情况 II)上覆盖的地壳层中传播的色散方程。

4.3 情况 III

$$\mu = \mu_1 \cosh^2 \left(\frac{z}{b_2} \right), \quad \rho = \rho_1 \cosh^2 \left(\frac{z}{b_2} \right). \quad (35)$$

将 $V = V_1 / \sqrt{\mu}$ 代入方程(10),并利用方程(35),得到

$$V_1'' - m_1^2 V_1 = 0, \quad (36)$$

其中

$$m_1 = K \left(1 + \frac{1}{b_2^2 K^2} - \frac{c^2}{c_1^2} \right)^{1/2}. \quad (37)$$

因此,利用边界条件(11d),非均匀半空间中的扭转波的位移变为

$$v_1 = \frac{G e^{-m_1 z}}{\sqrt{\mu_1} \cosh(z/b_2)} J_1(Kr) e^{i\omega t}. \quad (38)$$

利用边界条件(11b)和(11c),得到

$$D_1 \left\{ \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{m_0}{K} \right) W_{R/2,0} \left(\frac{2\gamma K}{m_0} \right) + 2\gamma W'_{R/2,0} \left(\frac{2\gamma K}{m_0} \right) \right\} +$$

$$D_2 \left\{ \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{m_0}{K} \right) W_{-R/2,0} \left(-\frac{2\gamma K}{m_0} \right) - 2\gamma W'_{-R/2,0} \left(-\frac{2\gamma K}{m_0} \right) \right\} -$$

$$G \left(\frac{\mu_1}{\mu_0} \right) \left(1 + \frac{1}{b_2^2 K^2} - \frac{c^2}{c_1^2} \right)^{1/2} = 0, \quad (39)$$

$$D_1 W_{R/2,0} \left(\frac{2\gamma K}{m_0} \right) + D_2 W_{-R/2,0} \left(-\frac{2\gamma K}{m_0} \right) - G = 0. \quad (40)$$

在方程(22)、(39)和(40)中,展开 Whittaker 函数直至线性项,并消除 D_1, D_2 和 G , 得到

$$\frac{N_{r1} \exp \left(\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_0^2} \frac{n_0}{m_0}} KH \right) - N_{r2} \exp \left(-\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_0^2} \frac{n_0}{m_0}} KH \right)}{D_{r1} \exp \left(\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_0^2} \frac{n_0}{m_0}} KH \right) + D_{r2} \exp \left(-\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_0^2} \frac{n_0}{m_0}} KH \right)} = \frac{\mu_1 \sqrt{1 + \frac{1}{b_2^2 K^2}} - \frac{c^2}{c_1^2}}{\mu_0 \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_0^2} \frac{n_0}{m_0}}}, \quad (41)$$

方程(41)就是扭转波在非均匀半空间(情况 III)上覆盖的地壳层中传播的色散方程。

5 特殊情形

当地壳层匀质时,即 $m_0 \rightarrow 0, n_0 \rightarrow 0$,且半空间也匀质,即对于情况 I : $a \rightarrow 0, b \rightarrow 0$;情况 II : $b_1 \rightarrow \infty$;情况 III : $b_2 \rightarrow \infty$,色散方程(25)、(34)和(41)简化为

$$\tan\left(\sqrt{\left(\frac{c^2}{c_0^2} - 1\right)} KH\right) = \frac{\mu_1}{\mu_0} \frac{\sqrt{(1 - c^2/c_1^2)}}{\sqrt{(c^2/c_0^2 - 1)}}$$

这就是著名的 Love 波经典色散方程,也证明了所讨论问题的解的可信性。

6 数值计算和讨论

为了研究非均匀性的变化对扭转表面波传播的影响,采用不同数值的弹性常数^[22-23],如表 1 所示,由方程(25)、(34)和(41)分别数值计算了 3 种不同情况下的相速度。

表 1 不同数值的弹性常数

Table1 Values of various elastic constants

curve no.	$\mu_0 / (\text{N/m}^2)$	$\rho_0 / (\text{kg/m}^3)$	$\mu_1 / (\text{N/m}^2)$	$\rho_1 / (\text{kg/m}^3)$	μ_0/μ_1	$(c_0/c_1)^2$
1, 2, 5	93×10^9	7 450	75.00×10^9	4 700	1.240 0	0.782 3
3, 6	93×10^9	7 450	63.40×10^9	3 364	1.466 9	0.662 4
4, 7	93×10^9	7 450	39.88×10^9	2 649	2.332 0	0.829 2

通过图形分析,我们将在下文中讨论刚度和密度的线性变化,对扭转表面波在情况 I、情况 II 和情况 III 这 3 种非均匀半空间上覆盖的非均匀地壳层中传播的影响。

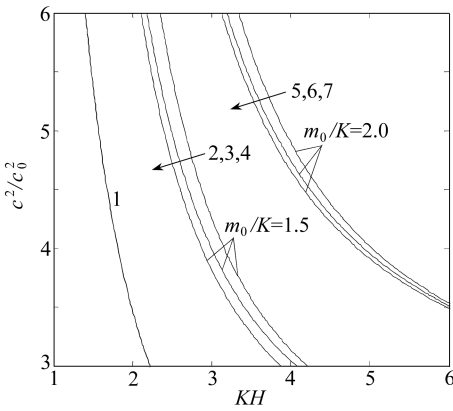


图 2 在情况 I 中 $n_0/K = 1.0, a/K = 2.0$
 $b/K = 2.5$ 时,无量纲相速度随
无量纲波数的变化

Fig.2 Dimensionless phase velocity against dimensionless wave number for case I when $n_0/K = 1.0$,
 $a/K = 2.0, b/K = 2.5$

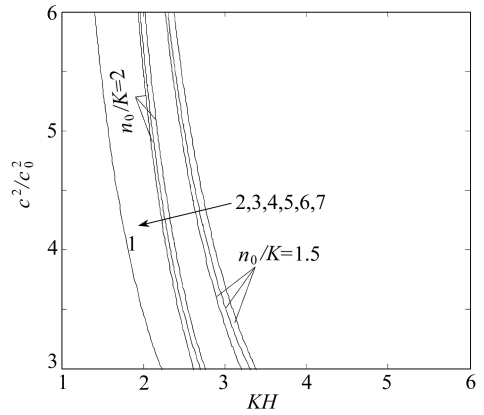


图 3 在情况 I 中 $m_0/K = 1.0, a/K = 2.0$
 $b/K = 2.5$ 时,无量纲相速度随
无量纲波数的变化

Fig.3 Dimensionless phase velocity against dimensionless wave number for case I when $m_0/K = 1.0$,
 $a/K = 2.0, b/K = 2.5$

1) 在全部的图形中,曲线 1 表示经典 Love 波;

2) 图 2、图 4 和图 6 分别描绘了 $m_0/K = 1.5$ 和 $m_0/K = 2.0, n_0/K$ 为常数时,情况 I、情况 II 和情况 III 的相速度变化情况,其中曲线 2~4 对应于 $m_0/K = 1.5$ 的情形,曲线 5~7 对应于 $m_0/K = 2.0$ 的情形;

3) 类似地,图 3、图 5 和图 7 分别描绘了 $n_0/K = 1.5$ 和 $n_0/K = 2.0, m_0/K$ 为常数时,情况

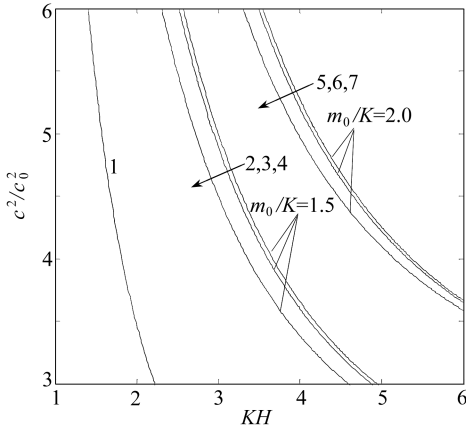


图4 在情况Ⅱ中 $n_0/K = 1.0$, $b_1/K = 2.0$ 时,无量纲相速度随无量纲波数的变化

Fig. 4 Dimensionless phase velocity against dimensionless wave number for case II when $n_0/K = 1.0$, $b_1/K = 2.0$

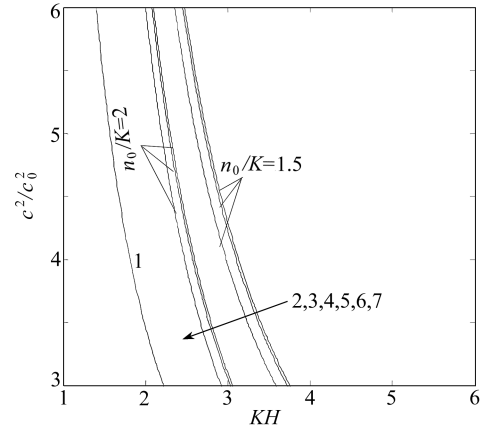


图5 在情况Ⅱ中 $m_0/K = 1.0$, $b_1/K = 2.0$ 时,无量纲相速度随无量纲波数的变化

Fig. 5 Dimensionless phase velocity against dimensionless wave number for case II when $m_0/K = 1.0$, $b_1/K = 2.0$

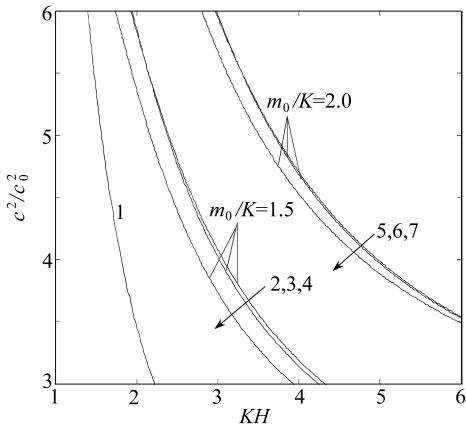


图6 在情况Ⅲ中 $n_0/K = 1.0$, $b_2/K = 0.2$ 时,无量纲相速度随无量纲波数的变化

Fig. 6 Dimensionless phase velocity against dimensionless wave number for case III when $n_0/K = 1.0$, $b_2/K = 0.2$

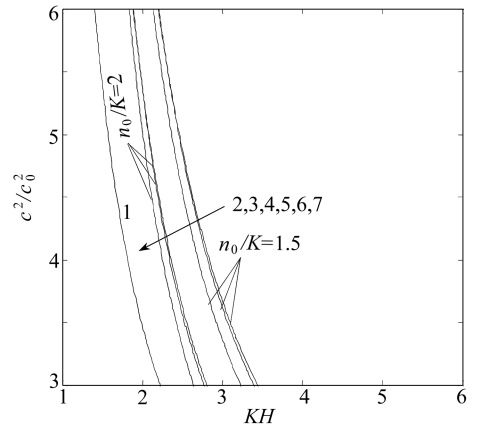


图7 在情况Ⅲ中 $m_0/K = 1.0$, $b_2/K = 0.2$ 时,无量纲相速度随无量纲波数的变化

Fig. 7 Dimensionless phase velocity against dimensionless wave number for case III when $m_0/K = 1.0$, $b_2/K = 0.2$

I、情况Ⅱ和情况Ⅲ的相速度变化情况,其中曲线2~4对应于 $n_0/K = 1.5$ 的情形,曲线5~7对应于 $n_0/K = 2.0$ 的情形。

图2表示情况I(即刚度和密度随深度呈指数变化)的非均匀半空间上的地壳层刚度非均匀性参数 m_0/K 的影响,观察发现:

(2a) 对于一个特定的无量纲波数 KH 和特定的无量纲刚度比 μ_0/μ_1 ,当 m_0/K 的值从1.5增大到2.0时,扭转表面波的相速度增大;

(2b) 但是,对于一个固定的波数 KH 值和固定的 m_0/K 值,随着无量纲刚度比 μ_0/μ_1 的增大,无量纲相速度减小;

(2c) 对于变化的 μ_0/μ_1 和 m_0/K 值,对于全部的曲线1~7,相速度随着波数的减小而增

大;

(2d) 曲线 1(经典情形)比 $m_0/K = 1.5$ 时的曲线 2 ~ 4 陡峭,而曲线 2 ~ 4 又比 $m_0/K = 1.5$ 时的曲线 5 ~ 7 陡峭,这表明无量纲非均匀性参数对扭转波的传播有显著的影响。

图 3 描述了情况 I 的非均匀半空间上的地壳层密度非均匀性参数 n_0/K 的影响,可以发现:

(3a) 对于一个固定的波数 KH 和固定的刚度比 μ_0/μ_1 ,当 n_0/K 的值从 1.5 增大到 2.0 时,扭转表面波的相速度减小;

(3b) 当波数 KH 值和 n_0/K 值固定时,扭转表面波的相速度随着刚度比 μ_0/μ_1 的增大而减小;

(3c) 对于全部的曲线 1 ~ 7,随着无量纲波数 KH 值的增大,无量纲相速度 $(c/c_0)^2$ 减小;

(3d) 图 3 中曲线的陡峭程度大于图 2 中曲线的陡峭程度,这表明图 3 中的波数缓慢增大时,相速度却快速减小;

(3e) 图 3 中的其他曲线更加靠近经典曲线,表明地壳层密度非均匀性参数 n_0/K 对扭转波的影响比刚度非均匀性参数 m_0/K 的小。

在图 4 中,描述了情况 II 的非均匀半空间(即密度和刚度沿深度呈二次型变化)上的地壳层刚度非均匀性参数 m_0/K 的影响,可以发现:

(4a) m_0/K 对扭转表面波相速度的影响如同对图 2 的说明(2a);

(4b) 在特定的波数下, $m_0/K = 1.5$ 时的曲线 2 ~ 4 和 $m_0/K = 1.5$ 时的曲线 5 ~ 7 陡峭都偏离(右偏)曲线 1(经典曲线),表明二次型变化的扭转波相速度大于指数型变化的;

(4c) 与图 2 相比,图 4 中的曲线 2 和曲线 3 之间更加接近,表明 $\mu_0/\mu_1 = 1.2400$ 和 $\mu_0/\mu_1 = 1.4669$ 时相速度非常相近,曲线 5 和曲线 6 之间也有相似的性质;

(4d) 无量纲刚度比对扭转表面波相速度的影响如同对图 2 的说明(2b);

(4e) 波数对扭转表面波相速度的影响如同对图 2 的说明(2c);

(4f) 无量纲非均匀性参数对扭转表面波相速度的影响如同对图 2 的说明(2d)。

图 5 中讨论了情况 II 的非均匀半空间(即密度和刚度沿深度呈二次型变化)上的地壳层密度非均匀性参数 n_0/K 的影响,可以发现:

(5a) 图 5 中 n_0/K 对扭转表面波相速度的影响如同对图 3 的说明(3a);

(5b) 在图 5 中,无量纲相速度比为 3 时, $n_0/K = 2.0$ 的无量纲波数和 $n_0/K = 1.5$ 的无量纲波数分别相当于 3 和 3.75(近似),而在图 3 中,无量纲相速度比为 3 时, $n_0/K = 2.0$ 的无量纲波数和 $n_0/K = 1.5$ 的无量纲波数分别相当于 2.75 和 3.25(近似),表明与情况 I 相比,二次型变化的扭转波相速度更加适宜;

(5c) 情况与对图 4 的说明(4c)相似;

(5d) 情况与对图 3 的说明(3b)、(3c)、(3d)和(3e)相同。

图 6 描述了情况 III 的非均匀半空间(即密度和刚度沿深度呈二次型变化)上的地壳层刚度非均匀性参数 m_0/K 的影响,情况 III 的许多影响与对图 2 的说明(2a)相同,少数不相同的如下:

(6a) 在特定的波数 KH 下,无量纲相速度 $(c/c_0)^2$ 比图 2 中的略小一些,比图 4 中讨论的更小;

(6b) 图 6 中,分别在靠近波数 2 和 3 的区段,曲线 2 ~ 3 和曲线 5 ~ 6 更加逼近。

在图 7 中,所描绘的曲线显示了情况 III 的非均匀半空间(即密度和刚度沿深度呈二次型

变化)上的地壳层刚度非均匀性参数 m_0/K 的影响. 这些影响与图 3 中显示的相似, 除了曲线 2 ~ 3 和曲线 5 ~ 6 分别在无量纲波数为 2 和 2.25 时相交, 表明尽管刚度比分别为 1.240 0 和 1.466 9, 但相速度相同.

7 结 论

研究了扭转表面波在非均匀弹性半空间上覆盖的非均匀地壳层中传播. 分别推导得到地壳层和半空间位移的闭式解. 利用 Whittaker 函数的渐近线性膨胀, 得到紧凑形式的色散方程. 数值计算得到相速度, 并研究 3 种类型半空间的密度和刚度变化对相速度的影响. 以图形方式给出了不同无量纲弹性参数和非均匀参数对无量纲扭转波速度 $(c/c_0)^2$ 的影响, 主要结论有

- (i) 在假设条件下, 3 种情况的相速度 $(c/c_0)^2$ 都随着无量纲波数 KH 的减小而增大;
- (ii) 扭转波相速度随着非均匀参数 m_0/K 的增大而增大, 相速度与介质的刚度成正比;
- (iii) 相速度随着非均匀参数 n_0/K 的增大而减小, 相速度与介质的密度成反比;
- (iv) 文章所提到的地壳层和半空间的刚度和密度的非均匀性不存在时, 所得到的色散方程简化为 Love 波的色散方程, 这一点在文中所讨论的问题中得到了证明.

半空间中的表面波研究, 在地球物理勘探、理解地震形成和评估地震破坏中有着潜在的应用. 在评估地震波带来的破坏时, 扭转波的影响不能忽略. 因此, 本文工作对判定扭转波在非均匀地理介质中的特性具有一定的价值.

致谢 作者衷心感谢印度矿业学院对本文工作的资助, 同时感谢审稿人对本文提出的宝贵意见.

附 录

$$S_1 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\gamma} \right) \left(\frac{m_0}{K} \right)^2 \left(1 - \frac{m_0}{K} KH \right)^{-3/2}, S_2 = \left(\frac{m_0}{K} \right) \left(1 - \frac{m_0}{K} KH \right)^{-3/2},$$

$$S_3 = \left(\frac{m_0}{K} \right) \left(1 - \frac{m_0}{K} KH \right)^{-1/2}, S_4 = 4\gamma \left(1 - \frac{m_0}{K} KH \right)^{-1/2},$$

$$S_5 = \left(-\frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{m_0}{K} KH \right)^{-3/2} \left(\frac{m_0}{K} \right), S_6 = 2\gamma \left(1 - \frac{m_0}{K} KH \right)^{-1/2},$$

$$T_1 = \left(\frac{\eta}{\eta_1} \right)^{R/2} \left\{ 1 - \frac{\left(\frac{R}{2} - \frac{1}{2} \right)^2}{\eta} \right\} \left\{ 1 + \frac{\left(-\frac{R}{2} - \frac{1}{2} \right)^2}{\eta_1} \right\},$$

$$T_2 = \left(\frac{\eta_1}{\eta} \right)^{R/2} \left\{ 1 + \frac{\left(-\frac{R}{2} - \frac{1}{2} \right)^2}{\eta} \right\} \left\{ 1 - \frac{\left(\frac{R}{2} - \frac{1}{2} \right)^2}{\eta_1} \right\},$$

$$T_3 = \left(\frac{\eta}{\eta_1} \right)^{R/2} \left\{ 1 - \frac{\left(\frac{R}{2} - \frac{1}{2} \right)^2}{\eta} \right\} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{R}{2\eta_1} \right) \left\{ 1 + \frac{\left(-\frac{R}{2} - \frac{1}{2} \right)^2}{\eta_1} \right\} - \frac{\left(-\frac{R}{2} - \frac{1}{2} \right)^2}{\eta_1^2} \right],$$

$$T_4 = \left(\frac{\eta_1}{\eta} \right)^{R/2} \left\{ 1 + \frac{\left(-\frac{R}{2} - \frac{1}{2} \right)^2}{\eta} \right\} \left[\left(\frac{R}{2\eta_1} - \frac{1}{2} \right) \left\{ 1 - \frac{\left(\frac{R}{2} - \frac{1}{2} \right)^2}{\eta_1} \right\} + \frac{\left(\frac{R}{2} - \frac{1}{2} \right)^2}{\eta_1^2} \right],$$

$$T_5 = \left(\frac{\eta}{\eta_1} \right)^{R/2} \left\{ 1 + \frac{\left(-\frac{R}{2} - \frac{1}{2} \right)^2}{\eta_1} \right\} \left[\left(\frac{R}{2\eta} - \frac{1}{2} \right) \left\{ 1 - \frac{\left(\frac{R}{2} - \frac{1}{2} \right)^2}{\eta} \right\} + \frac{\left(\frac{R}{2} - \frac{1}{2} \right)^2}{\eta^2} \right],$$

$$\begin{aligned}
T_6 &= \left(\frac{\eta_1}{\eta}\right)^{R/2} \left\{ 1 - \frac{\left(\frac{R}{2} - \frac{1}{2}\right)^2}{\eta_1} \right\} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{R}{2\eta}\right) \left\{ 1 + \frac{\left(-\frac{R}{2} - \frac{1}{2}\right)^2}{\eta} \right\} - \frac{\left(-\frac{R}{2} - \frac{1}{2}\right)^2}{\eta^2} \right], \\
T_7 &= \left(\frac{\eta}{\eta_1}\right)^{R/2} \left[\left(\frac{R}{2\eta} - \frac{1}{2}\right) \left\{ 1 + \frac{\left(-\frac{R}{2} - \frac{1}{2}\right)^2}{\eta} \right\} + \frac{\left(\frac{R}{2} - \frac{1}{2}\right)^2}{\eta^2} \right] \times \\
&\quad \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{R}{2\eta_1}\right) \left\{ 1 + \frac{\left(-\frac{R}{2} - \frac{1}{2}\right)^2}{\eta_1} \right\} - \frac{\left(-\frac{R}{2} - \frac{1}{2}\right)^2}{\eta_1^2} \right], \\
T_8 &= \left(\frac{\eta_1}{\eta}\right)^{R/2} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{R}{2\eta}\right) \left\{ 1 + \frac{\left(-\frac{R}{2} - \frac{1}{2}\right)^2}{\eta} \right\} - \frac{\left(\frac{R}{2} - \frac{1}{2}\right)^2}{\eta^2} \right] \times \\
&\quad \left[\left(\frac{R}{2\eta_1} - \frac{1}{2}\right) \left\{ 1 - \frac{\left(\frac{R}{2} - \frac{1}{2}\right)^2}{\eta_1} \right\} + \frac{\left(\frac{R}{2} - \frac{1}{2}\right)^2}{\eta_1^2} \right], \\
T_9 &= \left(\frac{\eta}{\eta_1}\right)^{R/2} \left[1 - \frac{\left(\frac{R}{2} - \frac{1}{2}\right)^2}{\eta} \right] \left[1 + \frac{\left(-\frac{R}{2} - \frac{1}{2}\right)^2}{\eta_1} \right], \\
T_{10} &= \left(\frac{\eta_1}{\eta}\right)^{R/2} \left[1 + \frac{\left(-\frac{R}{2} - \frac{1}{2}\right)^2}{\eta} \right] \left[1 - \frac{\left(\frac{R}{2} - \frac{1}{2}\right)^2}{\eta_1} \right], \\
T_{11} &= \left(\frac{\eta}{\eta_1}\right)^{R/2} \left\{ 1 + \frac{\left(-\frac{R}{2} - \frac{1}{2}\right)^2}{\eta_1} \right\} \left[\left(\frac{R}{2\eta} - \frac{1}{2}\right) \left\{ 1 - \frac{\left(\frac{R}{2} - \frac{1}{2}\right)^2}{\eta} \right\} + \frac{\left(\frac{R}{2} - \frac{1}{2}\right)^2}{\eta^2} \right], \\
T_{12} &= \left(\frac{\eta_1}{\eta}\right)^{R/2} \left\{ 1 - \frac{\left(\frac{R}{2} - \frac{1}{2}\right)^2}{\eta_1} \right\} \left[\left(-\frac{R}{2\eta} - \frac{1}{2}\right) \left\{ 1 + \frac{\left(-\frac{R}{2} - \frac{1}{2}\right)^2}{\eta} \right\} + \frac{\left(-\frac{R}{2} - \frac{1}{2}\right)^2}{\eta^2} \right], \\
P_1 &= \frac{a}{2\gamma K} - R_1 \frac{a}{\gamma K} + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{a}{K}\right) \left(\frac{\frac{1}{4} - \left(R_1 - \frac{1}{2}\right)}{2\gamma K + \frac{1}{4} - \left(R_1 - \frac{1}{2}\right)} \right),
\end{aligned}$$

$$N_{i1} = S_1 T_1 + S_2 T_3 - S_3 T_5 - S_4 T_7, \quad N_{i2} = S_1 T_2 - S_2 T_4 + S_3 T_6 - S_4 T_8,$$

$$D_{i1} = S_5 T_9 + S_6 T_{11}, \quad D_{i2} = -S_5 T_{10} + S_6 T_{12}.$$

参考文献 (References):

- [1] Ewing W M, Jardetzky, W S, Press F. *Elastic Waves in Layered Media* [M]. New York: McGraw-Hill, 1957.
- [2] Vrettos Ch. In-plane vibrations of soil deposits with variable shear modulus—I: surface waves [J]. *Int J Numer Anal Meth Geomech*, 1990, **14**(3): 209-222.
- [3] Kennett B L N, Tkalčić H. Dynamic earth: crustal and mantle heterogeneity [J]. *Aust J Earth Sci*, 2008, **55**(3): 265-279.
- [4] Reissner E, Sagoci H F. Forced torsional oscillations of an elastic half-space I [J]. *J Appl Phy*, 1944, **15**(9): 652.
- [5] Rayleigh L. On waves propagated along plane surface of an elastic solid [J]. *Proc Lond Math Soc*, 1885, **17**(3): 4-11.

- [6] Georgiadis H G, Vardoulakis I, Lykotrafitis G. Torsional surface waves in a gradient-elastic half space[J]. *Wave Motion*, 2000, **31**(4): 333-348.
- [7] Meissner E. Elastic oberflächenwellen mit dispersion in einem inhomogeneous medium[J]. *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft*, 1921, **66**: 181-195.
- [8] Bhattacharya R C. On the torsional wave propagation in a two-layered circular cylinder with imperfect bonding[J]. *Proc Indian natn Sci Acad*, 1975, **41**(6): 613-619.
- [9] Dey S, Dutta A. Torsional wave propagation in an initially stressed cylinder[J]. *Proc Indian Natn Sci Acad*, 1992, **58**(5): 425-429.
- [10] Chattopadhyay A, Gupta S, Kumari P, Sharma V K. Propagation of torsional waves in an inhomogeneous layer over an inhomogeneous half space[J]. *Meccanica*, 2011, **46**(4): 671-680.
- [11] Pujol J. *Elastic Wave Propagation and Generation in Seismology*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- [12] Chapman C. *Fundamentals of Seismic Wave Propagation*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [13] Gupta S, Chattopadhyay A, Kundu S, Gupta A K. Effect of rigid boundary on the propagation of torsional waves in a homogeneous layer over a heterogeneous half-space[J]. *Arch Appl Mech*, 2010, **80**(2): 143-150.
- [14] Davini C, Paroni R, Puntile E. An asymptotic approach to the torsional problem in thin rectangular domains[J]. *Meccanica*, 2008, **43**(4): 429-435.
- [15] Vardoulakis I. Torsional surface waves in inhomogeneous elastic media[J]. *Int J Numer Analyt Meth Geomech*, 1984, **8**(3): 287-296.
- [16] Akbarov S D, Kepceler T, Egilmez M Mert. Torsional wave dispersion in a finitely prestrained hollow sandwich circular cylinder[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2011, **330**(18/19): 4519-4537.
- [17] Ozturk A, Akbbarov S D. Torsional wave propagation in a pre-stressed circular cylinder embedded in a pre-stressed elastic medium[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2009, **33**(9): 3636-3649.
- [18] Bullen K E. The problem of the Earth's density variation[J]. *Bull Seismol Soc Am*, 1940, **30**(3): 235-250.
- [19] Sari C, Salk M. Analysis of gravity anomalies with hyperbolic density contrast: an application to the gravity data of Western Anatolia[J]. *J Balkan Geophys Soc*, 2002, **5**(3): 87-96.
- [20] Love A E H. *The Mathematical Theory of Elasticity*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1927.
- [21] Whittaker E T, Watson G N. *A Course in Modern Analysis*[M]. 4th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [22] Gubbins D. *Seismology and Plate Tectonics*[M]. Cambridge, New York: Cambridge University press, 1990: 170.
- [23] Tierstein H F. *Linear Piezoelectric Plate Vibrations*[M]. New York: Plenum Press, 1969.

Influence of Linearly Varying Density and Rigidity on Torsional Surface Waves in an Inhomogeneous Crustal Layer

S. Gupta, S. K. Vishwakarma, D. K. Majhi, S. Kundu

*(Department of Applied Mathematics, Indian School of Mines,
Dhanbad 826004, Jharkhand, India)*

Abstract: The possibility of propagation of torsional surface wave in an inhomogeneous crustal layer over an inhomogeneous half space was discussed. The layer had inhomogeneity which varied linearly with depth whereas the inhomogeneous half space exhibited inhomogeneity of three types namely exponential, quadratic and hyperbolic discussed separately. Dispersion equation was deduced for each case in a closed form. For a layer over a homogeneous half space, the dispersion equation agreed with the equation of classical case. It is observed that the inhomogeneity factor due to linear variation in density in the inhomogeneous crustal layer decreases the phase velocity as it increases, while the inhomogeneity factor in rigidity has the reverse effect on phase velocity.

Key words: torsional waves; phase velocity; crustal layer; exponential; quadratic; hyperbolic